EJERCICIOS DE PROBABILIDAD

$\boxed{1}$ Explicite los siguientes eventos en términos de los eventos A, B y C. Asimismo dibuje los correspondientes diagramas de Venn:

a) Ha ocurrido al menos uno de A, B o C. = o bien ocurrió A o ocurrió B o ocurrió C

b) Como mucho ha ocurrido uno de los tres eventos.

c) No ha ocurrido ni no A ni no B ni no C.

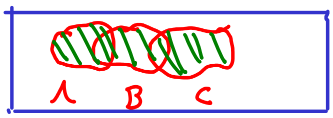
d) Han ocurrido tanto A como B como C. = $A \cap B \cap C$

e) Ha ocurrido uno de los tres eventos, y solo uno.

f) Han ocurrido A y B pero no C.

g) Ha ocurrido A, o, en otro caso, si no ha ocurrido A, tampoco ha ocurrido B.

a) $S = A \cup B \cup C$



= o bien ocurrió A o bien ocurrió B o bien ocurrió C

b) Como mucho ha ocurrido uno de los tres eventos = o bien ha ocurrido A o bien ocurrió B o bien ocurrió C $\Rightarrow S = A \cup B \cup C$.

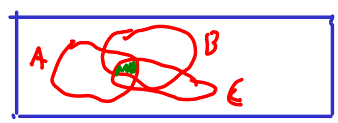
c) No ha ocurrido ni no A ni no B ni no C =

no [ha ocurrido no A y no B y no C] =

$S = \overline{(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})} = \bar{\bar{A}} \cup \overline{(\bar{B} \cap \bar{C})} = A \cup (B \cup C)$ = ha ocurrido o bien A o bien B o bien C

De Morgan   De Morgan

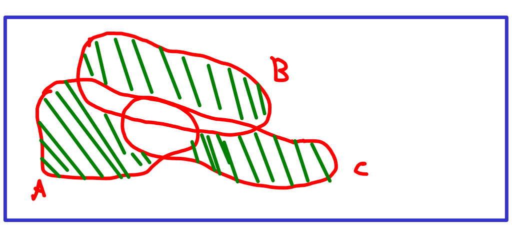
d) Han ocurrido A y B y C $\Rightarrow S = A \cap B \cap C$



e) Ha ocurrido uno de los tres eventos y sólo uno = o bien ocurrió A y no ocurrieron ni B ni C, o bien ocurrió B y no ocurrieron ni A ni C, o bien ocurrió C y no ocurrieron ni A ni B $\Rightarrow$ $S = [A \setminus (B \cap C)] \cup [B \setminus (A \cap C)] \cup [C \setminus (A \cap B)] =$

$= [A \cap \overline{(B \cap C)}] \cup [B \cap \overline{(A \cap C)}] \cup [C \cap \overline{(A \cap B)}]$

E



Mirando al diagrama de Venn se deduce que S también se puede expresar así:

$S = (A \cup B \cup C) \cap \overline{[(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (C \cap B)]}$

Podemos demostrar formalmente que ambas expresiones coinciden.

$$(A\cup B\cup C)\cap\overline{\left[(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(C\cap B)\right]} = (A\cup B\cup C)\cap\left[\overline{(A\cap B)}\cup\overline{(A\cap C)}\cup\overline{(C\cap B)}\right] =$$

$$= (A\cup B\cup C)\cap[\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{A}\cup\bar{C}\cup\bar{C}\cup\bar{B}] = (A\cup B\cup C)\cap(\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}) =$$

$$(A\cap\bar{A})\cup(A\cap\bar{B})\cup(A\cap\bar{C})\cup(B\cap\bar{A})\cup(B\cap\bar{C})\cup(C\cap\bar{A})\cup(C\cap\bar{B}) =$$

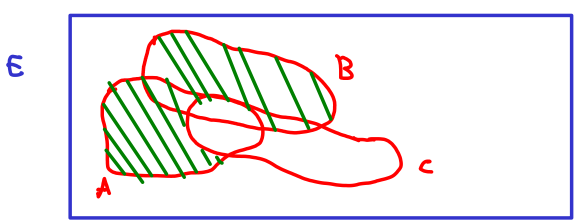
$$= (A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})\cup(A\cap\bar{C})\cup(C\cap\bar{A})\cup(B\cap\bar{C})\cup(C\cap\bar{B}) =$$

$$= (A\cap\bar{B})\cup(A\cap\bar{C})\cup(B\cap\bar{A})\cup(B\cap\bar{C})\cup(C\cap\bar{A})\cup(C\cap\bar{B}) =$$

$$[A\cap(\bar{B}\cup\bar{C})]\cup[B\cap(\bar{A}\cup\bar{C})]\cup[C\cap(\bar{A}\cup\bar{B})] =$$

$$= [A\cap\overline{(B\cap C)}]\cup[B\cap\overline{(A\cap C)}]\cup[C\cap\overline{(A\cap B)}]$$

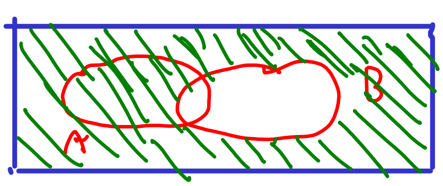
f) Han ocurrido A y B pero no C $\Rightarrow S = (A\cap B)\setminus C = A\cap B\cap\bar{C}$



g) Ha ocurrido A o en otro caso si no ha ocurrido A tampoco ha ocurrido B =

= o bien ha ocurrido A o bien no han ocurrido ni A ni B =

$\Rightarrow S = A\cup(\bar{A}\cap\bar{B}) = (A\cup\bar{A})\cap(A\cup\bar{B}) = A\cup\bar{B}$ = o bien ha ocurrido A o bien no ha ocurrido B.



