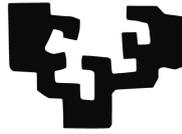


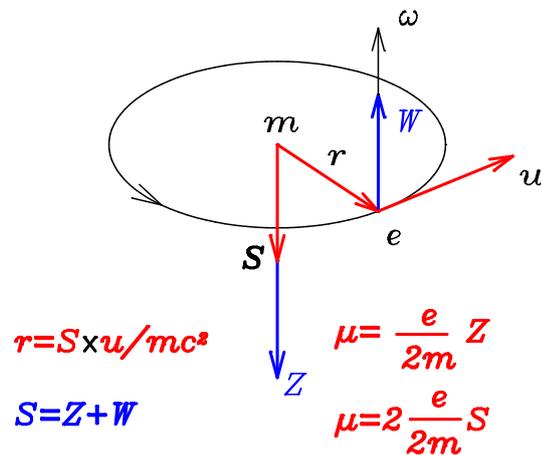
eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

Teoría cinemática de partículas elementales con espín



Martín Rivas

e-mail: martin.rivas@ehu.eus
<http://tp.lc.ehu.es/martin.htm>

Departamento de Física Teórica
e Historia de la Ciencia

UPV/EHU

Bilbao, Abril 2016

- If I can't picture it, I can't understand it.
You know, it would be sufficient to really understand the electron.

A. Einstein ¹

- Everything should be as simple as possible, but not simpler.

A. Einstein?, William of Ockham? ²

- If a spinning particle is not quite a point particle, nor a solid three dimensional top, what can it be? What is the structure which can appear under probing with electromagnetic fields as a point charge, yet as far as spin and wave properties are concerned exhibits a size of the order of the Compton wavelength?

A.O. Barut ³

- La figura de la portada representa el movimiento, a la velocidad de la luz, del centro de carga del electrón para el observador del centro de masa. Este movimiento relativo no es modificado por ninguna interacción. El centro de masa es siempre un punto distinto del centro de carga. El radio de este movimiento es $R = \hbar/2mc$, la mitad de la longitud de onda Compton, lo que sugiere el tamaño que menciona Barut. La frecuencia de este movimiento, cuando el centro de masa está en reposo, es $\omega = 2mc^2/\hbar$. Esta frecuencia, doble que la que postula De Broglie, disminuye cuando el centro de masa se desplaza. El reloj local va más despacio cuando está en movimiento. La materia elemental posee una estructura periódica, como las ondas, desde el punto de vista temporal. El espín total \mathbf{S} tiene dos partes: Una \mathbf{Z} debida a este movimiento relativo y otra \mathbf{W} en sentido contrario y debida a la rotación con velocidad angular ω , de un sistema cartesiano local ligado al centro de carga, y que no ha sido dibujado en la figura. Como el momento magnético del electrón es producido por el movimiento de la carga, entonces está relacionado con la parte \mathbf{Z} del espín, por lo que es esta doble estructura del espín la que produce el concepto de relación giromagnética $g = 2$.
- La física de partículas, al usar de forma exhaustiva el modelo de partícula puntual para describir experimentos hechos con partículas con espín, está simplificando en exceso el modelo, contrario al espíritu de la segunda de las citas anteriores. Hay que utilizar modelos de partículas con espín para analizar experimentos reales, porque en la naturaleza no existen partículas elementales sin espín.
En este orden de cosas, la Relatividad General como teoría de la gravitación, también hace una simplificación excesiva al asumir que el espacio-tiempo tiene una métrica Riemaniana, cuando debería mantener que la métrica es necesariamente Finsleriana, como analizaremos en la sección 1.6.

¹H. Dehmelt, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **86**, 8618–19 (1989).

²Ver la discusión en <http://quoteinvestigator.com/2011/05/13/einstein-simple/#more-2363>, sobre la autoría de esta frase.

³A.O. Barut, *Brief History and recent developments in electron theory and Quantumelectrodynamics*, in *The electron, New Theory and Experiment*, D. Hestenes and A. Weingartshofer (ed.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1991).

Índice general

Prefacio	1
Preámbulo	5
El centro de carga	5
Argumentos de sólido rígido	6
Argumentos de invariancia	8
Argumentos geométricos	9
Movimiento libre	10
Dos centros, dos espines	12
Predicciones	14
Apéndice: Partículas elementales (Modelo Estándar)	17
1. Formalismo Lagrangiano	19
1.1. Formulación de Newton	19
1.2. Principios Fundamentales	20
1.2.1. Principio de Relatividad Restringido	21
1.2.2. Principio Atómico	22
1.2.3. Principio Variacional	23
1.2.4. Principio de Cuantización	24
1.3. Formalismo Lagrangiano Generalizado	25
1.3.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange	26
1.3.2. Espacio Cinemático	27
1.3.3. Cambio del tiempo por otro parámetro de evolución	29
1.3.4. Homogeneidad de la Lagrangiana	29
1.3.5. Obtención de la Lagrangiana a partir de la función Acción	30
1.3.6. Simetría de un sistema dinámico	30
1.3.7. Funciones gauge de la Lagrangiana	31
1.4. Teorema de Noether Generalizado	33
1.5. Sistemas Elementales	38
1.5.1. Aplicación a grupos cinemáticos sencillos	40
1.6. Estructura métrica del espacio cinemático	41
1.6.1. Ejemplos de espacios de Finsler	44
1.6.2. Principio de Causalidad	48
1.7. Resumen del formalismo	49
1.8. Apéndice: Grupos de Lie de transformaciones	51
1.8.1. Operadores de Casimir	53
1.8.2. Espacios homogéneos de un grupo	53
1.8.3. Ejemplos de grupos continuos	54

2. Ejemplos de partículas con espín	55
PARTÍCULAS NO RELATIVISTAS	55
2.1. Partícula puntual no relativista	55
2.1.1. Interacción con el exterior	58
2.2. Partícula Galileana libre con espín	61
2.2.1. Constantes del movimiento Noetherianas	64
2.2.2. Espín respecto del centro de masa	67
2.2.3. Dinámica del espín	68
2.2.4. Transformación de diversos observables	68
2.2.5. Partícula Galileana con espín (anti)orbital	70
2.2.6. Interacción con un campo electromagnético externo	72
2.2.7. Interacción con un campo magnético uniforme externo	74
2.2.8. Partícula Galileana con orientación	83
PARTÍCULAS RELATIVISTAS	84
2.3. Partícula puntual relativista	84
2.4. Partículas relativistas con espín	86
2.5. Luxones	87
2.5.1. Partículas sin masa. (El fotón)	88
2.5.2. Partículas con masa. (el electrón)	91
2.5.3. Análisis de Dirac	96
2.6. La ecuación dinámica del electrón con espín	97
2.6.1. El electrón relativista con espín	98
2.6.2. El centro de masa	100
2.6.3. Interacción con un campo externo	102
2.7. Apéndice: Grupo de Rotaciones	104
2.7.1. Parametrización normal o canónica del grupo $SO(3)$	106
2.7.2. Ley de composición de las rotaciones	108
2.7.3. Cinemática de la rotación	110
2.7.4. Dinámica de la rotación	112
2.8. Apéndice: Grupo de Galileo	114
2.9. Apéndice: Grupo de Poincaré	118
2.9.1. Grupo de Lorentz	121
2.10. Apéndice: Estados de polarización de la luz	125
2.10.1. Superposición coherente	126
2.10.2. Superposición incoherente	128
2.10.3. Filtros	128
3. Cuantización de los modelos	131
3.1. Cuantización Feynman de los sistemas Lagrangianos	132
3.1.1. Transformación de la función de onda	134
3.1.2. Espacio de Hilbert de las amplitudes de probabilidad	135
3.1.3. Representación de los Observables	135
3.2. Partículas no relativistas con espín	139
3.2.1. Partículas no relativistas con espín. Bosones	139
3.2.2. Partículas no relativistas con espín. Fermiones	141
3.3. Apéndice: Espinores	143
3.3.1. Vectores unidad	143
3.3.2. Proyección del espín en los vectores unidad	144
3.3.3. Funciones de onda espinoriales	145
3.3.4. Representaciones espinoriales sobre $SU(2)$	147

3.3.5.	Representación matricial de los observables internos	151
3.3.6.	Teorema de Peter-Weyl para grupos compactos	152
3.3.7.	Espinores generales	153
3.4.	Resumen de Mecánica Clásica y Cuántica	157
4.	Partícula de Dirac	159
4.1.	Cuantización del modelo $u = c$	159
4.2.	Ecuación de Dirac	160
4.2.1.	Operador de Dirac	163
4.2.2.	Dinámica de los observables	164
4.2.3.	Conservación de la probabilidad	168
4.2.4.	Invariancia PCT	169
4.2.5.	Dos experimentos plausibles	171
4.2.6.	Quiralidad	172
4.3.	Álgebra de Dirac	174
4.4.	Simetrías espacio-temporales adicionales	175
4.4.1.	Análisis del grupo de simetrías ampliado	177
4.4.2.	Ampliación del espacio cinemático	178
4.4.3.	Relación con el modelo estándar	179
4.5.	Una Lagrangiana de interacción para dos partículas de Dirac	180
4.5.1.	Descripción sincrona	182
4.6.	Apéndice: El grupo $\mathcal{S} = \mathcal{W} \otimes SU(2)_T \otimes U(1)_Q$	182
5.	Estructura electromagnética del electrón	191
5.1.	Estructura electromagnética del electrón	191
5.1.1.	El campo promedio temporal de una partícula de Dirac	191
5.1.2.	Energía y momento angular electromagnético	201
6.	Algunas propiedades asociadas con el espín	205
6.1.	Relación giromagnética	205
6.2.	El reloj del electrón	207
6.2.1.	Midiendo el reloj del electrón	207
6.3.	Dipolo eléctrico instantáneo	211
6.4.	Efecto Túnel clásico	213
6.4.1.	Efecto túnel de polarización del espín	219
6.5.	Formación de pares de electrones ligados	220
6.6.	El grupo cinemático	226
	Referencias	227

Prefacio

Estas notas contienen materiales de naturaleza matemática y física del formalismo general que bajo el título de **Teoría Cinemática de Partículas Elementales** he venido trabajando en los últimos años. El adjetivo *cinemática* hace referencia a la íntima relación del formalismo con el grupo *cinemático* de transformaciones espacio-temporales asociado al Principio de Relatividad Restringido, que como toda teoría con un cierto carácter universal, debe necesariamente satisfacer.

Son una revisión de principios fundamentales, como el formalismo Lagrangiano que conduce a las ecuaciones de Euler-Lagrange, teorema de Noether, etc., pero buscando soluciones de las correspondientes ecuaciones diferenciales que pasen por los puntos inicial y final de la evolución. De ahí que las soluciones contendrán, desde el punto de vista clásico, información no de los datos de un único punto inicial, sino de los puntos extremos de la evolución. Esto nos produce un formalismo clásico más próximo, formalmente, a la dinámica cuántica, la cual se expresa también en términos de los estados inicial y final de la evolución. Veremos que es a través del método de cuantización de Feynman de Integrales de Caminos, donde las similitudes de ambos formalismos, clásico y cuántico, se complementan.

