a/ Se ensayan 2 tratamientos distintos con un grupo de 250 pacientes. El primer tratamiento se aplica a 129 pacientes y el resto sigue el segundo tratamiento. La tercera parte de los pacientes que sigue el primer tratamiento se recupera mientras que en el caso del segundo tratamiento el número de pacientes recuperados es de 55. Concluido el ensayo se escoge al azar un paciente del grupo completo y resulta ser una persona que se ha recuperado. ¿Cuál es la probabilidad de que haya seguido el segundo tratamiento?

Hay 2 formas de hacer el problema: usando Bayes o por conteo directo:

Usando Bayes: definimos los siguientes sucesos:

$T_1 = \{\text{seguir tratamiento } 1\}$

$T_2 = \{\text{seguir tratamiento } 2\}$

$C_1 = \{\text{curarse con tratamiento } 1\}$

$C_2 = \{\text{curarse con tratamiento } 2\}$

$C = C_1 \cup C_2 = \{\text{curarse}\}$

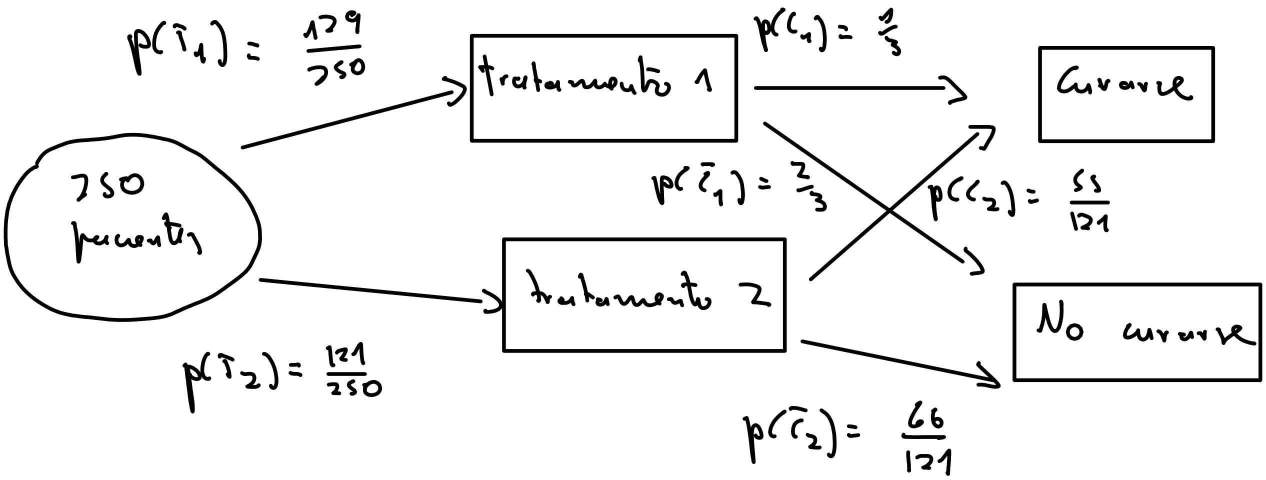
Nos están pidiendo $p(T_2/C)$

Deducimos la fórmula de Bayes:

$$\left.\begin{aligned} p(T_2/C) &= \frac{p(T_2 \cap C)}{p(C)} \\ p(C/T_2) &= \frac{p(C \cap T_2)}{p(T_2)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &p(T_2/C)\cdot p(C) = p(C/T_2)\cdot p(T_2) \\ &p(T_2/C) = \frac{p(C/T_2)\cdot p(T_2)}{p(C)} \end{aligned}$$

← Sólo falta sustituir los datos

Para mayor claridad podemos usar un diagrama para representar los sucesos y sus probabilidades:



$$p(T_1) = \frac{129}{250}, \quad p(T_2) = \frac{250-129}{250} = \frac{121}{250}, \quad p(C_2) = p\left(C/T_2\right) = \frac{55}{121} = \frac{5}{11}$$

Falta calcular $p(C)$ lo cual se puede hacer utilizando la fórmula de la descomposición de la probabilidad condicionada

$$p(C) = p\left(C/T_1\right) \cdot p(T_1) + p\left(C/T_2\right) \cdot p(T_2) = p(C_1) \cdot p(T_1) + p(C_2) \cdot p(T_2) =$$

$$= \frac{43}{129} \times \frac{129}{250} + \frac{55}{121} \times \frac{121}{250} = \frac{43+55}{250} = \frac{98}{250}$$

Por tanto tenemos finalmente que

$$\boxed{p\left(T_2/C\right) = \frac{\frac{55}{121} \times \frac{121}{250}}{\frac{43}{129} \times \frac{129}{250} + \frac{55}{121} \times \frac{121}{250}} = \frac{\frac{55}{121} \times \frac{121}{250}}{\frac{43+55}{250}} = \frac{55}{43+55} = \frac{55}{98} \sim 56\,\%}$$

Por conteo directo:

$$\boxed{p = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{\text{nº pacientes recuperados con el 2º tratamiento}}{\text{nº total pacientes recuperados}} = \frac{55}{98}}$$

1. Le damos un teclado con N teclas a un mono y empieza a teclear aleatoriamente. ¿Cuál es la probabilidad de que reproduzca exactamente un texto dado con una longitud de n caracteres? ¿Y cuál es la probabilidad de que reproduzca ese mismo texto con m errores?

