SOLUCIONES EXAMEN FINAL (PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA)

a/ Después de barajar una baraja con 40 cartas se extraen 10 cartas al azar sin devolución. Sabiendo que la baraja contiene 4 ases, ¿cuál es la probabilidad de que haya exactamente 2 ases en las 10 cartas que se han repartido?

$$p = \frac{\text{n° de sub-conjuntos de 10 cartas con 2 ases}}{\text{n° total de subconjuntos de 10 cartas}} = \frac{C^4_2 \times C^{36}_8}{C^{40}_{10}} = \frac{\frac{4!}{2!2!} \times \frac{36!}{8!28!}}{\frac{40!}{10!30!}} =$$

$$= \frac{4!\,36!\,10!\,30!}{2!\,2!\,8!\,28!\,40!} = \frac{4\cdot 3}{2} \times 10\times 9 \times \frac{30\times 29}{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37} = \boxed{\frac{3915}{18278} \approx 0.214}$$

b/ Diga y explique por qué las siguientes identidades son verdaderas o falsas:

$$\overline{(A\cap\overline{B}\cap C)}\cap A = (A\cup B)\cup(A\cup C),$$
$$(\overline{(A\cap B}\cap B)\cap(A\cup\overline{A}) = \overline{A}\cap B.$$

Usar leyes de de Morgan y propiedades de la unión y la intersección:

i) $\overline{(A\cap\bar{B}\cap C)}\cap A = \left[\overline{(A\cap\bar{B})}\cup\bar{C}\right]\cap A = \left[\bar{A}\cup B\cup\bar{C}\right]\cap A =$

$= [\bar{A}\cap A]\cup(B\cap A)\cup(\bar{C}\cap A) = (B\cap A)\cup(\bar{C}\cap A) = (B\cup\bar{C})\cap A$

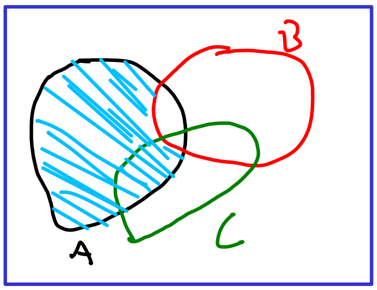
$(A\cup B)\cup(A\cup C) = A\cup B\cup C \Rightarrow$ $\boxed{\text{falso en general.}}$ Por ejemplo, si $C\cap A=\phi$ entonces $A\cup B\cup C$ no puede estar incluido en A pero $(B\cup\bar{C})\cap A\subset A$

ii) $(\overline{A\cap B}\cap B)\cap(\underbrace{A\cup\bar{A}}_{E}) = \overline{A\cap B}\cap B = (\bar{A}\cup\bar{B})\cap B = (\bar{A}\cap B)\cup(\overbrace{\bar{B}\cap B}^{\phi}) = \bar{A}\cap B$

$\boxed{\text{verdadero}}$

(espacio de resultados)

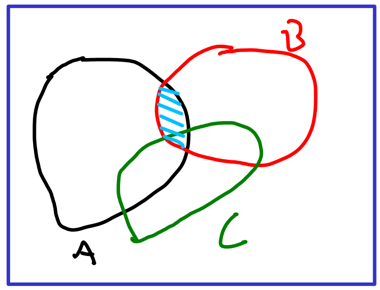
Con diagramas de Venn:



E

$(A \cap \bar{B} \cap C)$

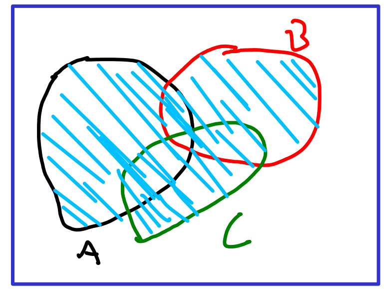
$\Rightarrow$



E

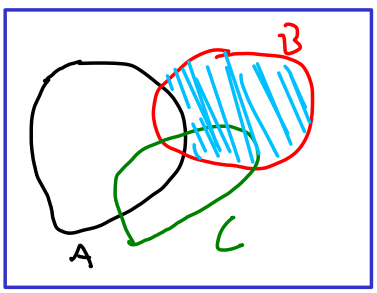
$\overline{(A \cap \bar{B} \cap C)} \cap A$