A las variables clásicas que definen los puntos extremos de la evolución en la formulación variacional, propongo denominarlas **variables cinemáticas**, y, veremos, que en el caso de las partículas elementales, necesariamente forman un espacio homogéneo del grupo cinemático. De esta forma, el grupo cinemático no solamente nos suministra las simetrías espacio-temporales del formalismo, sino que también suministra las variables clásicas de las que debe depender un sistema material para ser considerado como una partícula elemental. Es por lo tanto crucial desde un punto de vista teórico, precisar convenientemente cuál es este grupo cinemático. En estas notas trabajaremos principalmente con los grupos de Galileo y de Poincaré, dependientes de diez parámetros, que nos suministrarán respectivamente, modelos no relativistas y relativistas de partículas elementales con espín, pero el formalismo es lo suficientemente general para que funcione con cualquier otro grupo cinemático que consideremos. Veremos que el grupo cinemático de transformaciones espacio-temporales más general, que describa la cinemática de un punto en un espacio tridimensional depende como máximo de doce parámetros. Si la partícula elemental posee un centro de carga y un centro de masa como puntos diferentes, entonces necesariamente el grupo cinemático es el grupo de Weyl, que consiste en el grupo de Poincaré junto con las dilataciones espacio-temporales que conservan la velocidad de la luz.

Además, al expresar el formalismo variacional en términos de las variables cinemáticas, nos convierte el propio formalismo variacional en un formalismo geodésico sobre este espacio cinemático. El espacio cinemático es siempre un **espacio métrico Finsleriano**, lo que nos orienta sobre la posibilidad de que cuando establecemos una interacción sobre el sistema material, la nueva métrica tiene que seguir siendo Finsleriana. En este sentido, si analizamos la partícula puntual, cuyo espacio cinemático es el espacio-tiempo, cualquier interacción nos modifica la métrica Minkowskiana de la partícula libre y nos producirá, en general, una métrica Finsleriana y no pseudo-Riemanniana como postula la teoría general de la relatividad. En este sentido consideramos que la Relatividad General es una teoría demasiado restrictiva.

El formalismo es por lo tanto muy general, pero al mismo tiempo es muy restrictivo, porque una vez que quede inicialmente fijado el grupo cinemático, las variables clásicas que pueden definir los estados inicial y final de una partícula elemental en su formulación variacional, deben formar una variedad que sea un espacio homogéneo de este grupo. Este grupo cinemático es el objeto fundamental del formalismo y debe quedar fijado como un postulado inicial.

Para los grupos de Galileo y de Poincaré, vamos a ver que una partícula elemental con espín es un sistema material localizado y orientado, es decir, que se desplaza y rota. Por **localizado** queremos decir que para analizar su evolución nos basta con seguir el desplazamiento de un sólo punto \mathbf{r} , que representará la localización del centro de carga, y donde los diferentes campos externos estarán definidos a la hora de calcular sobre la partícula las fuerzas externas. Este punto \mathbf{r} también representará la localización del centro de masa \mathbf{q} para partículas sin espín, mientras que ambos puntos serán necesariamente distintos para objetos con espín, como el electrón. El centro de masa \mathbf{q} , quedará unívocamente determinado en términos de la posición \mathbf{r} del centro de carga. Es precisamente el movimiento de la carga alrededor del centro de masa el que nos dará una idea clásica del denominado *zitterbewegung*, o *movimiento tembloroso* del electrón, en palabras de Schroedinger, y también de la estructura dipolar eléctrica y magnética de la partícula.

Por **orientado** queremos significar que también deberemos describir los cambios de orientación de la partícula, además de la evolución de su centro de carga, mediante el análisis de la evolución y rotación de un sistema cartesiano local, con su origen en el centro de carga. Este sistema local de ejes no posee realidad física, por lo que podemos escogerlo de forma arbitraria en cualquier instante, lo que va a dar lugar a un grupo adicional de simetrías.

Si consideramos que el grupo cinemático es el grupo de Weyl, \mathcal{W} , entonces toda partícula elemental, además de ser un objeto localizable y orientable, debe ser un objeto **reescalable**. Es decir, contiene otro grado de libertad que da cuenta de un posible cambio de escala. Por lo tanto, el grupo de simetrías más general de la dinámica de una partícula, además del grupo cinemático que afecta a las variables espacio-temporales, debe incluir las transformaciones específicas de los otros grados de libertad, es decir rotaciones locales y cambios de escala local. Veremos que es posible encontrar una Lagrangiana que es invariante bajo el grupo $\mathcal{W} \otimes SU(2) \otimes U(1)$.

Estas notas pretenden ser autocontenidas por lo que hemos incluido al final de cada capítulo algunos apéndices matemáticos que contienen materiales que no suelen aparecer en libros de texto. Están organizadas de la siguiente forma: Comenzamos con un Preámbulo, que podría haberse escrito a finales del siglo XIX, en el que se da una definición plausible de centro de carga de una partícula elemental y se demuestra que este centro de carga se mueve siguiendo un movimiento helicoidal a la velocidad de la luz, de tal manera que este punto satisface, en general, ecuaciones diferenciales de cuarto orden. Efectivamente, la geometría nos muestra que la trayectoria más general de un punto en el espacio tridimensional, satisface un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de cuarto orden. Si pretendemos hacer una descripción Lagrangiana de esta partícula, la Lagrangiana debe depender, al menos, hasta la derivada segunda de la posición de este punto. Estamos en el marco de sistemas Lagrangianos generalizados con dependencia de derivadas de orden superior.

En vez de postular un modelo de partícula con un centro de carga como el mencionado anteriormente, comenzaremos en el primer capítulo con el análisis de los principios fundamentales que una teoría de partículas elementales debe satisfacer. Entre estos principios está un principio variacional por lo que dedicaremos este primer capítulo al análisis de los sistemas Lagrangianos generalizados, sobre todo para realzar el papel que van a jugar las variables de contorno, que denominaremos variables cinemáticas, en la definición de partícula elemental. En el capítulo dos se analizarán diferentes modelos Lagrangianos de partículas relativistas y no relativistas para mostrar cómo los métodos estándar del análisis de las simetrías nos conducen a la definición de los observables relevantes. En particular, prestaremos atención a la definición del espín, a

través de la invariancia de las ecuaciones dinámicas bajo el grupo de rotaciones. El espín, como cualquier otro observable, estará ligado con los diferentes grados de libertad y sus derivadas, y analizaremos su estructura matemática.

Los dos capítulos siguientes contienen la cuantización del formalismo y el análisis de algunos ejemplos relativistas y no relativistas. En particular, el cuarto capítulo se dedica al modelo relativista que satisface la ecuación de Dirac y que nos va a brindar la descripción pictórica de la cubierta. Prestaremos especial atención al análisis cuántico del álgebra de observables de Dirac y su relación con los correspondientes observables clásicos. Veremos una interpretación geométrica de la diferencia en la **quiralidad** entre materia y antimateria. Se podría decir, remedando a Asimov⁴, que el electrón es zurdo y el positrón es diestro, o bien, que la materia, es de izquierdas y solamente la antimateria es de derechas. Este capítulo acaba con el análisis de la **ampliación del grupo cinemático** de la partícula de Dirac, pasando del grupo de Poincaré a una extensión del grupo de Weyl, ya que este modelo posee un grupo de simetrías espacio-temporales más amplio que el grupo de Poincaré. Encontraremos una Lagrangiana de interacción invariante bajo este grupo, que nos describiría la interacción entre dos partículas de Dirac. Esta interacción presenta un comportamiento Coulombiano entre las dos cargas cuando el espín de las partículas desaparece, y muestra, entre otras cosas, que es posible la existencia de estados ligados metaestables entre electrones, cuando se cumplen ciertas condiciones.

En el capítulo 5 se analiza la estructura del campo electromagnético de una partícula de Dirac, que, claramente no es un campo estático para el observador del centro de masa, pero produce campo eléctrico y campo magnético. Veremos que el campo eléctrico promedio temporal a una vuelta de la carga tiene un comportamiento Coulombiano en cualquier dirección y su campo magnético es el campo de un dipolo, pero a diferencia de los campos de una partícula puntual, estos campos no se hacen infinitos en el origen.

Finalmente, en el último capítulo, se analizan algunos efectos físicos relacionados con el espín. El electrón, al tener una frecuencia interna, resulta ser un reloj. ¿Puede medirse de forma indirecta esta frecuencia? Se analizará la estructura de dipolo eléctrico del electrón, que en el caso cuántico nos lleva al término de Darwin del Hamiltoniano de Dirac. Veremos cómo la estructura del espín permite justificar, incluso a nivel clásico, el denominado efecto túnel, el cual sería responsable de la magnetorresistencia colosal de ciertos materiales. Estamos entrando en los albores de la manipulación de corrientes de electrones mediante el control de su espín, lo que en la tecnología actual se empieza a denominar como **espintrónica**. Para terminar con esta exposición, analizaremos la posibilidad de que dos electrones con sus espines paralelos, bajo ciertas condiciones de proximidad y de velocidad relativa, puedan formar un estado ligado de carga $2e$ y espín 1, por lo que tendríamos un mecanismo clásico de formación de bosones a temperatura finita, que podría ser la base de la formación de condensados de Bose-Einstein conducentes a la fase superconductor del material a esta temperatura.

Martín Rivas
 Bilbao, Abril 2016.

⁴Isaac Asimov, *El electrón es zurdo*, Alianza Editorial, 1980

Preámbulo: Movimiento helicoidal del centro de carga

En este capítulo preliminar vamos a dar tres clases diferentes de argumentos, para que supuestos el centro de masa y el centro de carga de una partícula elemental puntos diferentes, mostrar que el centro de carga se mueve en un movimiento helicoidal a la velocidad de la luz y su ecuación diferencial más general es de cuarto orden. Por una parte nos va a singularizar la formulación relativista frente a la no relativista, y el hecho de que las ecuaciones dinámicas de un punto no son ecuaciones diferenciales de segundo orden, como algunos libros de mecánica parecen sugerir, sino de cuarto orden como demuestra la geometría diferencial.

Esto significa que un formalismo Lagrangiano que describa partículas elementales deberá depender por lo menos hasta la aceleración del centro de carga, para poder obtener ecuaciones dinámicas de cuarto orden. Es por esto que comenzaremos repasando en el primer capítulo la forma en que un formalismo Lagrangiano generalizado produce los resultados generales de las ecuaciones de Euler-lagrange, análisis de simetrías y teorema de Noether, el formalismo canónico generalizado, y, sobre todo, el papel que van a jugar las variables cinemáticas.

Comenzaremos este Preámbulo con una definición física, y por lo tanto restringida, de un concepto de centro de carga de una partícula elemental.

El centro de carga

En mecánica está bien definido el concepto de centro de masa de una distribución de masas, de valores m_i , localizadas en los puntos correspondientes \mathbf{r}_i , de tal manera que admitiendo la tercera ley de Newton, el centro de masa se mueve bajo la acción de la suma de todas las fuerzas externas. La definición es

$$\mathbf{R}_{CM} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}$$

Desde el punto de vista electromagnético, si tenemos una distribución arbitraria de cargas y corrientes, el campo electromagnético que generan se puede expresar como el producido a partir de un punto concreto, pero arbitrario, en el que localizaríamos como fuentes de ese campo, la carga total y un número, en principio infinito, de los diferentes momentos multipolares eléctrico y magnético asociados a esa distribución y definidos adecuadamente con respecto a ese punto. Si cambiamos de punto, la carga total asociada al nuevo punto es la misma, pero no así los diferentes momentos multipolares. Podríamos intentar definir un centro de carga de forma similar a como definimos el centro de masa, pero existe una dificultad. La distribución de masa es siempre positiva, en tanto que la distribución de carga eléctrica contiene ambos signos y una definición del tipo anterior

$$\mathbf{R}_{CC} = \frac{\sum q_i \mathbf{r}_i}{\sum q_i}$$

podría resultar que el denominador $\sum q_i$ resultase cero. Se podría subsanar definiendo por separado el centro de cargas positivas por un lado $\mathbf{R}_{CC}^{(+)}$, y el centro de cargas negativas por

otro $\mathbf{R}_{CC}^{(-)}$, determinando los campos que generan por separado las diferentes distribuciones positivas y negativas. Como las ecuaciones de Maxwell son lineales, su superposición lineal nos dará el resultado, pero ahora tendríamos dos puntos, junto con los correspondientes momentos multipolares, como localización de las fuentes del campo.