$\boxed{2}$ A y B son eventos. Use los axiomas de probabilidad para demostrar

$$P(A\cap B) \geq P(A) + P(B) - 1\,.$$

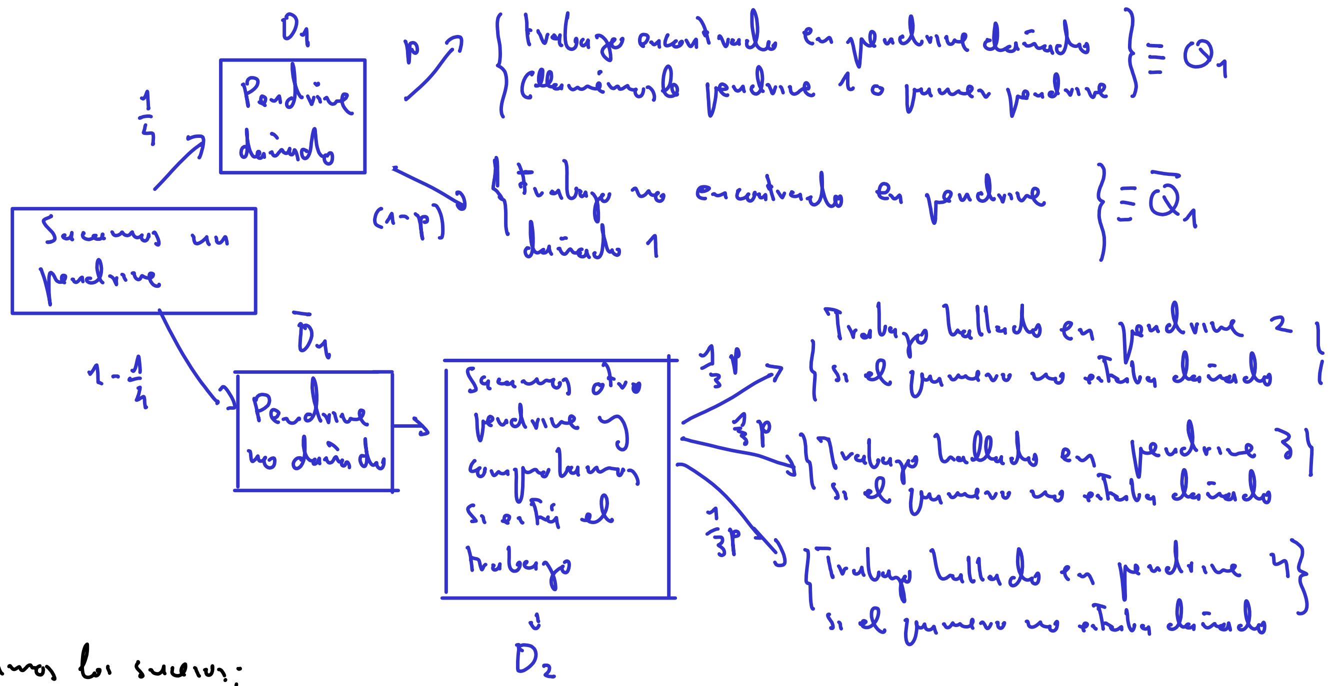
$$1 \geq p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B) \Rightarrow$$

$$1 \geq p(A) + p(B) - p(A\cap B) \Rightarrow p(A\cap B) \geq p(A) + p(B) - 1$$

$\boxed{3}$ Ha guardado Ud. su trabajo de fin de grado en un *pendrive*, que ha resultado dañado. Todavía peor, lo tenía en un cajón con otros tres, indistinguibles del primero, con lo que no sabe en cuál de los cuatro está el trabajo de fin de grado. Cuenta Ud. con un amigo informático ducho en tales menesteres, y es consciente de que es capaz de identificar la presencia del trabajo de fin de grado en el pendrive dañado con probabilidad p, supuesto que es el pendrive original. Ha examinado un pendrive y no ha encontrado el trabajo. ¿Cuál es la probabilidad de que el trabajo se encuentre en el pendrive i-ésimo?

dañado

Tenemos 3 experimentos aleatorios: sacamos un pendrive del cajón (para comprobar si está el trabajo) y después sacamos otro pendrive del cajón (habiendo dejado el primero aparte). Finalmente el informático comprueba en cada extracción si está el trabajo. Representamos los sucesos y sus probabilidades en el siguiente diagrama:



Definimos los sucesos:

$$A_i \equiv \{\text{trabajo hallado en el pendrive } i\} \quad i=1,2,3,4$$

La probabilidad pedida es la probabilidad de hallar el trabajo en el pendrive $i=2,3,4$ dado que no estaba en el primer pendrive que sacamos. Es decir hay que calcular $p(A_i/\bar{A}_1)$:

$$p(A_i/\bar{A}_1) = \frac{p(A_i \cap \bar{A}_1)}{p(\bar{A}_1)} \qquad i \neq 1$$

Mirando el diagrama o usando la lógica deducimos que:

$$\bar{A}_1 = \left(\underset{\substack{\equiv \\ D_1}}{\{\text{Pendrive 1 dañado}\}} \cap \underset{\substack{\equiv \\ \bar{Q}_1}}{\left\{\begin{array}{c}\text{trabajo no} \\ \text{encontrado en} \\ \text{pendrive dañado 1}\end{array}\right\}} \right) \cup \underset{\substack{\equiv \\ \bar{D}_1}}{\left\{\begin{array}{c}\text{Pendrive 1} \\ \text{no dañado}\end{array}\right\}}$$

Los sucesos $D_1 \cap \bar{Q}_1$ y $\bar{D}_1$ son excluyentes, así que $p(\bar{A}_1) = p(\bar{D}_1) + p(D_1 \cap \bar{Q}_1)$

por otra parte

$$\left.\begin{array}{l} p(\bar{D}_1) = 1 - p(D_1) = 1 - \frac{1}{4} \\ p(D_1 \cap \bar{Q}_1) = \underset{\substack{\| \\ \frac{1}{4}}}{p(D_1)} \cdot \underset{\substack{\| \\ 1-p}}{p(\bar{Q}_1 / D_1)} = \frac{1}{4}(1-p) \end{array}\right\} \text{sustituyendo} \Rightarrow p(\bar{A}_1) = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1-p}{4} = 1 - \frac{p}{4}$$