Tenemos n experimentos aleatorios independientes (cada uno de ellos consiste en que el mono presione una tecla). El resultado de cada experimento aleatorio puede ser el éxito (el mono acierta un carácter) o el fracaso (el mono no acierta el carácter). Así que tenemos que utilizar la distribución binomial.

* Probabilidad de acertar un carácter al presionar una tecla $= \frac{1}{N}$
* Probabilidad de obtener x aciertos en n experimentos aleatorios:

$$p(x) = \binom{n}{x}\left(\frac{1}{N}\right)^{x}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-x}$$

* Probabilidad de acertar n caracteres

$$p(x=n) = \binom{n}{n}\left(\frac{1}{N}\right)^{n}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-n} = \boxed{\frac{1}{N^n}}$$

* Probabilidad de fallar en m caracteres = probabilidad de acertar $n-m$ caracteres

$$p(x=n-m) = \binom{n}{n-m}\left(\frac{1}{N}\right)^{n-m}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{m} = \binom{n}{m} N^{m-n}\frac{(N-1)^m}{N^m} =$$

$$= \boxed{\binom{n}{m}\frac{(N-1)^m}{N^n}}$$

También se puede hacer por conteo directo:

$$\text{Probabilidad de acertar } n \text{ caracteres} = \frac{\text{nº de textos con } n \text{ caracteres dados}}{\text{nº de textos posibles con } n \text{ caracteres}} =$$

$$\frac{1}{VR^N_n} = \frac{1}{N^n}$$

$$\text{Probabilidad de fallar en } m \text{ caracteres} = \frac{\text{nº de posibles maneras de tener } m \text{ errores en un texto de } n \text{ caracteres}}{\text{nº de textos posibles con } n \text{ caracteres}} =$$

$$= \frac{\text{nº de elecciones de } m \text{ caracteres} \times \text{nº de posibles maneras de ordenar } N-1 \text{ caracteres en cada elección}}{\text{nº de textos posibles con } n \text{ caracteres}} = \frac{C^n_m \times VR^{N-1}_m}{VR^N_n} = \binom{n}{m}\frac{(N-1)^m}{N^n}$$

c/ Una empresa produce puertas de madera cuya altura se distribuye de acuerdo con una distribución normal de probabilidad, con media 200cm y desviación típica 5cm. Una puerta se acepta si su altura es mayor que 190cm y se rechaza en caso contrario. Probar que la tasa de rechazo será del 2 % aproximadamente.

$X \equiv$ variable aleatoria para las alturas. Sabemos que $X \sim N(200, 5)$

Tenemos que calcular $P_r(X < 190\text{cm})$. Por tanto: $0.0228 \sim 2\%$

$$P_r(x < 190 \text{ cm}) = \int_{-\infty}^{x_0} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \Phi\left[\frac{x_0-\mu}{\sigma}\right] =$$

$$= \Phi\left[\frac{190-200}{5}\right] = \Phi\left[-\frac{10}{5}\right] = \Phi[-2] = 1 - \Phi[2] = 1 - 0.9772 = 0.0228 \sim 2\%$$

propiedades de Φ

tablas

d/ El movimiento de un oscilador armónico viene dado por $x = A\sin(\omega t)$. Obtenga la distribución de probabilidad $f(x)dx$ adecuadamente normalizada que proporciona la probabilidad de encontrar el oscilador en el intervalo $(x, x+dx)$. Sugerencia: la distribución de probabilidad $f(x)dx$ es proporcional al tiempo dt que tarda el oscilador en recorrer dicho intervalo.

Seguimos la sugerencia:

$$f(x)\,dx = k\,dt \qquad x = A\sin\omega t \Rightarrow \frac{1}{\omega}\,\mathrm{ArcSin}\left[\frac{x}{A}\right] = t$$

$$\Rightarrow dt = \frac{1}{\omega}\,\frac{\frac{1}{A}}{\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)^{1/2}}\,dx \Rightarrow f(x)\,dx = \frac{k}{A\omega\left[1 - \frac{x^2}{A^2}\right]^{1/2}}\,dx$$