$\neq$



E

$(A \cup B) \cup (A \cup C)$



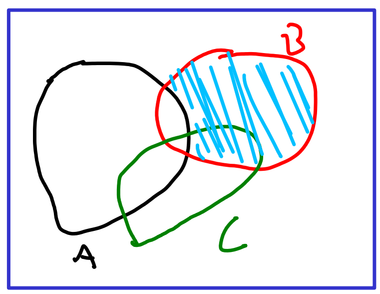
E

$(\overline{A \cap B} \cap B) \cap (A \cup \bar{A})$

$\shortparallel$

$\overline{A \cap B} \cap B$

$=$



E

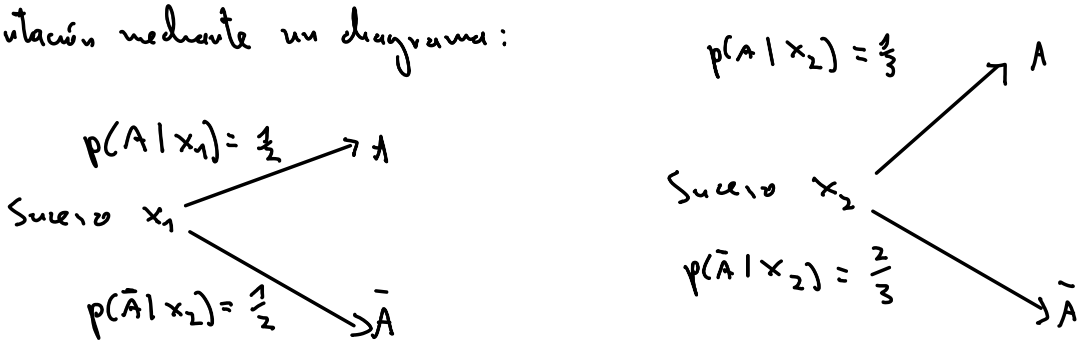
$\bar{A} \cap B = (B \setminus A)$ (B menos A) c/ Supongamos que la función de probabilidad de la variable aleatoria discreta $x \in (0, \infty)$ está dada por $f(x)$. Por otro lado, la probabilidad condicionada de que ocurra un suceso A, dado cierto valor de x, viene dada por la función $g(x)$, es decir, $g(x) \equiv Pr(A|x)$. ¿Tiene que estar normalizada esta función? ¿Por qué? Nos informan de que ha ocurrido A. Escriba la probabilidad de que haya ocurrido cierto valor de x en términos de las funciones genéricas f y g.

i) La función $g(x)$ no tiene por qué estar normalizada porque no es una distribución de probabilidad. Lo vemos con el siguiente ejemplo:

Sea una variable aleatoria que toma dos valores x_1 y x_2. Entonces podemos tener:

$$\left.\begin{aligned} g(x_1) &= p(A|x_1) = \tfrac{1}{2} \\ g(x_2) &= p(A|x_2) = \tfrac{1}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow p(A|x_1) + p(A|x_2) = g(x_1) + g(x_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \neq 1$$

Representación mediante un diagrama:



ii) Recordamos la demostración de la fórmula de Bayes.

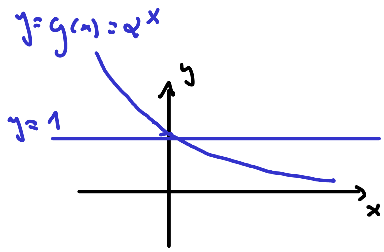
$$Pr(x|A) = \frac{Pr(x \cap A)}{Pr(A)} = \frac{Pr(x) \cdot Pr(A|x)}{Pr(A)} = \boxed{\frac{f(x)\,g(x)}{\sum_{x=0}^{\infty} f(x)\,g(x)}}$$

En el último paso hemos utilizado la fórmula de la descomposición de la probabilidad condicionada:

$$Pr(A) = \sum_{x=0}^{\infty} Pr(x)\,Pr(A|x) = \sum_{x=0}^{\infty} f(x)\,g(x)$$

d/ Continuando la cuestión anterior, supongamos ahora que $f(x)$ está dada por la distribución de Poisson con media λ y que $g(x) = \alpha^x$. ¿Qué valores puede tomar la constante α? Consiga para este caso la probabilidad de que $x = 0$ una vez ha ocurrido A.

i) Si $g(x) = \alpha^x$ entonces sabemos que $0 \le g(x) \le 1$ $\forall x \in (0, \infty)$ así que $0 \le \alpha \le 1$



ii) Aplicamos la fórmula hallada en el problema anterior con $g(x) = \alpha^x$ y $f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$

$$\Pr(x \mid A) = \frac{f(x)\, g(x)}{\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \alpha^x} = \frac{\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \alpha^x}{\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \alpha^x} =$$

$$= \frac{\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \alpha^x}{e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda\alpha)^x}{x!}} = \frac{\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \alpha^x}{e^{-\lambda} e^{\lambda\alpha}} = \frac{\lambda^x}{x!} \alpha^x e^{-\lambda\alpha} =$$

$$= \frac{(\lambda\alpha)^x}{x!} e^{-\lambda\alpha}$$

. Por tanto sustituyendo $x = 0$ obtenemos $\boxed{\Pr(0 \mid A) = e^{-\lambda\alpha}}$

e/ Se sabe que una recepcionista de un hotel suele recibir de media dos llamadas telefónicas cada hora. ¿Cuál será la probabilidad de que reciba un total de tres llamadas durante tres horas?

Hay que usar la distribución de Poisson $p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$

Si para 1 hora $\lambda = 2 \Rightarrow$ para 3 horas $\lambda = 6$.

Por tanto:

Probabilidad de recibir 3 llamadas en 3 horas $p(x=3) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^3}{3!} = e^{-6} \frac{6^3}{6} = e^{-6} 6^2 = \frac{36}{e^6} \approx 0.09$