Por otra parte si $i \neq 1$

$$A_i \cap \bar{A}_1 = A_i \cap [(D_1 \cap \bar{Q}_1) \cup \bar{D}_1] = (\underbrace{A_i \cap D_1 \cap \bar{Q}_1}_{\phi}) \cup (A_i \cap \bar{D}_1) = A_i \cap \bar{D}_1$$

Así que $p(A_i \cap \bar{A}_1) = p(A_i \cap \bar{D}_1) = p(A_i / \bar{D}_1) \cdot p(\bar{D}_1) \quad \forall i \neq 1$

Nos falta calcular $p(A_i / \bar{D}_1)$. Definimos $D_2 \equiv \{$el 2º pendrive que sacamos está dañado$\}$

Usando la completitud de la probabilidad condicionada y sabiendo que $p(A_i / \bar{D}_2) = 0$ (porque el trabajo está en un pendrive dañado) se tiene que:

$$p(A_i / \bar{D}_1) = p(D_2 / \bar{D}_1) \cdot p(A_i / D_2) = \frac{\text{nº de pendrives dañados}}{\begin{array}{c}\text{nº de pendrives} \\ \text{quitando 1 que} \\ \text{ya hemos sacado}\end{array}} \times \begin{array}{c}\text{probabilidad de hallar} \\ \text{el trabajo en un} \\ \text{pendrive dañado}\end{array} = \frac{p}{3} \quad \forall i \neq 1$$

Por tanto $p(A_i \cap \bar{A}_1) = \frac{p}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right)$

Finalmente sustituyendo los datos se obtiene:

$$p(A_2/\bar{A}_1) = \frac{p(A_2 \cap \bar{A}_1)}{p(\bar{A}_1)} \quad \frac{\frac{1}{3}p\left(1-\frac{1}{4}\right)}{1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(1-p)} = \frac{\frac{p}{4}}{1-\frac{1}{4}p} = \frac{p}{4-p}$$

$\boxed{4}$ Hemos sacado sucesivamente dos cartas de una baraja francesa (52 naipes, sin comodines –*jokers*–). Considere como pares las cartas con nombre 2, 4, 6, 8 y 10 únicamente.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos cartas sean pares?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera carta sea par y la segunda no lo sea?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las dos cartas sea par?

Dos experimentos aleatorios: sacamos una carta de la baraja y después sacamos otra carta:

Sucesos: $A_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{Carta par en la} \\ \text{1ª extracción} \end{array} \right\}$ $A_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{Carta par en la 2ª} \\ \text{extracción} \end{array} \right\}$

$$p(A_1) = \frac{\text{nº de cartas pares}}{\text{nº total de cartas}} = \frac{4 \text{ palos} \times 5 \text{ cartas pares por palo}}{52} = \frac{20}{52} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$$

$$p(\bar{A}_1) = 1 - p(A_1) = \frac{13}{13} - \frac{5}{13} = \frac{8}{13}$$

$$p(A_2/A_1) = \frac{\text{nº de cartas pares quitando una}}{\text{nº total de cartas quitando una}} = \frac{19}{51}$$

$$p(\bar{A}_2/A_1) = \frac{\text{nº de cartas no pares}}{\text{nº total de cartas quitando una}} = \frac{52-20}{52-1} = \frac{32}{51}$$

En este caso se tiene que $p(\bar{A}_2/A_1) = 1 - p(A_2/A_1) = \frac{51}{51} - \frac{19}{51} = \frac{32}{51}$

$$p(A_2/\bar{A}_1) = \frac{\text{nº de cartas pares}}{\text{nº total de cartas quitando una}} = \frac{20}{51}$$

$$p(\bar{A}_2/\bar{A}_1) = \frac{\text{nº de cartas no pares}}{\text{nº total de cartas quitando una}} = \frac{51-20}{51} = \frac{31}{51} = 1 - p(A_2/\bar{A}_1)$$

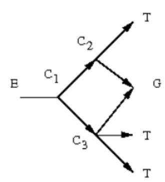
Probabilidades pedidas:

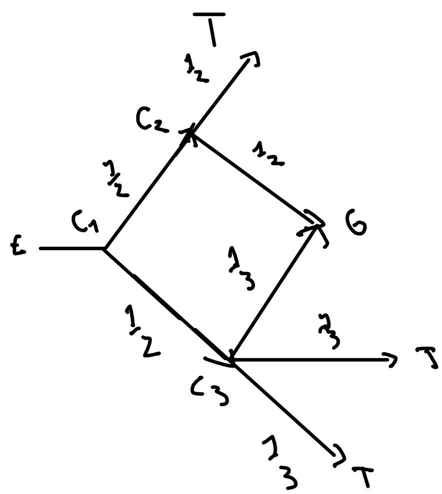
$$p(A_1 \cap A_2) = p(A_1) \cdot p(A_2/A_1) = \frac{5}{13} \cdot \frac{19}{51} = \frac{95}{663}$$

$$p(A_1 \cap \bar{A}_2) = p(A_1) \cdot p(\bar{A}_2/A_1) = \frac{5}{13} \cdot \frac{32}{51} = \frac{160}{663}$$

$$p(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = p(\bar{A}_1) \cdot p(\bar{A}_2/\bar{A}_1) = \frac{8}{13} \cdot \frac{31}{51} = \frac{248}{663}$$

$\boxed{5}$ Partiendo de su madriguera (E) un ratón puede optar por varios trayectos de único sentido, que le llevan al queso (G) o a trampas (T). En cada división de la senda el ratón puede optar, con igual probabilidad, por cada uno de los senderos salientes (nunca hacia atrás). a) ¿Cuál es la probabilidad de que llegue al queso? b) Dado que alguien ha observado al ratón pasando por el punto C_3, ¿cuál es la probabilidad de que llegue al queso?