Normalización de $f(x)$: hay que tener en cuenta que $-A < x < A$;

$$\int_{-A}^{A} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \frac{k}{A\omega}\int_{-A}^{A}\frac{dx}{\left[1 - \frac{x^2}{A^2}\right]^{1/2}} = \left[\begin{array}{l} x = A\sin u \\ dx = A\cos u\,du \end{array}\right] = \frac{k}{A\omega}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{A\cos u}{\cos u}\,du =$$

$$= \frac{\pi A k}{A\omega} = 1 \Rightarrow k = \frac{\omega}{\pi} \Rightarrow$$ Por tanto el valor final de la función densidad de probabilidad es:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\pi A\left[1 - \frac{x^2}{A^2}\right]^{1/2}} = \frac{1}{\pi\left[A^2 - x^2\right]^{1/2}}, \quad -A < x < A}$$

e/ Un amigo nos dice que tiene una moneda que está trucada, de tal manera que la probabilidad de que salga cara es $p > 1/2$. Para comprobarlo, la lanzamos N veces y obtenemos M caras. ¿Cuál es el número mínimo de caras que hemos tenido que conseguir para asegurar que dicha moneda está trucada con un nivel central de confianza de $X\,\%$ (o alternativamente con una confianza de $\gamma\sigma$, siendo γ un número positivo dado)? (Suponga que $N \gg 1$.)

Distribución de población binomial $P(x|p) = \binom{N}{x} p^{x} (1-p)^{N-x}$ $\quad \sigma : Np(1-p)$

Si $N \gg 1$ aproximamos por Normal $p(x|p) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right]$

$\mu = Np$ y $\sigma = \sqrt{Np(1-p)}$

Queremos estimar $p \Rightarrow$ Estimador $\hat{p} = \frac{x}{N} \Rightarrow x = N\hat{p}$ (x = nº de caras)

Distribución muestral $p(\hat{p}|p) = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(N\hat{p}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$

Límite inferior del intervalo de confianza $\Rightarrow$ $\frac{N}{\sigma_-} \int_{\hat{p}_{obs}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(N\hat{p}-\mu_-)^2}{2\sigma_-^2}\right] d\hat{p} = \alpha$

Hacemos un cambio de variable:

$$\frac{N\hat{p}-\mu_-}{\sigma_-} = z \Rightarrow d\hat{p} = \frac{\sigma_-}{N}\,dz \qquad \frac{1}{\sigma_-} \int_{\frac{N\hat{p}_{obs}-\mu_-}{\sigma_-}}^{\infty} \frac{\sigma_-}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] dz =$$

$$= 1 - \Phi\left[\frac{N\hat{p}_{obs}-\mu_-}{\sigma_-}\right] = \alpha \Rightarrow \sigma_- \Phi^{-1}[1-\alpha] = N\hat{p}_{obs} - \mu_-$$

Donde debemos recordar que: $\mu_- = Np_-$ $\quad \sigma_- = [Np_-(1-p_-)]^{1/2}$

Para el número mínimo de caras M_{min} sabemos que $\hat{p}_{obs} = \frac{M_{min}}{N}$ y que $p_- = 1/2$

Por tanto: $\sigma_- = \left[N \frac{1}{2}\frac{1}{2}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{N}{4}\right]^{\frac{1}{2}}$. Sustituimos en la fórmula anterior

$$\frac{\sigma_- \Phi^{-1}[1-\alpha] + \mu_-}{N} = \hat{p}_{obs} \Rightarrow \boxed{M_{min} = \left[N \frac{1}{4}\right]^{\frac{1}{2}} \Phi^{-1}[1-\alpha] + \frac{1}{2}N}$$

Podemos escribir esta fórmula en términos de σ o de X:

* Confianza $\gamma\sigma \Rightarrow$ $P_r(\mu-\gamma\sigma \leq X \leq \mu+\gamma\sigma) = 2\Phi(\gamma)-1$

$$1-2\alpha = 2\Phi(\gamma)-1 \Rightarrow 2\Phi(\gamma) = 2(1-\alpha) \Rightarrow$$

$$\Phi(\gamma) = 1-\alpha \Rightarrow \alpha = 1-\Phi(\gamma) \qquad \Phi^{-1}[1-\alpha] = \Phi^{-1}[1-1+\Phi(\gamma)] = \gamma$$

Por tanto $\boxed{M_{min} = \left[\frac{N}{4}\right]^{\frac{1}{2}}\gamma + \frac{1}{2}N}$

* Confianza $X\%$ $\xi = \frac{X}{100}$ $\qquad 1-2\alpha = \xi \Rightarrow \frac{1}{2}(1-\xi) = \alpha$

$$1-\alpha = 1-\frac{1}{2}(1-\xi) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\xi = \frac{1}{2}(1+\xi)$$

$$\boxed{M_{min} = \left[\frac{N}{4}\right]^{\frac{1}{2}} \Phi^{-1}\left[\frac{1+\xi}{2}\right] + \frac{N}{2} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{N}\,\Phi^{-1}\left[\frac{1+\xi}{2}\right] + N\right]}$$