Otra cuestión es calcular, dada una distribución de cargas y corrientes, la fuerza que actúa sobre ellas, debido a un campo electromagnético externo, que es generado por fuentes diferentes de las de esta distribución. ¿Se podría escribir esta fuerza en términos de los valores de la carga total y de los diferentes multipolos asociados a un cierto punto, juntamente con los valores que los campos externos y sus derivadas toman en ese punto?

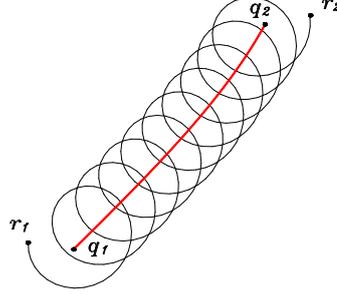
Supongamos para fijar ideas, que tenemos una distribución esférica de carga positiva. Si la distribución es estática en un cierto sistema de referencia inercial, el campo electrostático que genera es el campo Coulombiano de una carga puntual, la carga total de la distribución, localizada en el centro de simetría esférica. Si sobre esta distribución esférica actúa un campo eléctrico externo, y el sistema es un conductor, el campo modificará en general la propia distribución de las cargas al producir movimientos de éstas, apareciendo con respecto al centro de simetría anterior momentos multipolares que antes no existían. Si la distribución estuviera asociada con un aislante, este desplazamiento de cargas no se produciría. En este último caso, al no existir momentos multipolares, el valor del campo eléctrico externo en el centro de simetría por el valor total de la carga nos produce el valor de la fuerza total externa sobre esta distribución, si es que la variación del campo externo es suave. En Jackson,⁵ se demuestra que el valor medio de un campo electrostático definido en una región esférica en la que no existen cargas que generen ese campo, es el valor que el campo toma en el centro de la esfera.

No sabemos si una partícula elemental se comporta como un conductor o un aislante, si es o no un sólido rígido desde el punto de vista mecánico, pero en el apartado de principios fundamentales haremos la hipótesis de que es un sistema mecánico indeformable (Principio atómico). Si su distribución de cargas y corrientes posee una distribución esférica con respecto a cierto punto, de tal manera que tomando ese punto como referencia, el campo eléctrico que la partícula elemental produce fuera como si toda la carga estuviera concentrada en él, y el campo magnético dependiera del valor de la carga y de la velocidad de ese punto, entonces denominamos a ese punto el **centro de carga**. La supuesta indeformabilidad de una partícula elemental frente a un campo externo nos lleva a postular que la fuerza externa que actúa sobre un electrón es la fuerza de Lorentz definida en el centro de carga. Estamos haciendo la hipótesis de que desde el punto de vista electromagnético se comporta como una única carga puntual localizada en el centro de carga, sin ningún otro multipolo. Esta hipótesis también se hace en el modelo de partícula puntual, pero en ese modelo se admite que el punto representa también la localización del centro de masa, hipótesis que aquí no vamos a aceptar.

Argumentos de sólido rígido

Supongamos que una partícula elemental se pudiera describir como un sólido rígido. Sería por lo tanto un sistema de seis grados de libertad, de los que tres representarían la posición de un punto y los otros tres la orientación de un sistema cartesiano ligado a ese punto. Habitualmente, se toma el punto como el centro de masa \mathbf{q} , y la orientación como los ejes principales de inercia localizados alrededor de \mathbf{q} . El centro de masa satisface ecuaciones Newtonianas de segundo orden y se mueve como un punto de masa m , la masa total del sistema, bajo la acción de la fuerza total externa. El cambio de orientación se produce por el momento de las fuerzas externas. Un sólido rígido se desplaza y rota.

⁵J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley, NY 199, p. 148-149.



Si en vez de considerar la descripción del centro de masa consideramos otro punto cualquiera \mathbf{r} , éste seguirá, en general, una trayectoria helicoidal alrededor del centro de masa, del estilo de la dibujada en la figura.

Si una partícula elemental fuese un sólido rígido cargado, necesitaríamos conocer también su estructura electromagnética. Ésta se reduce al conocimiento del centro de carga y los diferentes multipolos. Si el campo que genera tiene simetría esférica, entonces nos quedamos solamente con el centro de carga, para calcular desde ahí el campo que la partícula crea y las fuerzas que los campos externos hacen sobre ella.

En general, dependiendo de cómo esté distribuida la masa y la carga, el centro de masa y el centro carga serán en general puntos diferentes, que es lo que vamos a suponer aquí. Por lo tanto, para determinar el movimiento del centro de masa necesito conocer en todo instante la localización del centro de carga para conocer las fuerzas externas en él definidas. Las ecuaciones de Newton del centro de masa se escriben

$$m \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} = e \left(\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) \right) = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, d\mathbf{r}/dt). \quad (1)$$

La fuerza electromagnética \mathbf{F} depende, en general, del campo eléctrico y magnético externos definidos en la posición del centro de carga \mathbf{r} y de la velocidad de este punto $d\mathbf{r}/dt$, que es la que aparece en el término magnético.

Para el movimiento relativo del centro de carga alrededor del centro de masa, si el sistema es indeformable, efectuará un movimiento circular, por ejemplo en el caso libre. Si definimos el vector unidad \mathbf{n} en la dirección de la aceleración del centro de carga $d^2\mathbf{r}/dt^2$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\omega^2 R} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2},$$

donde R es el radio del movimiento circular y ω su velocidad angular. De esta forma, conocido el centro de carga, podemos determinar el centro de masa mediante

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{r}(t) + \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}. \quad (2)$$

Es por lo tanto más simple, desde el punto de vista teórico, describir la evolución de un solo punto, el centro de carga \mathbf{r} , en vez del centro de masa \mathbf{q} , ya que éste queda determinado en función del anterior mediante (2) una vez que se conoce la trayectoria de \mathbf{r} .

Si eliminamos $d^2\mathbf{q}/dt^2$ entre las ecuaciones (1) y (2) obtendremos, en general, una ecuación diferencial de cuarto orden en la variable vectorial \mathbf{r} . Además, como la velocidad angular es perpendicular al plano que contiene a la velocidad y a la aceleración del punto \mathbf{r} ,

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{v^2} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad (3)$$

hemos resuelto también el problema de la rotación del sólido rígido cargado, habiendo analizado solamente la evolución del centro de carga.

Una definición de la velocidad angular como ésta (3) implica que la $u \neq 0$, es decir la velocidad del punto \mathbf{r} debe ser inalcanzable para todo observador inercial. De hecho, en el modelo relativista el centro de carga se mueve con $u = c$.

Las ecuaciones dinámicas de segundo orden de la partícula libre, para la posición del centro de masa \mathbf{q} y la orientación de los ejes principales de inercia $\boldsymbol{\alpha}$, quedan

$$\ddot{\mathbf{q}} = 0, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = 0,$$

han sido reemplazadas por las ecuaciones dinámicas de cuarto orden del centro de carga,

$$\frac{d^4 \mathbf{r}}{dt^4} + \omega^2 \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = 0.$$

De esta forma, un sólido rígido puede ser interpretado como un sistema de tres grados de libertad, la posición del centro de carga \mathbf{r} , que satisface ecuaciones diferenciales de cuarto orden, y por lo tanto descrito por una Lagrangiana dependiente de la aceleración.

Las ecuaciones dinámicas en interacción quedan:

$$\frac{m}{\omega^2} \frac{d^4 \mathbf{r}}{dt^4} + m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = e \left(\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) \right), \quad (4)$$

en términos de los tres grados de libertad \mathbf{r} que es donde están definidos los campos externos.

Una formulación Lagrangiana dependiente de la aceleración del punto \mathbf{r} , podría dar lugar a la obtención de estas ecuaciones dinámicas. Por ejemplo, la Lagrangiana no relativista

$$L = \frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 - \frac{m}{2\omega^2} \left(\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right)^2 - e\phi(t, \mathbf{r}) + e\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

nos reproduciría las anteriores ecuaciones dinámicas (4), donde el sólido rígido giraría a la velocidad constante ω , que aquí aparecería como una propiedad intrínseca e inmodificable.

Argumentos de invariancia

Consideremos que $\mathbf{r}(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ es la trayectoria que sigue un punto de un sistema mecánico para un cierto observador inercial arbitrario O . Cualquier otro observador inercial O' , está relacionado con O mediante una transformación g del grupo cinemático, de tal manera que las medidas relativas de espacio y tiempo vienen relacionadas por

$$t' = T(t, \mathbf{r}; g_1, \dots, g_\alpha), \quad \mathbf{r}' = \mathbf{R}(t, \mathbf{r}; g_1, \dots, g_\alpha),$$

donde las funciones T y \mathbf{R} definen las correspondientes leyes de transformación del grupo cinemático G , de parámetros (g_1, \dots, g_α) , entre ambos observadores. Por lo tanto, la descripción de esa trayectoria para el observador O' se obtiene de

$$t'(t) = T(t, \mathbf{r}(t); g_1, \dots, g_\alpha), \quad \mathbf{r}'(t) = \mathbf{R}(t, \mathbf{r}(t); g_1, \dots, g_\alpha), \quad \forall t \in [t_1, t_2].$$

que si logramos eliminar t como función de t' de la primera y lo sustituimos en la segunda, obtendremos

$$\mathbf{r}'(t') = \mathbf{r}'(t'; g_1, \dots, g_\alpha). \quad (5)$$

Como O' es un observador arbitrario, la ecuación (5) representa el conjunto completo o familia de trayectorias del punto para todos los observadores inerciales. Por eliminación de los α parámetros del grupo entre la función $\mathbf{r}'(t')$ y sus sucesivas derivadas temporales obtendremos la ecuación diferencial que satisface esta familia de trayectorias. Vamos a suponer que la trayectoria es completamente arbitraria y que los parámetros del grupo cinemático son esenciales, en el sentido de que no podemos obtener la misma familia de soluciones con un número menor de parámetros.

Esta ecuación diferencial es invariante bajo las transformaciones del grupo cinemático por construcción, ya que es independiente de todos los parámetros del grupo, y por lo tanto independiente de cualquier observador inercial. Como (5) es una expresión vectorial, cada vez que hacemos una derivada temporal establecemos tres nuevas ecuaciones. Si G es bien el grupo de Galileo o de Poincaré, como es un grupo dependiente de diez parámetros deberemos derivar hasta el orden cuatro para obtener suficientes ecuaciones para eliminar todos los parámetros. Por lo tanto el orden de la ecuación diferencial invariante depende del número de parámetros esenciales del grupo cinemático. Si el punto \mathbf{r} representa la posición del centro de carga de una partícula elemental, satisface, en general una ecuación diferencial de cuarto orden. Pero al mismo tiempo estos argumentos nos dicen que para obtener la ecuación diferencial invariante que satisface el centro de carga de una partícula elemental, nos basta con conocer su evolución para un observador particular, transformarla a cualquier otro observador inercial y seguir este procedimiento de eliminación de los parámetros. Utilizaremos este método en la sección 2.6 para obtener la ecuación diferencial que satisface el centro de carga del electrón con espín.