a) Probabilidad de llegar al queso: aplicamos la fórmula de la descomposición de las probabilidades condicionadas

$$p(G) = p(C_2/C_1) \cdot p(G/C_2) + p(C_3/C_1) \cdot p(G/C_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{3+2}{12} = \frac{5}{12}$$

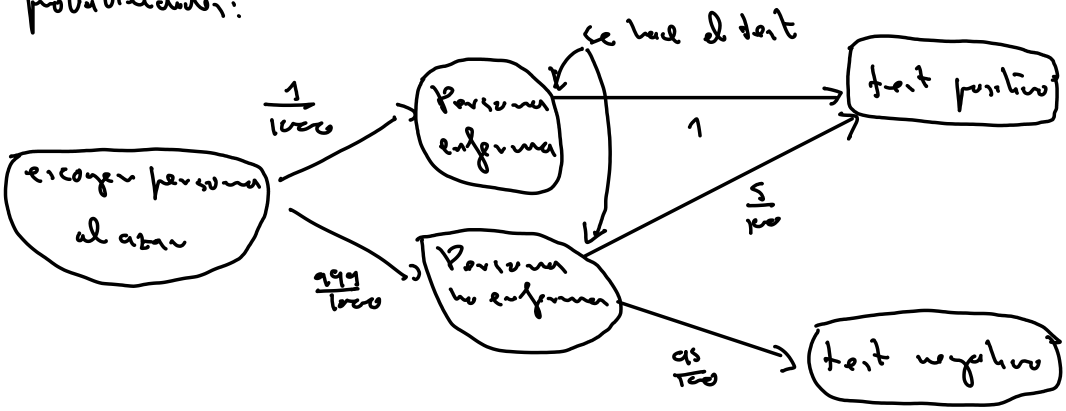
b) Probabilidad de llegar al queso dado que el ratón pasó por C_3

$$p(G/C_3) = \frac{1}{3}$$

6 Contamos con los siguientes elementos para llegar a una conclusión: i) he dado positivo en una prueba diagnóstica para la enfermedad E; ii) existe un 5 % de falsos positivos en esa prueba diagnóstica; iii) no hay falsos negativos en la misma prueba; iv) la prevalencia de la enfermedad E en la población general es de uno por mil.

¿Cuál es la probabilidad de que efectivamente padezca la enfermedad E?

Experimentos aleatorios: se escoge una persona de la población al azar y se le hace una prueba diagnóstica. Lo representamos con un diagrama indicando sucesos y probabilidades:



Sucesos: $A \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{la persona está} \\ \text{enferma.} \end{array} \right\}$ $\quad B \equiv \{\text{el test da positivo}\}$

Probabilidades:

$p(A) = \frac{1}{1000}$ $\qquad p(B/A) = 1$ (no hay falsos positivos)

$p(\bar{A}) = \frac{999}{1000}$ $\qquad p(B/\bar{A}) = \frac{5}{100}$ $\qquad p(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{95}{100}$

La probabilidad que nos están preguntando es $p(A/B)$

$$p(A/B) = \frac{\text{probabilidad de pasar por "persona enferma" para ir a "test positivo"}}{\text{suma de las probabilidades de todos los caminos que acaban en "test positivo"}}$$

Usamos Bayes: $$p(A/B) = \frac{p(A)\cdot p(B/A)}{p(A)\cdot p(B/A) + p(\bar{A})\cdot p(B/\bar{A})} =$$

Sustituyendo:

$$= \frac{\frac{1}{1000}}{\frac{1}{1000} + \frac{999}{1000} \times \frac{5}{100}} = \frac{\frac{1}{1000}}{\frac{1}{1000} + \frac{4995}{100000}} = \frac{\frac{1}{1000}}{\frac{100 + 4995}{100000}} = \frac{100000}{5095 \cdot 1000} = \frac{100}{5095}$$

$\simeq 0.02$

$\boxed{7}$ En un experimento de física quiere estudiarse neutrinos tau (ν_τ). Es extremadamente difícil detectar esas partículas, y el experimento no es efectivo al 100 %. Con objeto de mejorar la eficacia, se hacen dos análisis simultáneos; esto es, usamos simultáneamente dos detectores independientes y diferentes. Supongamos que, tras un largo estudio, hemos detectado una gran cantidad de neutrinos (así podremos usar la interpretación frecuentista de la probabilidad) y que cada neutrino tiene la misma probabilidad de ser detectado en uno dado de los detectores (diferente según el detector, idéntico entre partículas).

Se detecta a la vez en ambos N_{12} veces; en el primer detector se detecta en total $N_{12}+N_1$ veces; en el segundo detector se detecta en total $N_{12} + N_2$ veces; no hay detección $N - (N_{12} + N_1 + N_2)$ veces (que es una cifra desconocida).

Esto es, el número total de neutrinos que ha pasado por el sistema de detección es N, una cifra que desconocemos.

Experimento aleatorio: poner 2 detectores y medir la detección de ν_τ

D_1 y D_2 son sucesos estadísticamente independientes (asociados a diferentes experimentos aleatorios)

detector 1 $\xrightarrow{p_1}$ Detecta $\nu_\tau = D_1$

detector 1 $\xrightarrow{1-p_1}$ No detecta $\nu_\tau = \bar{D}_1$

detector 2 $\xrightarrow{p_2}$ Detecta $\nu_\tau = D_2$

detector 2 $\xrightarrow{1-p_2}$ No detecta $\nu_\tau = \bar{D}_2$

Se detecta ν_τ en los 2 detectores

$$p(D_1 \cap D_2) = p(D_1)\cdot p(D_2) = \frac{N_{12}}{N}$$

No hay detección en ningún detector $= \bar{D}_1 \cap \bar{D}_2$

$$p(\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2) = p(\bar{D}_1)\cdot p(\bar{D}_2) = \frac{N - N_{12} - N_1 - N_2}{N}$$

Se detecta ν_τ en 1 $\quad p(D_1) = \frac{N_{12}+N_1}{N}$

Se detecta ν_τ en 2 $\quad p(D_2) = \frac{N_{12}+N_2}{N}$

Con la información dada podemos despejar N para usarlo después:

$p(D_1 \cap D_2) = p(D_1) \cdot p(D_2) \Rightarrow$ sustituyendo en la fórmula:

$$\frac{(N_{12}+N_1)(N_{12}+N_2)}{N^2} = \frac{N_{12}}{N} \Rightarrow \frac{(N_{12}+N_1)(N_{12}+N_2)}{N_{12}} = N$$

a) ¿Cuáles son las eficacias de los detectores? (¿Qué proporción de los posibles eventos da lugar a señal?)

$$\text{Eficacia del detector } 1 = p(D_1) = \frac{N_1+N_{21}}{N} = \frac{(N_1+N_{21})N_{12}}{(N_{12}+N_1)(N_{12}+N_2)} = \frac{N_{12}}{N_{12}+N_2} = \eta_1$$

$$\text{Eficacia del detector } 2 = p(D_2) = \frac{N_2+N_{21}}{N} = \frac{(N_2+N_{21})N_{12}}{(N_{12}+N_1)(N_{12}+N_2)} = \frac{N_{12}}{N_{12}+N_1} = \eta_2$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de ser observado en *ambos* detectores? Dé su respuesta en términos de los números de eventos directamente, y en términos de eficacias, *teniendo en cuenta que la detección en cada uno de los detectores es independiente de si ha tenido lugar la detección en el otro.*

$$p(D_1 \cap D_2) = p(D_1)\,p(D_2) = \frac{N_{12}}{N_{12}+N_2} \cdot \frac{N_{12}}{N_{12}+N_1} = \frac{N_{12}^2}{(N_{12}+N_2)(N_{12}+N_1)} = \eta_1 \cdot \eta_2$$

c) Relacionando las dos expresiones anteriores, resuelva para N, el número total de partículas que han circulado, y reexprese las eficacias.

El valor de N ya lo hemos obtenido antes. Sólo falta reescribirlo en términos de las eficacias.

$$N = \frac{(N_{12}+N_1)(N_{12}+N_2)}{N_{12}} = \frac{N_{12}}{\eta_1 \cdot \eta_2} \Rightarrow \text{véanse las expresiones anteriores de las eficacias.}$$

d) Combinando las señales de ambos detectores, ¿cuál es la eficacia global del sistema de detección?

Eficacia global del sistema de detección:

= probabilidad de que haya detección en al menos un detector $= p(D_1 \cup D_2)$

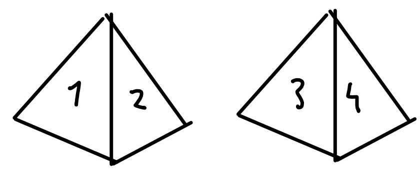
$$p(D_1 \cup D_2) = p(D_1) + p(D_2) - p(D_1 \cap D_2)$$ => sustituimos los valores:

$$p(D_1 \cup D_2) = \frac{N_{12}}{N_{12}+N_2} + \frac{N_{12}}{N_{12}+N_1} - \frac{N_{12}^2}{(N_{12}+N_2)(N_{12}+N_1)} = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1 \cdot \eta_2$$

$$= \frac{N_{12}(N_{12}+N_1) + N_{12}(N_{12}+N_2) - N_{12}^2}{(N_{12}+N_2)(N_{12}+N_1)} = \frac{N_{12}^2 + N_{12}N_1 + N_{12}N_2}{(N_{12}+N_2)(N_{12}+N_1)} =$$

$$= \frac{N_{12}(N_{12}+N_1+N_2)}{(N_{12}+N_2)(N_{12}+N_1)}$$

"Dados cuadrados"



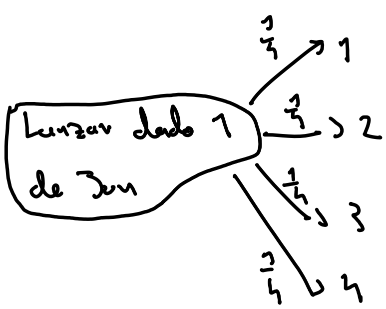
$\boxed{8}$ Jon y Ruth tienen cada uno dos dados planos de cuatro caras, en las que aparecen las cifras 1, 2, 3 y 4. Jon tira sus dados, y en cada tirada Ruth intenta adivinar la suma de las cifras de las dos caras resultantes, x, antes de que se produzca la tirada. Si acierta, Ruth gana x^2 euros. Si no acierta, pierde x euros. Calcule el valor esperado de las ganancias (o pérdidas) de Ruth según la estrategia que use para proponer la cifra:

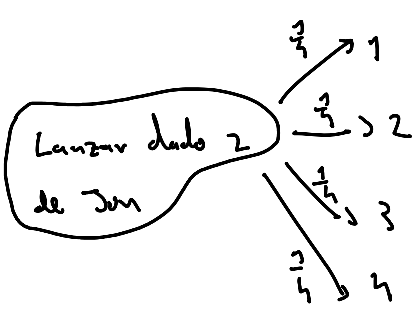
a) Escoge en cada ocasión un número natural entre 2 y 8 (ambos inclusive) con igual probabilidad.

b) Tira sus dos dados, y propone la cantidad que a ella le ha resultado.

c) Propone siempre el mismo número. ¿Qué número le recomendaría que use?