Argumentos geométricos

Como es bien conocido en geometría diferencial en el espacio tridimensional, las ecuaciones de Frenet-Serret (1847) de la evolución de un punto $\mathbf{r}(s)$, viene dadas por la variación, por unidad de longitud de arco, de los tres vectores unidad \mathbf{t} , tangente, \mathbf{n} , normal y \mathbf{b} binormal asociados al punto:

$$\dot{\mathbf{t}} = \kappa\mathbf{n}, \quad \dot{\mathbf{n}} = -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}, \quad \dot{\mathbf{b}} = -\tau\mathbf{n}$$

donde κ es la curvatura y τ la torsión, y las derivadas se efectúan con respecto al elemento de longitud de arco s . El conocimiento de la curvatura $\kappa(s)$ y de la torsión $\tau(s)$, juntamente con los valores iniciales $\mathbf{r}(0)$, $\mathbf{t}(0)$, $\mathbf{n}(0)$ and $\mathbf{b}(0)$, determinan completamente la curva, puesto que estas ecuaciones son integrables. Si se define el vector $\boldsymbol{\omega} = \tau\mathbf{t} + \kappa\mathbf{b}$, conocido como vector de Darboux, las ecuaciones de Frenet-Serret se pueden reescribir

$$\dot{\mathbf{t}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{t}, \quad \dot{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}, \quad \dot{\mathbf{b}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b},$$

de tal manera que, en unidades de la longitud del arco, el vector de Darboux representa la velocidad angular instantánea del triedro local y referida a este mismo triedro.

Llamando $\mathbf{r}^{(k)} = d^k\mathbf{r}/ds^k$,

$$\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{t}, \quad \mathbf{r}^{(2)} = \dot{\mathbf{t}} = \kappa\mathbf{n}, \quad \mathbf{r}^{(3)} = \dot{\kappa}\mathbf{n} + \kappa(-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}),$$

podemos despejar entre estas tres ecuaciones los vectores unidad de la terna de Frenet-Serret en términos de las tres primeras derivadas del vector de posición

$$\mathbf{t} = \mathbf{r}^{(1)}, \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\kappa}\mathbf{r}^{(2)}, \quad \mathbf{b} = \frac{\kappa^2}{\tau}\mathbf{r}^{(1)} - \frac{\dot{\kappa}}{\kappa\tau}\mathbf{r}^{(2)} + \frac{1}{\kappa\tau}\mathbf{r}^{(3)}$$

De esta forma

$$\kappa = |\mathbf{r}^{(2)}|, \quad \tau = \frac{1}{\kappa^2}(\mathbf{r}^{(1)} \times \mathbf{r}^{(2)}) \cdot \mathbf{r}^{(3)}$$

y se expresan a su vez en términos de las tres primeras derivadas de la posición del punto.

Volviendo a derivar $\mathbf{r}^{(3)}$ y sustituyendo las expresiones de los vectores unidad, la ecuación diferencial más general de un punto en el espacio tridimensional es

$$\mathbf{r}^{(4)} - \left(\frac{2\dot{\kappa}}{\kappa} + \frac{\dot{\tau}}{\tau} \right) \mathbf{r}^{(3)} + \left(\kappa^2 + \tau^2 + \frac{\dot{\kappa}\dot{\tau}}{\kappa\tau} + \frac{2\dot{\kappa}^2 - \kappa\ddot{\kappa}}{\kappa^2} \right) \mathbf{r}^{(2)} + \kappa^2 \left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa} - \frac{\dot{\tau}}{\tau} \right) \mathbf{r}^{(1)} = 0, \quad (6)$$

donde todos los coeficientes se expresan a su vez en términos de las diferentes derivadas de la posición del punto hasta el orden 4.

Si una partícula elemental es un sistema localizado, y al menos la describimos por la evolución de un punto, éste, en general, deberá satisfacer una ecuación de cuarto orden.

Movimiento libre

Supongamos que este punto \mathbf{r} es el centro de carga de una partícula elemental. Este punto debe satisfacer en general una ecuación del tipo (6). La curvatura $\kappa(s)$ y la torsión $\tau(s)$ en cada momento s , dependerán de las fuerzas y pares externos que se ejercen sobre la partícula en ese momento. Supongamos ahora que la evolución es libre. Eso quiere decir que no es posible distinguir un instante de la evolución de cualquier otro. Como la anterior ecuación diferencial se expresa en términos del triedro local, esto significa que el desplazamiento del triedro, en la dirección del vector tangente \mathbf{t} , y la rotación del triedro, deben ser independientes del instante en el que lo analizamos, y fijado un observador inercial, deben ser independientes de su tiempo. Esto significa que se debe mover con velocidad de módulo constante y el vector de Darboux debe ser también constante. Si la velocidad es constante en módulo, el parámetro s y el tiempo t difieren en un factor multiplicativo. La curvatura y la torsión son constantes y la curva es, por lo tanto, una hélice. Para un observador inercial el triedro se desplaza con velocidad en valor absoluto constante y rota respecto de sí mismo con velocidad angular constante. Como $\dot{\kappa} = \dot{\tau} = 0$, lo que es constante para el observador inercial es $ds/dt = u$ y el valor $\omega^2 = \kappa^2 + \tau^2$ y la ecuación diferencial se puede factorizar en la forma

$$\mathbf{r}^{(4)} + (\kappa^2 + \tau^2) \mathbf{r}^{(2)} = \frac{d^2}{ds^2} \left(\mathbf{r}^{(2)} + \omega^2 \mathbf{r} \right) = 0.$$

El término entre paréntesis va definir el centro de la hélice \mathbf{q} , mediante

$$\mathbf{q} = \mathbf{r} + \frac{1}{\omega^2} \mathbf{r}^{(2)}, \quad \frac{d^2 \mathbf{q}}{ds^2} = 0$$

y la ecuación anterior corresponde a un centro que se mueve de forma libre, en línea recta, y el punto \mathbf{r} que satisface

$$\mathbf{r}^{(2)} + \omega^2 (\mathbf{r} - \mathbf{q}) = 0,$$

efectúa un movimiento armónico de pulsación constante $\omega = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ alrededor de \mathbf{q} , quedando las anteriores ecuaciones acopladas en la forma

$$\mathbf{q}^{(2)} = 0, \quad \mathbf{r}^{(2)} + \omega^2 (\mathbf{r} - \mathbf{q}) = 0.$$

Esta descripción del movimiento libre debe ser válida para todo observador inercial.

Una primera conclusión es que la velocidad del centro de carga debe ser una velocidad inalcanzable para cualquier observador inercial. Como su movimiento es acelerado y de velocidad en módulo constante, no es posible encontrar un observador inercial que esté en un instante en reposo respecto de la carga, porque en el instante siguiente vería moverse la carga con una velocidad distinta de cero y por lo tanto contradictorio con el hecho de que mide un movimiento con velocidad de módulo constante. Vamos a ver que un análisis no relativista es incompatible con este movimiento helicoidal a velocidad constante, pero no así un análisis relativista.

En un análisis no relativista, la relación de la medida de las velocidades entre dos observadores inerciales O y O' , está dada por $\mathbf{u}' = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, donde \mathbf{v} es la velocidad constante de O medida por O' . Así,

$$u'^2 = u^2 + v^2 + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}.$$

Si \mathbf{u}' tiene que ser también constante para el observador O' , independientemente de los valores del vector \mathbf{v} , esto implica que $\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0$, y el vector \mathbf{u} debe ser constante. El centro de carga se debe mover necesariamente a lo largo de una recta con velocidad constante para todo observador inercial. De esta forma, la hélice general degenera en una línea recta y $\mathbf{q} = \mathbf{r}$, el centro de masa y el centro de carga son necesariamente el mismo punto. Esta es la descripción habitual de la partícula puntual o partícula sin espín.

En el caso relativista tenemos igualmente que

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u} + \gamma(v)\mathbf{v} + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)c^2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v}}{\gamma(1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}/c^2)}, \quad u'^2 = \frac{u^2 - c^2}{\gamma^2(1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}/c^2)^2} + c^2.$$

donde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, y tomando la derivada temporal de ambos miembros llegamos a $\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0$, independientemente de los valores de \mathbf{v} y por lo tanto \mathbf{u} tiene que ser un vector constante.

Sin embargo en este análisis relativista existe otra alternativa no contemplada en el caso no relativista. La posibilidad que la carga de una partícula elemental se esté moviendo a la velocidad de la luz c , y en ese caso, $u = u' = c$, para todo observador inercial. Esto significa que el centro de la hélice se mueve siempre con una velocidad $|d\mathbf{q}/dt| < c$, y, si representa el movimiento del centro de masa, la partícula es una partícula con masa. En una descripción variacional la Lagrangiana deberá depender hasta la aceleración del punto \mathbf{r} para obtener ecuaciones diferenciales de cuarto orden. El movimiento del centro de carga alrededor del centro de masa va a producir el momento magnético de la partícula.

Vemos que hay solo dos posibilidades para el movimiento libre del centro de carga de una partícula elemental: Una que la carga se mueva en línea recta a velocidad constante, la misma que la del centro de masa. El observador del centro de masa no ve que la partícula rote. La partícula no posee momento magnético ni espín. En la otra, la carga se mueve a lo largo de una hélice a la velocidad de la luz. El centro de la hélice representa al centro de masa y es siempre un punto diferente. Posee espín y momento magnético, pero el formalismo debe ser necesariamente relativista. Como todas las partículas elementales conocidas, quarks y leptones, tienen espín $1/2$, solamente nos queda esta segunda posibilidad. Esto vamos a ver que es consistente con la teoría de Dirac del electrón ya que el operador velocidad de Dirac posee como valores propios $\pm c$. Esto significa que la función de onda, o espinor de Dirac $\psi(t, \mathbf{r})$, se expresa en términos de la posición del centro de carga \mathbf{r} , que se mueve a la velocidad de la luz, y que es donde los campos externos están definidos.

En resumen, si una partícula elemental tiene dos centros diferentes, este análisis produce una solución tan restrictiva, que es única. En efecto:

1. Si describe una hélice, el movimiento de la carga es acelerado, de tal manera que si cambiamos de observador inercial, las velocidades no pueden sumarse como vectores, porque si el vector velocidad \mathbf{u} es distinto en dos instantes t_1 y t_2 , al añadirle un vector constante, no produce necesariamente dos vectores del mismo módulo en el nuevo referencial. La ley no relativista de adición de velocidades no se mantiene. Deberá existir otra ley de composición de velocidades que dé lugar, al añadir un vector constante al vector velocidad \mathbf{u} , otro vector velocidad de módulo constante, cualquiera que sea la orientación del vector velocidad del punto \mathbf{u} .

- Como el movimiento de la carga es acelerado, la velocidad de ésta es necesariamente inalcanzable para cualquier observador inercial. En efecto, si en el instante t el observador inercial se sitúa en reposo con respecto a la carga, en el instante posterior $t+dt$ la velocidad que mide no es cero, y por lo tanto contradictorio con el hecho de que la descripción que hace del movimiento es con velocidad de valor absoluto constante.

La física no relativista excluye la posibilidad de que una partícula elemental pudiera tener un centro de carga y un centro de masa como puntos diferentes, si admitimos que la descripción de su movimiento libre debe ser independiente del observador inercial.