Experimento aleatorio: Jon tira dos "dados cuadrados". Los experimentos aleatorios son independientes





Sucesos	suma de las caras	Sucesos
(1,1) →	1+1 = 2	
(1,2) →	1+2 = 3	← (2,1)
(1,3) →	1+3 = 4	← (3,1)
(1,4) →	1+4 = 5	← (4,1)
(2,2) →	2+2 = 4	
(2,3) →	2+3 = 5	← (3,2)
(2,4) →	2+4 = 6	← (4,2)
(3,3) →	3+3 = 6	
(3,4) →	3+4 = 7	← (4,3)
(4,4) →	4+4 = 8	

Variable aleatoria = suma de las caras $\Rightarrow$ $x: (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$

Función de probabilidad

$$p(x) = \begin{cases} p(2) = p((1,1)) = p(\{1\}\cap\{1\}) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{16} \\ p(3) = p((1,2)\cup(2,1)) = p((1,2)) + p((2,1)) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8} \\ p(4) = p((1,3)\cup(3,1)\cup(2,2)) = \frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16} = \frac{3}{16} \\ p(5) = p((2,3)\cup(3,2)\cup(1,4)\cup(4,1)) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \\ p(6) = p((2,4)\cup(4,2)\cup(3,3)) = \frac{3}{16} \\ p(7) = p((3,4)\cup(4,3)) = \frac{1}{8} \\ p(8) = p((4,4)) = \frac{1}{16} \end{cases}$$

Comprobamos la condición de normalización $\Rightarrow$

$$p(2)+p(3)+p(4)+p(5)+p(6)+p(7)+p(8) = \frac{2}{16}+\frac{2}{8}+\frac{6}{16}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{2}{8}+\frac{3}{8}+\frac{2}{8} = 1$$

Media y varianza

$$\langle x\rangle = 2\cdot\frac{1}{16} + 3\cdot\frac{1}{8} + 4\cdot\frac{3}{16} + 5\cdot\frac{1}{4} + 6\cdot\frac{3}{16} + 7\cdot\frac{1}{8} + 8\cdot\frac{1}{16} = \frac{2+6+12+20+18+14+8}{16} = \frac{80}{16} = 5$$

$$\langle x^2\rangle = 4\cdot\frac{1}{16} + 9\cdot\frac{1}{8} + 16\cdot\frac{3}{16} + 25\cdot\frac{1}{4} + 36\cdot\frac{3}{16} + 49\cdot\frac{1}{8} + 64\cdot\frac{1}{16} = \frac{4+18+48+100+108+98+64}{16}$$

$$= \frac{440}{16} = \frac{220}{8} = \frac{110}{4} = \frac{55}{2} \Rightarrow V(x) = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \frac{55}{2} - 25 = \frac{5}{2}$$

• Experimento aleatorio: Ruth escoge un número y comprueba si ha acertado:

Si A es el suceso "Ruth acierta" entonces se tiene que la cantidad que hay que promediar para obtener el valor esperado de las ganancias es

$$x^2 p(A/x) - x(1 - p(A/x))$$

Por tanto tenemos que calcular para cada caso $G = \sum_{x=2}^{8}\left[x^2 p(A/x) - x(1-p(A/x))\right]p(x)$

a) En este caso $p(A/x) = \frac{1}{7}$

$$G = \sum_{x=2}^{8}\left[x^2\frac{1}{7} - x\frac{6}{7}\right]p(x) = \frac{1}{7}\sum_{x=2}^{8} x^2 p(x) - \frac{6}{7}\sum_{x=2}^{8} x\, p(x) = \frac{1}{7}\langle x^2\rangle - \frac{6}{7}\langle x\rangle =$$

$$= \frac{1}{7}\left(\frac{55}{2} - 6\cdot 5\right) = \frac{1}{7}\left(\frac{55}{2} - \frac{60}{2}\right) = -\frac{1}{7}\cdot\frac{5}{2} = -\frac{5}{14}$$

b) En este caso $p(A/x) = p(x)$

$$G = \sum_{x=2}^{8}(x^2+x)p^2(x) - \sum_{x=2}^{8} x\,p(x) = \sum_{x=2}^{8}(x^2+x)p^2(x) - \langle x\rangle = \frac{27}{64}$$

c) $p(A/x) = \delta_{x,r}$ r = nº propuesto por Ruth

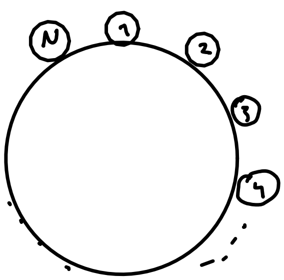
$$G = \sum_{x=2}^{8}\left[x^2\delta_{x,r} - x(1-\delta_{x,r})\right]p(x) = r^2p(r) - \sum_{x=2}^{8} x\,p(x) + r\,p(r) = (r+1)r\,p(r) - \langle x\rangle = (r+1)r\,p(r) - 5$$

Para cada valor de r tenemos que

$G(2) = -\frac{37}{8}$, $G(3) = -\frac{7}{2}$, $G(4) = -\frac{5}{4}$, $G(5) = \frac{5}{2}$, $G(6) = \frac{23}{8}$, $G(7) = 2$, $G(8) = -\frac{1}{2}$

$G(6)$ es el valor máximo así que debería escoger el número 6

$\boxed{9}$ Ainhoa e Iker quieren aparcar sus coches en un aparcamiento con N plazas, dispuestas en círculo. Si la probabilidad de escoger la plaza n es igual para ambos (salvo que esté ya ocupada), ¿cuál es la probabilidad de que aparquen en plazas contiguas?



$$p = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{\text{número de plazas contiguas}}{\text{número total de maneras de escoger 2 plazas}} =$$

$$= \frac{N-1}{C^N_2} = \frac{N-1}{\frac{N!}{2!(N-2)!}} = \frac{N-1}{\frac{N(N-1)}{2}} = \frac{2}{N}$$

$\boxed{10}$ Se escoge un chico al azar de un conjunto de familias con n hijos. Sabemos que el chico tiene al menos dos hermanas. Demuestre que la probabilidad de que tenga $k-1$ hermanos (no hermanas) es

$$\frac{(n-1)!}{(2^{n-1}-n)(k-1)!(n-k)!}$$

para $1 \leq k \leq n-2$, y 0 para cualquier otro valor de k, bajo la hipótesis de que en cada embarazo la probabilidad de niño o niña sea $1/2$ en cada caso (y cada embarazo sea independiente).

En la solución uso la letra j en vez de k

Experimentos aleatorios:

1º Nacimiento de n hijos (no sabemos si va a ser chico o chica).
n experimentos aleatorios de tipo éxito o fracaso $\Rightarrow$ hay que usar la binomial.

2º Escogemos una familia al azar

3º Escogemos un chico de esa familia y le preguntamos cuántas hermanas tiene (no sabemos de qué familia viene el chico).

Definimos los sucesos $A_j = \left\{ \begin{array}{l} \text{un chico viene de} \\ \text{una familia con } j-1 \\ \text{hermanos} \end{array} \right\}$ $B = \left\{ \begin{array}{l} \text{un chico viene} \\ \text{de una familia} \\ \text{que tiene al menos} \\ \text{2 hermanas} \end{array} \right\}$

Nos piden la probabilidad $p(A_j/B)$. Para hallarla usamos la fórmula de Bayes:

$$p(A_j/B) = \frac{p(A_j) \cdot p(B/A_j)}{p(B)} \Rightarrow$$

Si $n-2 < j \leq n-1$ entonces hay 0 ó 1 hermanas en la familia $\Rightarrow B = \emptyset \Rightarrow p(B/A_j) = 0 \Rightarrow p(A_j/B) = 0$

Suponemos entonces que $1 \leq j \leq n-2 \Rightarrow p(B/A_j) = 1$ (seguro que hay al menos 2 hermanas)

p es la distribución binomial $B(n-1, \frac{1}{2})$ porque sabemos que tenemos UN CHICO en la familia de n hijos e hijas

$p(A_j) =$ probabilidad de que el chico tenga $j-1$ hermanos $= p(x = j-1) = C^{n-1}_{j-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \binom{n-1}{j-1} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{(n-1)!}{2^{n-1}(j-1)!(n-j)!}$

La misma binomial que antes: $B(n-1, \frac{1}{2})$

$p(B) =$ Si hay al menos 2 hermanas el número de hermanos es mayor o igual que 1 $= p(X = j \geq 1) = \sum_{j=1}^{n-2} C_{j-1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

↳ nº de hermanos

Sustituimos en la fórmula de Bayes

Si $1 \leq j \leq n-2$ $\quad p(A_j/B) = \dfrac{C_{j-1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\sum_{k=1}^{n-2} C_{k-1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = \dfrac{\binom{n-1}{j-1}}{\sum_{k=1}^{n-2}\binom{n-1}{k-1}} = \dfrac{\binom{n-1}{j-1}}{\sum_{x=0}^{n-3}\binom{n-1}{x}} =$

$k-1 = x$

$$= \frac{\binom{n-1}{j-1}}{\sum_{x=0}^{n-1}\binom{n-1}{x} - \binom{n-1}{n-2} - \binom{n-1}{n-1}} = \frac{\binom{n-1}{j-1}}{2^{n-1} - n+1 - 1} = \frac{\binom{n-1}{j-1}}{2^{n-1} - n} = \frac{(n-1)!}{(2^{n-1}-n)(j-1)!\,(n-j)!}$$

recordar la fórmula $\sum_{x=0}^{N}\binom{N}{x} = 2^N$

$\boxed{11}$ Con una pistola se dispara de manera aleatoria a una pared a distancia l en el intervalo $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ (aleatorio en este caso significa con igual probabilidad para cada ángulo en el intervalo). Si denominanos y a la coordenada sobre la pared, tenemos

$$g(y)dy = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(y/l)^2}\frac{dy}{l}\,.$$

A esta distribución se le denomina de Cauchy. Parece sensato suponer que la media se encontrará en $y = 0$, por simetría. ¿Cuál será la desviación estándar? ¿Qué problema ha encontrado a la hora de calcularla?

Corte la distribución a una distancia L del máximo, a ambos lados del mismo. Calcule la nueva constante de normalización, y la desviación estándar.

$$p(y) = \frac{1}{\pi l\left(1 + \left(\frac{y}{l}\right)^2\right)} \Rightarrow \mu = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\,dy}{\pi l\left(1+\left(\frac{y}{l}\right)^2\right)} = 0$$

(integral de función impar)

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2\, dy}{\pi \ell \left[1 + \left(\frac{y}{\ell}\right)^2\right]} = \left[\frac{y}{\ell} = x\right] = \frac{1}{\pi \ell} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ell^2 x^2\, dx}{(1 + x^2)} = \frac{\ell}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right) dx = \text{integral divergente}$$

Nueva distribución

fórmula sin normalizar

$$p(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi \ell \left[1 + \left(\frac{y}{\ell}\right)^2\right]}, & |y| \leq L \\ 0, & |y| > L \end{cases}$$

Cálculo de la normalización

$$\int_{-L}^{L} \frac{1\, dy}{\pi \ell \left[1 + \left(\frac{y}{\ell}\right)^2\right]} = \frac{1}{\pi \ell} \int_{-\frac{L}{\ell}}^{\frac{L}{\ell}} \frac{\ell}{(1 + x^2)} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{L}{\ell}}^{\frac{L}{\ell}} \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \frac{1}{\pi} \operatorname{ArcTan} x \Big|_{-\frac{L}{\ell}}^{\frac{L}{\ell}}$$

$$= \frac{2}{\pi} \operatorname{ArcTan} \frac{L}{\ell} = N$$

Distribución normalizada

$$p(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{N \pi \ell \left[1 + \left(\frac{y}{\ell}\right)^2\right]}, & |y| \leq L \\ 0, & |y| > L \end{cases}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N \pi \ell} \int_{-L}^{L} \frac{y^2}{1 + \left(\frac{y}{\ell}\right)^2} dy = \left[\frac{y}{\ell} = x\right] = \frac{1}{N \pi} \int_{-\frac{L}{\ell}}^{\frac{L}{\ell}} \frac{\ell^2 x^2}{1 + x^2} dx = \frac{\ell^2}{\pi N} \int_{-\frac{L}{\ell}}^{\frac{L}{\ell}} \left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right) dx =$$

$$= \frac{\ell^2}{\pi N} \Big[\left(x - \operatorname{ArcTan} x\right)\Big]_{-\frac{L}{\ell}}^{\frac{L}{\ell}} = \frac{\ell^2}{N \pi} \left(\frac{2L}{\ell} - 2 \operatorname{ArcTan} \frac{L}{\ell}\right) =$$

$$= \frac{2\ell^2}{\pi} \left(\frac{L}{\ell} - \operatorname{ArcTan} \frac{L}{\ell}\right) \frac{\pi}{2} \frac{1}{\operatorname{ArcTan} \frac{L}{\ell}} = \ell^2 \left(\frac{L}{\ell \operatorname{ArcTan}\left(\frac{L}{\ell}\right)} - 1\right)$$