La física relativista suministra una única solución. El centro de carga describe necesariamente una hélice a la velocidad de la luz.⁶

En este último caso, el centro de masa se mueve con el valor medio de la velocidad del centro de carga, la cual es la proyección en la dirección de \mathbf{p} de la velocidad \mathbf{u} . Si la partícula no es libre, la condición de que es una partícula elemental nos va a llevar, al admitir el principio atómico, que su estructura interna no es modificada por una interacción, con lo que el centro de carga se sigue moviendo con la velocidad de la luz.

Dos centros, dos espines

Se suele denominar espín al momento angular de una partícula elemental, pero un momento angular es una propiedad mecánica que está definida con respecto a un punto prefijado. Si una partícula elemental posee dos puntos característicos, podemos determinar el momento angular de la misma con respecto de ambos. Sea un sistema material como un electrón que viene caracterizado por la localización de su centro de masa (CM) \mathbf{q} , su centro de carga (CC) \mathbf{r} , y sea \mathbf{k} un punto del electrón, distinto de los dos anteriores, en un cierto sistema de referencia inercial con origen en el punto O (ver figura 1).

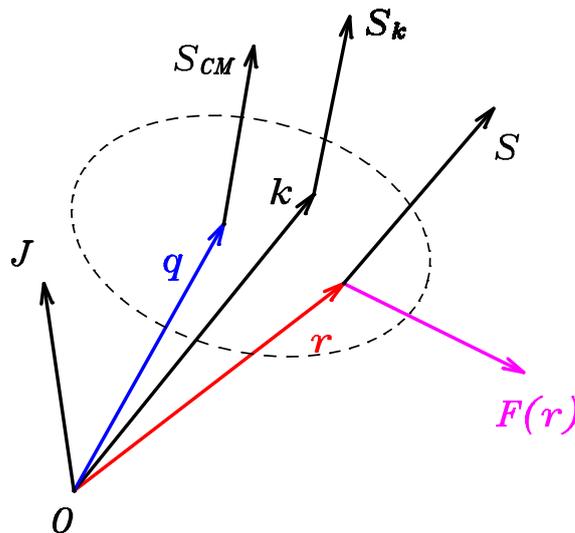


Figura 1: Diferentes momentos angulares \mathbf{S} , \mathbf{S}_{CM} , \mathbf{S}_k y \mathbf{J} del electrón definidos con respecto a diferentes puntos en un sistema de referencia inercial, con origen en el punto O . Se ha dibujado también, la fuerza electromagnética externa \mathbf{F} definida en el Centro de Carga. La línea de puntos pretende sugerir una cierta forma localizada, pero arbitraria, del electrón.

⁶H. Fizeau, realiza en 1851 un experimento que mide con precisión la velocidad de la luz.

Llamemos \mathbf{S} al momento angular de la partícula con respecto al centro de carga(CC) \mathbf{r} . Si es \mathbf{p} el momento lineal de la partícula, su momento angular \mathbf{S}_{CM} con respecto al centro de masa(CM) \mathbf{q} es

$$\mathbf{S}_{CM} = (\mathbf{r} - \mathbf{q}) \times \mathbf{p} + \mathbf{S}.$$

Llamemos $\mathbf{v} = d\mathbf{q}/dt$ y $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$, a las velocidades del CM y del CC, respectivamente. Sea \mathbf{S}_k el momento angular con respecto al punto \mathbf{k} . El momento angular total de la partícula con respecto al origen del sistema de referencia de cualquier observador inercial se puede escribir

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} + \mathbf{S}, \quad \text{o bien} \quad \mathbf{J} = \mathbf{q} \times \mathbf{p} + \mathbf{S}_{CM}, \quad \text{o bien} \quad \mathbf{J} = \mathbf{k} \times \mathbf{p} + \mathbf{S}_k.$$

Si la partícula es libre, \mathbf{p} se conserva y también \mathbf{J} . Como $d\mathbf{J}/dt = 0$, esto nos lleva a

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{p} \times \mathbf{u}, \quad \frac{d\mathbf{S}_{CM}}{dt} = 0,$$

ya que \mathbf{p} tiene la dirección de la \mathbf{v} , pero no la de \mathbf{u} .

El espín con respecto al centro de masa \mathbf{S}_{CM} es una magnitud conservada para la partícula libre, pero su espín con respecto al centro de carga no. Satisface una ecuación dinámica que implica que su variación temporal es ortogonal al momento lineal. De alguna manera está sugiriendo que \mathbf{S} precesa u oscila alrededor de \mathbf{p} . Además, para una partícula libre \mathbf{u} no puede ser un vector constante, ya que entonces el espín con respecto al centro de carga, crecería continuamente.

Sea \mathbf{F} la fuerza electromagnética externa aplicada en el centro de carga \mathbf{r} . Ahora \mathbf{J} no es una magnitud conservada, ni tampoco \mathbf{p} . Pero el momento de la fuerza con respecto al origen nos produce un par, tal que

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \quad \frac{d\mathbf{J}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$

lo que nos lleva a

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{p} \times \mathbf{u}, \quad \frac{d\mathbf{S}_{CM}}{dt} = (\mathbf{r} - \mathbf{q}) \times \mathbf{F}, \quad \frac{d\mathbf{S}_k}{dt} = \mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{k}}{dt} + (\mathbf{r} - \mathbf{k}) \times \mathbf{F}.$$

Podemos distinguir entre estos espines por su diferente comportamiento dinámico. La dinámica del espín no solamente nos da información sobre cómo evolucionan sino que también nos indican respecto de qué punto están definidos. Está claro que si $\mathbf{r} = \mathbf{q}$, el espín con respecto al centro de masa se debe conservar siempre. Recíprocamente, si \mathbf{S}_{CM} no es conservado eso implica que $\mathbf{r} \neq \mathbf{q}$ y por lo tanto la partícula elemental posee un CC y un CM que son puntos distintos, como aquí estamos suponiendo.

En la literatura encontramos ya ejemplos de los dos primeros espines. El observable espín de Bargmann, Michel y Telegdi ⁷, satisface una ecuación dinámica que es la generalización covariante sobre el espacio-tiempo, de la ecuación dinámica del \mathbf{S}_{CM} . Es lineal en los campos externos y se conserva para la partícula libre. Este simple argumento de su no conservación y el análisis anterior de la dinámica del espín es suficiente para llegar a la conclusión de que los dos centros son puntos distintos. El espín con respecto al centro de carga, satisface la misma ecuación dinámica que el operador espín de Dirac en el caso cuántico, como veremos a lo largo del curso.

En este curso vamos a encontrar una definición de partícula elemental que produce modelos relativistas y no relativistas de partículas con espín una de cuyas características es que son modelos en los que los centros de masa y de carga son puntos diferentes. Finalmente, solo aquel modelo relativista cuyo centro de carga se mueve a la velocidad de la luz, va a satisfacer la ecuación de Dirac al ser cuantizado.

⁷V. Bargmann, L. Michel y V.L. Telegdi, *Precession of the polarization of particles moving in a homogeneous electromagnetic field*, Phys. Rev. Lett. **2**, 435 (1959).

Predicciones

El formalismo que vamos a desarrollar en este curso no es completo. Sin embargo produce un conjunto de predicciones que son consistentes con los planteamientos del modelo estándar y otras que habría que verificar de forma experimental. Están desarrolladas a lo largo de las notas en las secciones y capítulos que se indican y que aquí, simplemente, las pasamos a enumerar:

1. El centro de carga y el centro de masa de una partícula elemental que satisface la ecuación de Dirac, son dos puntos distintos, separados por una distancia $R_0 = \hbar/2mc$. (Sec. **2.5.2**)
2. El centro de carga se mueve alrededor del centro de masa a la velocidad de la luz, en un movimiento circular de frecuencia $\nu_0 = 2mc^2/h$, o período $T_0 = 1/\nu_0 = h/2mc^2$, para el observador del centro de masa. Existe un reloj natural asociado a este movimiento interno del electrón. (Sec. **2.5.2**)
3. Para un observador que ve moverse el centro de masa del electrón con velocidad v , el reloj del electrón va más despacio, con un período mayor $T = \gamma(v)T_0$, donde $\gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. (Sec.**6.2.1**)
4. Para el observador del centro de masa, una partícula elemental posee además de carga, un momento magnético perpendicular al plano de la trayectoria del centro de carga y un momento dipolar eléctrico perpendicular al anterior. (Sec.**2.5.3**)
5. El momento magnético de la materia elemental es producido por este movimiento relativo del centro de carga, que no es modificado por las interacciones. (Sec.**2.5.3**)
6. Si admitimos que la materia elemental son partículas de Dirac, entonces desde el punto de vista cuántico su espín es necesariamente $S = \hbar/2$, independiente de la masa o de la carga de las mismas. Es decir, los leptones y quarks son fermiones de espín $S = \hbar/2$. (Cap.4)
7. En el espacio tridimensional, si el centro de carga de una partícula elemental se mueve a la velocidad de la luz, entonces el grupo cinemático de simetrías espacio-temporales debe ser un grupo de dimensión 11. Esta extensión del grupo de Poincaré puede ser el grupo de Weyl, que incluye además de rotaciones, traslaciones y transformaciones cinemáticas a velocidad constante, cambios de escala espacio-temporales que conservan la velocidad c . (Sec.**6.6**)
8. Si admitimos que el grupo de simetrías espacio-temporales es el grupo de Weyl, entonces toda partícula elemental tiene masa no nula y espín $\hbar/2$. En el modelo estándar de las partículas elementales, los leptones y quarks se postulan como objetos masivos de espín $\hbar/2$. (Sec. **4.4**)
9. Si la partícula no interacciona de forma fuerte (leptones), su carga eléctrica es única e independiente de su masa. Su valor sería la carga del electrón e , pero este valor no se predice, de momento. Los tres leptones electrón, muón y tau tienen distintas masas pero la misma carga eléctrica. (Sec. **5.1.2**)
10. Si la partícula interacciona de forma electromagnética y además de forma fuerte (quarks), entonces su carga eléctrica es necesariamente menor que el valor e . El formalismo no predice que sea una fracción $e/3$ o $2e/3$. (Sec. **5.1.2**)
11. La orientación relativa entre el espín y el momento magnético, de las partículas eléctricamente cargadas, es la misma para la partícula que para su antipartícula. Depende del signo de la carga de la partícula. Si consideramos que el electrón, de carga negativa, es