$\boxed{12}$ Con objeto de controlar si los alumnos hacen los problemas diariamente, el profesor les pone un examencillo. Consta este de 5 preguntas de tipo test, con opciones A, B y C. Las respuestas correctas valen un punto; las erróneas, por contra, −0,5. Por lo que se ve, los alumnos no hacen los ejercicios diarios, y contestan a voleo. ¿Cuál es la nota media?

Experimento aleatorio: Contestar una pregunta al azar. El experimento se repite 5 veces

Probabilidad de acertar una pregunta $= \frac{1}{3}$, Probabilidad de fallar una pregunta $= \frac{2}{3}$

Probabilidad de acertar x de las 5 preguntas $\quad p(x) = \binom{5}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{5-x} \Rightarrow$ distribución binomial $B(5, \frac{1}{3})$

Si aciertas x preguntas tienes una nota de $\quad x - \frac{(5-x)}{2}$ puntos $= \frac{3x}{2} - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(3x-5)$

entonces para obtener la nota media promediamos esta cantidad con la distribución binomial

$$\text{Nota media} = \sum_{x=0}^{5} \frac{1}{2}(3x-5)\binom{5}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{5-x} = 0$$

PROBLEMAS PREGUNTADOS EN TUTORÍAS

1. Una caja contiene diez fusibles. Ocho de ellos están tasados en 10 amperes (A) y los otros dos están tasados en 15 A. Se seleccionan dos fusibles aleatoriamente.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el primer fusible esté tasado en 15 A?

$$\Rightarrow p = \frac{\text{nº fusibles 15 A}}{\text{nº total fusibles}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo fusible esté tasado en 15 A, dado que el primer fusible esté tasado en 10 A?

$$\Rightarrow p = \frac{\text{nº fusibles 15 A}}{\text{nº fusibles que quedan tras sacar uno}} = \frac{2}{9}$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo fusible esté tasado en 15 A, dado que el primer fusible lo esté en 15 A?

$$p = \frac{\text{nº fusibles 15 A que quedan}}{\text{nº total de fusibles que quedan tras sacar 1}} = \frac{1}{9}$$

---

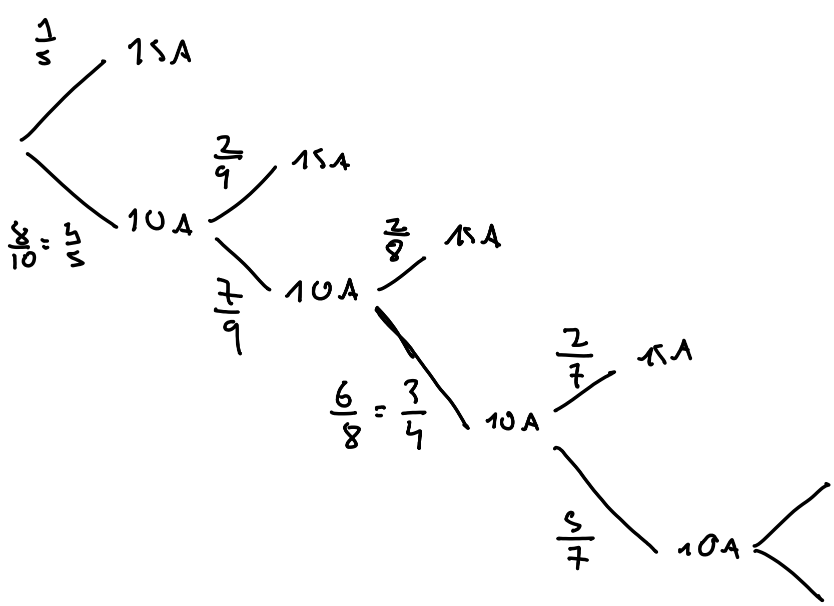
2. Con referencia al ejercicio 1, se seleccionan aleatoriamente fusibles de la caja, uno tras otro, hasta que se selecciona uno de 15 A.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que los primeros dos fusibles sean ambos de 10 A?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un total de dos fusibles sean elegidos de la caja?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que más de tres fusibles sean elegidos de la caja?

Representamos los experimentos aleatorios y las probabilidades en un diagrama:



El diagrama sigue pero no necesitamos más ramas para resolver el ejercicio.

a) $p(2 \text{ primers de } 10A) = p\left(\overline{1^{\circ} \text{ de } 15A \cup (2^{\circ} \text{ de } 10A \cap 3^{\circ} \text{ de } 15A)}\right) =$

$$= 1 - \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{2}{9}\right) = 1 - \left(\frac{1}{5} + \frac{8}{45}\right) = 1 - \frac{17}{45} = \frac{28}{45}$$

b) $p = \frac{4}{5} \times \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$

c) $p(\text{més de 3 fusibles}) = p\left(\overline{1 \text{ o dos o tres fusibles}}\right) = 1 - p(1 \text{ o dos o 3 fusibles}) =$

$$= 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15}$$

$$p(1 \text{ o } 2 \text{ o } 3 \text{ fusibles}) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{2}{9} + \frac{4}{5} \times \frac{7}{9} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{8}{45} + \frac{28}{180} = \frac{36 + 32 + 28}{180} = \frac{96}{180}$$

$$= \frac{32}{60} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15} \Rightarrow$$