- la partícula, entonces electrones y positrones tienen su espín y momento magnético en la misma dirección. Esta orientación relativa no se ha medido experimentalmente. (Sec. 4.2.5)
12. El efecto túnel no es un efecto puramente cuántico. Se puede producir en el caso clásico y está ligado con la separación entre el centro de carga y el centro de masa. (Sec. 6.4)
 13. Dos electrones, desde el punto de vista clásico, pueden formar un estado ligado metaestable de carga $2e$ y de espín 1, es decir un bosón desde el punto de vista cuántico, si se cumplen ciertas condiciones de que sus espines sean paralelos, la velocidad relativa de sus centros de masa sea inferior $0.01c$ y las fases de sus movimientos relativos internos sean opuestas. Este estado ligado es estable frente a campos eléctricos externos pero no frente a campos magnéticos transversales al espín. (Sec. 6.5)
 14. En un conductor, en presencia de un campo magnético externo, si el número de electrones de conducción es suficiente, y la temperatura no es muy elevada, pueden producirse apareamientos de electrones, formándose un gas de bosones, por lo que los electrones apareados pueden estar en fase superconductor. Esto es posible desde un punto de vista clásico hasta una temperatura alta. Falta determinar hasta qué temperatura es posible desde un punto de vista cuántico. (Sec. 6.5)
 15. El campo electromagnético clásico generado por un electrón en reposo no es estático. El valor promedio temporal del campo eléctrico, a una vuelta del centro de carga, es Coulombiano en cualquier dirección a partir del centro de masa y se anula en el centro de masa. El valor promedio temporal del campo magnético, a una vuelta del centro de carga, es el de un momento dipolar magnético constante situado en el centro de masa. (Cap. 5)
 16. La relación giromagnética cuántica $g = 2$, está ligada con que el espín, desde el punto de vista clásico y cuántico tiene dos partes $\mathbf{S} = \mathbf{W} + \mathbf{Z}$, una ligada con la rotación de la partícula \mathbf{W} , que no produce momento magnético, y otra \mathbf{Z} ligada con el movimiento relativo entre el centro de masa y el centro de carga (Zitterbewegung). (Sec. 6.1)
 17. En el estado fundamental del átomo de Hidrógeno, el electrón está en un estado S, de momento angular orbital $L = 0$. Esto implica, desde el punto de vista clásico que el centro de masa del electrón se está moviendo en la dirección del centro de masa del protón. Esto es imposible para partículas puntuales. Sin embargo esto se puede justificar clásicamente al estar el centro de masa y el centro de carga separados, con lo que en el estado fundamental el centro de masa del electrón describirá una trayectoria rectilínea que pasa por el centro de masa del protón.
 18. Desde el punto de vista teórico clásico, la Lagrangiana que describe a una partícula elemental en interacción, se escribe como $\tilde{L} = \tilde{L}_0 + \tilde{L}_I$, donde \tilde{L}_0 es la Lagrangiana de la partícula libre, que describe sus propiedades mecánicas, y $\tilde{L}_I = -e\phi(t, \mathbf{r})\dot{t} + e\mathbf{A}(t, \mathbf{r})\dot{\mathbf{r}}$, es la Lagrangiana de la interacción, que predice solamente una interacción electromagnética. (Sec. 2.5.2)
 19. Si llamamos variables cinemáticas x de cualquier sistema mecánico a las variables de contorno en su formulación variacional, entonces la Lagrangiana de cualquier sistema mecánico $\tilde{L}(x, \dot{x})$ es siempre una función homogénea de grado 1 de las derivadas \dot{x} de las variables cinemáticas. (Sec. 1.3.4)
 20. El espacio cinemático X es siempre un espacio métrico Finsleriano, con lo que la formulación variacional es equivalente a un problema geodésico sobre X , cuya métrica depende

del tipo de interacción a que se somete al sistema. Para una partícula elemental, cualquier interacción modifica la métrica de su espacio cinemático. (Sec. **1.6**)

21. La partícula puntual es un posible modelo de partícula elemental en este formalismo, pero corresponde a un objeto material sin espín. El uso de este modelo debe ser descartado para el análisis del comportamiento de la materia elemental real, ya que no parecen existir partículas elementales sin espín. Todas las propiedades físicas asociadas a la participación del espín en la interacción, quedarían sin ser descritas. (Sec. **2.1**)
22. El espacio cinemático de la partícula puntual es el espacio de Minkowski. La gravedad, considerada como otra interacción, aplicada a la partícula puntual, modificaría la métrica Minkowskiana del espacio-tiempo y daría lugar, en general, a una métrica Finsleriana pero no Riemanniana como postula la Relatividad General. (Sec. **1.6**)
23. La gravedad, considerada como otra interacción, aplicada a la partícula elemental con espín, modificaría la métrica del espacio cinemático y produciría, en general, una métrica Finsleriana de esta variedad y no solo de la subvariedad espacio-temporal. (Sec. **1.6**)

Apéndice: Partículas elementales (Modelo Estándar)

Listamos a continuación las partículas elementales empezando por los bosones intermedios, de espín 1 (gluón g , fotón γ y los bosones masivos W^\pm y Z), los 6 leptones (electrón e , muón μ y tau τ y los correspondientes neutrinos) y los 6 quarks de espín 1/2. Se incluyen como números cuánticos, además de la masa y de la carga, el isospín, el espín, la paridad, el número leptónico L , bariónico B , la extrañeza S y el color. No se incluye información del hipotético gravitón que sería una partícula sin masa y de espín 2. Se ha añadido la información sobre el recién medido bosón de Higgs. El número leptónico es característico de cada uno de los tres leptones, es decir existen tres números leptónicos, L_e , L_μ y L_τ . Existen las antipartículas de todas ellas, de la misma masa y espín, pero con el resto de sus números cuánticos de signo contrario.

	masa· c^2	carga	Isospín	Espín	Par.	L	B	S	Color	Vida
g	0	0	0	1	–	0	0			
γ	$< 2 \times 10^{-16}$ eV	0	0, 1	1	–	0	0			
W	80.398 GeV	$\pm e$		1		0	0			
Z	91.187 GeV	0		1		0	0			
e	0.511 MeV	$-e$		1/2		1	0		0	estable
μ	105.65 MeV	$-e$		1/2		1	0		0	10^{-6} s
τ	1.777 GeV	$-e$		1/2		1	0		0	10^{-15} s
ν_e	< 0.5 eV	0		1/2		1	0		0	
ν_μ	< 0.17 MeV	0		1/2		1	0		0	
ν_τ	< 18.2 MeV	0		1/2		1	0		0	
u	1.5 ~ 3.3 MeV	$2e/3$	1/2	1/2	+	0	1/3	0	1	
d	3.5 ~ 6.0 MeV	$-e/3$	1/2	1/2	+	0	1/3	0	1	
c	1.27 GeV	$2e/3$	0	1/2	+	0	1/3	0	1	
s	104 MeV	$-e/3$	0	1/2	+	0	1/3	-1	1	
t	171.2 GeV	$2e/3$	0	1/2	+	0	1/3	0	1	
b	4.2 GeV	$-e/3$	0	1/2	+	0	1/3	0	1	
Higgs	125.3 GeV	0	0	0		0	0	0		

Intensidad de las Interacciones

Los quarks tienen carga de color con tres posibles valores, carga eléctrica y masa y pueden interactuar de las cuatro formas: fuerte, electromagnética, débil y gravitatoria. Los leptones no tienen color y no interactúan de forma fuerte, es decir, no intercambian gluones. Pueden interactuar de las otras tres maneras, salvo los neutrinos que no interactúan de forma electromagnética. El intercambio de gluones entre los quarks conlleva el cambio de su carga de color. La materia ordinaria, formada por agregados de quarks y leptones, no tiene color por lo que los quark y antiquark solo pueden formar estados ligados de color neutro. Es lo que se denomina **confinamiento**.

Si la intensidad de la interacción fuerte entre los quarks es 1 y de alcance del orden de 10^{-15} m, la intensidad de la interacción electromagnética, que intercambia fotones γ , es del orden de la constante de estructura fina $\alpha = 1/137$ y de alcance infinito. La fuerza débil es también de muy corto alcance, alrededor de 10^{-18} m debido al intercambio de partículas masivas W y Z ($m > 80$ GeV) y de intensidad 10^{-6} mientras que la gravitatoria, de alcance infinito es de una intensidad de 6×10^{-39} . De todas formas, esta intensidad depende de la energía de las partículas que interactúan. Lo que parece ocurrir es que cuanto mayor es la energía, las tres interacciones (excluida la gravitatoria) tienden a tener la misma intensidad y el comportamiento es como si las partículas fueran libres. Es lo que se denomina **libertad asintótica**. A altísima energía los quarks se comportan como partículas libres.

**Valores de distintos observables para el electrón
para diferentes velocidades**

v/c	v^2/c^2	$\gamma(v)$	p (MeV/c)	E (MeV)	T (K)
0	0	1	0	0.511003	0
0.0001	10^{-8}	1.	0.0000511003	0.511003	8.475
0.001	10^{-6}	1.	0.000511004	0.511004	847.54
0.01	10^{-4}	1.00005	0.00511029	0.511029	$8.47 \cdot 10^4$
0.1	0.01	1.00504	0.0513578	0.513578	$8.47 \cdot 10^6$
0.5	0.25	1.1547	0.295028	0.590056	$2.11 \cdot 10^8$
0.86603	0.750	2.00003	0.885103	1.02202	...
0.9	0.81	2.29416	1.05509	1.17232	...
0.99	0.9801	7.08881	3.58618	3.62241	...
0.999	0.99800	22.3663	11.4178	11.4292	...
0.9999	0.99980	70.7124	36.1307	36.1343	...
0.99999	0.99998	223.607	114.263	114.264	...
0.999995	0.999990	316.532	161.748	161.749	...
0.999999	0.999998	707.107	361.334	361.334	...
0.9999999	0.9999998	2236.07	1142.64	1142.64	...

Los observables que analizamos en la tabla son

$$\gamma(v) = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad p = \gamma(v)mv, \quad E = \gamma(v)mc^2.$$

$$\gamma(v) \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16} \frac{v^6}{c^6} + \dots$$

El factor γ alcanza el valor 2 para $v/c = 0.86603$. Obsérvese que hay que llegar a una velocidad $v/c = 0.99999999999987$ (doce nueves) con un factor $\gamma = 2 \cdot 10^6$, para que la energía del electrón alcance 1.00213 TeV. Los aceleradores actuales (Tevatrón (FermiLab), LHC (Cern)) alcanzan energías del orden de 4 a 8 TeV.

La última columna corresponde a la temperatura en grados Kelvin de un gas de electrones no relativista cuya velocidad media sea la indicada, y supuesto un sistema de siete grados de libertad. Los puntos suspensivos de algunos apartados implican que para esas velocidades no es aplicable el razonamiento de la mecánica estadística no relativista.

$$\frac{7}{2} \kappa T = \frac{1}{2} mv^2, \quad \kappa = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K (Constante de Boltzmann)}.$$

La primera línea en negrita, correspondiente a $v/c = 0.01$, representa la velocidad máxima a la que los centros de masa de dos electrones con sus espines paralelos puedan formar un estado ligado, como se analizará en la sección **6.5**.

La segunda línea en negrita corresponde al experimento, no de muy alta energía, que analizaremos en la sección **6.2** al analizar el reloj del electrón.

Capítulo 1

Formalismo Lagrangiano

1.1. Formulación de Newton

El primer planteamiento de una teoría de partículas elementales se lo debemos a Newton. Por definición, el sistema material más simple es el punto. Para Newton, la materia está formada por agregados de puntos de masa m , de valor arbitrario pero fijo. Cada partícula elemental puntual se mueve con una ley dinámica tal que

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}$$

siendo \mathbf{r} la localización del punto y \mathbf{F} la fuerza total externa que actúa sobre él.

Admitiendo que las fuerzas entre partículas satisfacen la tercera ley de Newton, entonces llegamos a que cualquier agregado material posee un punto característico, el centro de masa \mathbf{q} , definido mediante

$$\mathbf{q} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}, \quad m = \sum m_i$$

y que satisface

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = m \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2},$$

que se conoce como **teorema del centro de masa**: *El centro de masa de cualquier agregado material se comporta como una partícula puntual de masa la suma de todas las masas del sistema, sometido únicamente a la suma de todas las fuerzas externas.*

Newton postula que toda la materia se atrae con la ley de la gravitación universal, que satisface la tercera ley de Newton. Según esto, si intentamos separar un folio en dos partes, la fuerza que deberemos hacer sería, supuestas las dos partes separadas 10 cm y de 1 g de masa cada una,

$$F = G \frac{m^2}{d^2} = 6,672 \times 10^{-11} \times 0,001^2 / 0,1^2 = 6,672 \times 10^{-15} \text{ N},$$

muy inferior a la que tenemos que hacer. Es claro que las fuerzas de cohesión de la materia no son de naturaleza gravitatoria, por lo que entre las partículas elementales deben existir otro tipo de fuerzas. La teoría Newtoniana deja total libertad al tipo de fuerzas que puedan existir.

Si la partícula puntual posee una propiedad llamada carga, ésta está localizada en el mismo punto \mathbf{r} . Tenemos por lo tanto que toda la materia está construida a partir de puntos materiales de masas arbitrarias, y por supuesto, cargas arbitrarias, que además de interactuar de forma gravitatoria, se atraen, y a veces se repelen, con otro tipo de fuerza más intensa.

Si pudiéramos viajar a tiempos Newtonianos, ir a Cambridge, pedirle audiencia y decirle: Sir, en el futuro del que venimos se sabe que la materia a nivel elemental, además de masa posee otra propiedad inmodificable que es su espín. Es posible que Sir Isaac, lo pensara un rato

y modificara su segunda ley, para tener en cuenta también la variación del momento angular en términos de los pares externos. Lo importante es que en el momento en que entra en escena la mecánica cuántica en la década de 1920, se cuantizaría un formalismo diferente.

El formalismo Newtoniano es poco restrictivo y para las fuerzas \mathbf{F} entre partículas no establece ninguna condición, por lo que todo tipo de interacciones son permitidas. Es la teoría gauge la que limitará el tipo de interacciones en la formulación cuántica y el principio atómico en el caso clásico. Tampoco establece ningún criterio mediante el cual las cargas, masas y momentos angulares de las partículas elementales tengan los valores que tienen. Es la teoría cuántica la que predecirá estos valores. Sin embargo, hasta el momento, la teoría cuántica solo ha predicho los valores del espín de las partículas elementales dejando total libertad para los valores de las masas y cargas.

De todas formas, Newton ya era consciente de la posibilidad de fuerzas internas de corto y largo alcance, como lo pone de manifiesto en su disertación en el libro III de Opticks: ¹

Now the smallest particles of matter may cohere by strongest attractions, and compose bigger particles of weaker virtue; and many of these may cohere and compose bigger particles whose virtue is still weaker, and so on for diverse successions, until the progression ends in the biggest particles on which the operations in chemistry, and the colors of natural bodies depend, and which by cohering compose bodies of a sensible magnitude.

For we must learn from the phenomena of nature what bodies attract one another, and what are the laws and properties of the attraction, before we inquire the cause by which the attraction is perform'd. The attractions of gravity, magnetism, and electricity, reach to very sensible distances, and so have been observed by vulgar eyes, and there may be others which reach to so small distances as to escape observation.

1.2. Principios Fundamentales

Como de acuerdo con el modelo estándar todas las partículas elementales conocidas, quarks y leptones, juntamente con los bosones que median en sus interacciones son partículas con espín, y además no parecen existir partículas elementales sin espín, es razonable intentar obtener un formalismo para la descripción clásica del espín. El interés de una descripción clásica del espín es que puede suministrar modelos razonables cuyo comportamiento se aproxime a los resultados experimentales, mucho mejor que utilizando el modelo de partícula puntual sin espín. De todas formas no hay que olvidar que la materia a nivel elemental se comporta con más precisión de acuerdo con las leyes de la mecánica cuántica. Pero una descripción clásica menos simple, nos va a permitir desarrollar un formalismo cuántico más detallado, en términos de más variables que den cuenta de su estructura, y por lo tanto, se intuye, que la cuantización de modelos con espín será algo más detallada que la cuantización de partículas sin espín.

Feynman, en el primer capítulo de sus *Lectures on Physics* ², plantea que *If, in some cataclysm, all of scientific knowledge were to be destroyed, and only one sentence passed on to the next generations of creatures, what statement would contain the most information in the fewest words? I believe it is the atomic hypothesis (or the atomic fact or whatever you wish to call it) that all things are made of atoms—little particles that move around in perpetual motion, attracting each other when they are a little distance apart, but repelling upon being squeezed into one another.*

Si la hipótesis atómica parece ser un principio fundamental, la física tiene que explotar este hecho y convenientemente definido debe formar parte de los principios fundamentales de una

¹I. Newton, *Opticks, A treatise of the Reflections, Refractions, Inflections and Colours of Light*, Dover, NY 1952, p.394.

²Feynman RP, Leighton RB and Sands M 1968 *The Feynman Lectures on Physics*, (NY: Addison Wesley) Vol 1, Sec 1-2.

física de partículas, que es lo que haremos en seguida. Los libros de física, al tratar la idea del atomismo, se contentan con mencionar a Leucipo y a Demócrito de Abdera, como los defensores de la idea de que la materia es al final, un conjunto discreto de unidades indivisibles (los átomos). Demócrito añade, además, que estos objetos últimos son inmutables. Es difícil saber qué es lo que Demócrito quería decir con inmutabilidad hace 2500 años. Pero esta idea lo que contiene es que un sistema compuesto es modificable y una partícula elemental no. A una molécula la podremos excitar, rotar con una cierta velocidad angular, deformar, modificar su masa, pero a un electrón ni le podemos modificar su masa ni le podemos hacer girar con cualquier velocidad. A lo sumo lo que podemos es cambiar la orientación de su velocidad angular. La masa y el valor absoluto del espín de un electrón son propiedades inmutables. El principio atómico nos va a llevar a que el número y tipo de variables clásicas que caracterizan los estados de cualquier sistema material, no están restringidos, pero sí lo están para una partícula elemental. Es un principio tan restrictivo que nos va a conducir, entre otras cosas al llamado acoplamiento mínimo cuando analicemos la interacción de sistemas compuestos por partículas elementales y por lo tanto a restringir el tipo de interacciones permitidas.

El formalismo cinemático que vamos a desarrollar, aunque en sus orígenes se planteó para dar cuenta de la descripción clásica del espín, ha demostrado ser un método potente para la descripción de partículas elementales también desde el punto de vista cuántico, ya que suministra una definición muy precisa de partícula elemental que tiene como contrapartida cuando se cuantiza el formalismo, la definición de Wigner: Todos los sistemas elementales que se van a describir poseen la característica de que al cuantizarlos, su espacio de Hilbert de estados puros genera una representación proyectiva, unitaria e **irreducible** del grupo cinemático correspondiente. Es precisamente a través del formalismo de cuantización de Feynman que la descripción clásica y cuántica se complementan entre sí.

El formalismo que vamos a desarrollar se basa en los siguientes cuatro principios fundamentales:

- Principio de Relatividad Restringido,
- Principio Atómico,
- Principio Variacional,
- Principio de Cuantización.

1.2.1. Principio de Relatividad Restringido

El **Principio de Relatividad Restringido** establece que, **en ausencia de gravitación**, debe existir una clase de observadores equivalentes, que históricamente reciben el nombre de observadores inerciales, para los cuales las leyes de la física deben ser las mismas. Usando el mismo tipo de variables, las ecuaciones fundamentales se deben escribir de la misma forma en los diferentes sistemas de referencia equivalentes. Esta clase de observadores queda definida sabiendo cómo relacionan entre sí las medidas de acontecimientos espacio-temporales. Esta forma de transformar las variables temporal t y espacial \mathbf{r} de un mismo acontecimiento viene dada por un grupo de transformaciones, que recibe el nombre de **grupo cinemático** del formalismo.

Aquí trataremos principalmente con los grupos de Galileo y Poincaré pero en el capítulo 4 analizaremos una extensión del grupo de Poincaré, como el grupo cinemático más amplio de una partícula de Dirac. Además de las transformaciones del grupo de Poincaré, este grupo contiene dilataciones espacio-temporales y rotaciones locales.

Como ejemplo de este principio, el denominado formalismo *no relativista* admite que si el observador O mide un acontecimiento espacio-temporal dado por las medidas t y \mathbf{r} y el

observador O' mide t' y \mathbf{r}' del mismo acontecimiento, estos valores están relacionados por

$$t' = t + b, \quad \mathbf{r}' = R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{r} + \mathbf{v}t + \mathbf{a},$$

donde los diez números reales $(b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha})$ son fijos para esos dos observadores, y donde por $\boldsymbol{\alpha}$ queremos representar los tres parámetros que definen la orientación relativa entre los sistemas cartesianos de ambos observadores. Estas relaciones se dicen que son el grupo de Galileo de transformaciones del espacio-tiempo, que es por lo tanto, el grupo cinemático de un formalismo no relativista. Si en vez de estas transformaciones utilizamos las del grupo de Poincaré, analizadas en el apéndice al final del segundo capítulo, estaremos en un formalismo relativista.

El grupo cinemático asociado a este principio fundamental debe quedar prefijado, ya que las medidas de cualquier otro observable dependen exclusivamente de este grupo. Este principio no es solamente una declaración de *universalidad restringida* de las leyes de la física, es también el establecimiento de que las medidas relativas de cualquier magnitud física entre diferentes observadores inerciales, dependen de cómo se relacionan las medidas de acontecimientos espacio-temporales entre ellos. Por universalidad restringida queremos decir que las leyes de la física no son las mismas para todos los observadores, sino para una clase restringida de ellos, los denominados observadores inerciales a los que queda restringido el formalismo.

Si un observador está describiendo un fenómeno electromagnético y cambiamos a un sistema de referencia acelerado, en este sistema, además del fenómeno electromagnético, detectaremos la presencia de un campo de inercia, indistinguible de un campo gravitatorio, y por lo tanto este nuevo observador describe fenómenos no descritos por el otro. No son observadores equivalentes. Vamos a restringirnos a observadores que describen los mismos fenómenos, por lo que se trata de plantear un principio restringido.

Es el Principio de Relatividad General el que admite la invariancia general bajo cualquier cambio de observadores, bajo cualquier cambio de variables, pero si incluimos la gravitación entre las posibles interacciones, o bien, que no es posible distinguir físicamente entre un cambio a un sistema de referencia acelerado, de la presencia de un campo gravitatorio.

Admitir este Principio de Relatividad Restringido es fijar el correspondiente grupo cinemático en el arranque del formalismo, ya que, como veremos, fijados dos observadores cualesquiera, las medidas relativas de cualquier otra magnitud física dependen de este grupo. Y por otra parte, que entre las posibles interacciones que se puedan describir en este formalismo, no está incluida la gravedad, la cual vendrá descrita en un contexto diferente.

1.2.2. Principio Atómico

El **Principio Atómico** admite que la materia no puede ser dividida indefinidamente. La materia no es un continuo. Después de un número finito de pasos en la división de una porción de materia deberemos alcanzar un último objeto indivisible, una **partícula elemental**. Si una teoría física pretende describir la realidad material, debe contener en su formalismo la aceptación de que existen esos objetos elementales, y además, la posibilidad de distinguir cuándo un sistema mecánico es elemental o no lo es. La distinción entre una partícula elemental y cualquier otro objeto material finito, es que la partícula elemental, además de ser indivisible, no puede tener estados excitados y, salvo que sea destruida con su antipartícula, su estructura no puede ser modificada. Cuando tomamos un trozo de materia y tratamos de romperlo, lo primero que resulta es que se deforma y, si la energía utilizada es suficiente para romper el enlace, se parte en dos o más porciones. Si el objeto es una partícula elemental, como no puede dividirse, tampoco se deformará. No puede poseer estados excitados. De alguna manera, si la estructura de una partícula elemental no puede ser modificada, esto implica que los posibles estados en los que podemos encontrarla son simplemente modificaciones cinemáticas de uno cualquiera de ellos. Como en el proceso de aislar una partícula elemental necesitamos un número finito de

etapas, esto significa que en la descripción de la partícula elemental necesitamos un número finito de variables para describir sus estados. Si el estado de una partícula elemental cambia, siempre podremos encontrar algún otro observador inercial que la describa en el mismo estado que antes de la modificación, es decir con los mismos valores de todas las variables esenciales que caracterizan su estado. Un electrón sigue siendo un electrón aunque se le someta a una interacción. Esto va a implicar una restricción en el tipo de variables clásicas que podemos usar para describir sus estados en una descripción variacional.

Es esta distinción explícita, entre los sistemas materiales compuestos y las partículas elementales, formando parte del formalismo, y la aceptación de la existencia de las partículas elementales como un hecho destacado, lo que da contenido a este principio atómico, como principio fundamental.

1.2.3. Principio Variacional

El **Principio Variacional** reconoce que la magnitud acción durante la evolución de cualquier sistema mecánico, entre dos estados inicial y final prefijados, debe ser estacionaria. La acción se calcula en términos de una función Lagrangiana, la cual es una función explícita del tiempo t , de los grados de libertad independientes y de sus derivadas temporales hasta un cierto orden finito. Habitualmente, para sistemas materiales contruídos a partir de partículas sin espín, se restringe a que la Lagrangiana dependa solamente hasta las primeras derivadas temporales de los grados de libertad. Esto lleva a que las ecuaciones dinámicas de cualquier grado de libertad sean a lo sumo de segundo orden. Esto es una herencia de la mecánica Newtoniana basada en la construcción de la materia a partir de puntos materiales masivos. Pero como resulta que la ecuación diferencial más general de un punto en el espacio tridimensional es de cuarto orden, y, por otra parte, no sabemos todavía qué tipo de variables deberemos usar para describir una partícula con espín, ¿por qué restringir a que estas variables desconocidas satisfagan necesariamente ecuaciones de segundo orden?

De acuerdo con este principio, existirá una función Lagrangiana que dependerá del tiempo, de un número finito de grados de libertad y de sus derivadas temporales hasta un orden finito, para cualquier sistema mecánico formado a partir de un número finito de partículas elementales. Será el principio atómico el que limitará qué variables son las que caracterizan a una partícula elemental.

Este principio es tan fuerte que cuando lo apliquemos a sistemas materiales que verifican el principio atómico, vamos a llegar a la conclusión de que la única interacción entre partículas elementales, desde el punto de vista clásico, es la interacción electromagnética, tanto si las partículas elementales tienen o no tienen espín. La ecuación de la dinámica de una partícula elemental de carga e , queda reducida en su formulación variacional a

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}),$$

donde \mathbf{p} es el momento lineal de la partícula, \mathbf{u} la velocidad del centro de carga y \mathbf{E} y \mathbf{B} el campo electromagnético externo. Y esta ecuación de la dinámica va a depender del tipo de variables que describen a la partícula elemental y no del contexto, es decir que vale tanto en el caso relativista como en el no relativista. En este contexto clásico no hemos sido capaces de describir otro tipo de interacciones. La interacción débil y fuerte se obtienen en el contexto cuántico bajo la hipótesis de la invariancia gauge local.

Estos tres principios enunciados, completan el marco clásico del formalismo. Para su cuantización deberemos sustituir este último principio variacional por el siguiente cuarto principio.

1.2.4. Principio de Cuantización

Para la descripción cuántica de un sistema mecánico, vamos a sustituir el anterior principio variacional por el **Principio de Cuantización** en la forma propuesta por Feynman ³: Todos los caminos de la evolución de un sistema mecánico entre dos estados inicial y final fijos son igualmente probables. En mecánica clásica, fijados los puntos extremos de la evolución, se singulariza algún camino que los une, como aquél que hace mínima a la acción del sistema. En el caso cuántico, se relaja esta prescripción, y como no es experimentalmente posible determinar con precisión si una partícula sigue o no un determinado camino, hemos de admitir que todos los caminos son posibles. Para cada camino posible que una dichos puntos extremos, se define una amplitud de probabilidad, la cual es un número complejo de la misma magnitud para cada camino, y cuya fase es la acción del sistema a lo largo del camino, en unidades de la constante de Planck \hbar . La probabilidad de que siga uno de esos caminos se calcula como el valor absoluto al cuadrado de la correspondiente amplitud de probabilidad. Como todos los caminos alternativos son independientes, la **estadística interfiriente de Feynman** postula que la amplitud de probabilidad de un sistema que parte de un punto inicial y llega a otro final, fijos, es la suma de todas las amplitudes de probabilidad de los diferentes caminos alternativos.

Frente a la estadística convencional en la que las probabilidades de alternativas independientes se suman, y por lo tanto la probabilidad de un proceso en el que hay numerosas posibilidades es siempre mayor que cualquiera de ellas, aquí lo que se suman son las amplitudes de probabilidad, cuyo valor absoluto al cuadrado es la probabilidad final del proceso. Pero como lo que sumamos son números complejos, el valor absoluto del resultado puede incluso, ser menor que el valor absoluto de cada uno de los sumandos. De ahí el nombre de estadística interfiriente, ya que aunque para ir de a a b por algunos caminos pueda existir una probabilidad no nula, puede resultar que en el proceso global la probabilidad final sea cero, el resultado es un proceso de interferencia que anula toda probabilidad de que el mismo se produzca. Al pasar fotones por unas rendijas, la probabilidad de que lleguen a algún punto de la pantalla puede no ser nula, sin embargo cuando se analiza el proceso global, incluyendo todas las diferentes alternativas, existen puntos a los que no llega ningún fotón. La amplitud de probabilidad alrededor de ese punto es cero. Se ha producido una interferencia.

Si en el proceso de ir de a a b , efectuamos la suma de las correspondientes amplitudes de probabilidad sobre diferentes puntos iniciales, lo que obtenemos es la amplitud de probabilidad de encontrar nuestro sistema en un cierto punto, a partir de una preparación concreta. Pero esto es lo que en la mecánica cuántica convencional denominamos la función de onda. Por lo tanto, esta amplitud de probabilidad debe ser una función compleja, de cuadrado integrable y de norma unidad, ya que sumadas las probabilidades para todos los posibles puntos finales, esta probabilidad debe ser 1. Las diferentes funciones de onda, alrededor de cada punto, representan las diferentes formas de preparar o de llegar al mismo, partiendo de condiciones iniciales y caminos diferentes.

Pero lo importante de esta forma de proceder, es que la función de onda va a ser una función de cuadrado integrable de precisamente las variables que definen los puntos extremos de la formulación variacional, las que vamos a denominar **variables cinemáticas**.

El método de integrales de caminos de Feynman parece haberse inspirado en un artículo de Dirac ⁴. En este artículo, Dirac apunta, al comparar el formalismo Lagrangiano con el formalismo canónico, que: *los dos formalismos están por supuesto íntimamente relacionados, pero hay razones para creer que el formalismo Lagrangiano es más fundamental*. Más adelante expresa que, *debemos considerar la Lagrangiana clásica no como una función de las coordenadas y ve-*

³R.P. Feynman and A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, MacGraw Hill, N.Y., (1965).

⁴P.A.M. Dirac, *The Lagrangian in quantum mechanics*, Phys. Zeitsch. der Sowjetunion, **3**, 64–72 (1933), ... *the two formulations are, of course, closely related, but there are reasons for believing that the Lagrangian one is more fundamental*.

locidades, sino como función de las coordenadas en los instantes consecutivos t y $t + dt$. Aquí, claramente, está sugiriendo el uso de las variables cinemáticas y el expresar la Lagrangiana en términos de las mismas.

En el Prefacio del libro de Feynman y Hibbs, se menciona que Feynman, en una conversación privada con un colega europeo, se da cuenta de que en ese trabajo, Dirac sugiere que la función de onda en el instante $t + \epsilon$ debe estar relacionada con la función de onda en el instante t , mediante

$$\psi(t + \epsilon) \sim e^{i\epsilon L/\hbar} \psi(t).$$

Lo que Feynman hace es postular que efectivamente la relación anterior es una identidad. O lo que es lo mismo, el término exponencial es el propagador de la dinámica. En el libro ⁵ se cita que el colega europeo fue Herbert Jehle, que visitó Princeton en 1941.

Vamos a construir un formalismo clásico basado en los tres primeros principios, y al final del formalismo vamos a ver que para describir una partícula de Dirac, no va a ser necesario postular ninguna Lagrangiana particular. Solamente va a ser importante el determinar cuáles son las variables que definen los puntos inicial y final del formalismo variacional, es decir, las variables cinemáticas. El teorema de Noether, las leyes de conservación y los invariantes del grupo cinemático serán suficientes para la descripción de la dinámica de una partícula elemental y de sus propiedades.

1.3. Formalismo Lagrangiano Generalizado

El formalismo Lagrangiano generalizado, dependiente de derivadas de orden superior, fue desarrollado por Ostrogradsky ⁶. El resultado es que si la Lagrangiana depende del tiempo t , de los n grados de libertad $q_i(t)$ y de sus primeras derivadas temporales $L(t, q_i, \dot{q}_i)$, las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

en cambio si la Lagrangiana depende hasta las derivadas de orden k de los grados de libertad, estas ecuaciones resultan ser

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i^{(1)}} \right) + \dots + (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i^{(k)}} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

donde el orden de derivación temporal, en vez de un punto, lo hemos escrito en forma de un superíndice entre paréntesis. Vamos a llegar a estas ecuaciones, como condición necesaria de que la solución haga a la acción mínima. Pero también es importante el resaltar, que en el formalismo variacional que nos lleva a estas ecuaciones (1.1), los extremos de la evolución, es decir las condiciones de contorno que hay que imponer a la solución particular, son fijos. Además de construir las ecuaciones de Euler-Lagrange, vamos a ver cuáles son estas variables independientes y esenciales que nos definen los estados inicial y final del formalismo, y que denominaremos **variables cinemáticas**. En particular el principio atómico nos limitará cuáles son estas variables para las partículas elementales.

Finalmente, analizaremos la estructura del espacio de las variables cinemáticas y veremos que para cualquier sistema mecánico es siempre un espacio métrico, pero no Riemanniano sino Finsleriano. De esta manera, si un mismo sistema mecánico caracterizado por un conjunto de variables cinemáticas, se analiza bajo dos interacciones diferentes, desde el punto de vista geométrico implica que la métrica del mismo espacio cinemático en las dos situaciones de interacción,

⁵L.M. Brown (editor), Feynman's thesis: A new approach to quantum theory, (World Scientific 2005)

⁶M. Ostrogradsky, *Mémoire sur les équations différentielles relatives au problème des isopérimètres*, Mem. Acad. St. Petersburg, **6**(4), 385-517 (1850).

es una métrica Finsleriana diferente. Así, la gravedad, se estudiará como una modificación de la métrica generada por los contenidos materiales de todos los objetos, incluido el propio sistema, pero sin exigir la invariancia frente a un grupo cinemático.

1.3.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Consideremos pues un sistema mecánico de n grados de libertad, caracterizado por una Lagrangiana que depende del tiempo t , de los n grados de libertad independientes $q_i(t)$, y de sus derivadas temporales hasta un orden finito k , y que las representamos por $q_i^{(k)}(t) = d^k q_i(t)/dt^k$. El **funcional acción** se define mediante:

$$\mathcal{A}[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_i(t), q_i^{(1)}(t), \dots, q_i^{(k)}(t)) dt, \quad (1.2)$$

donde $i = 1, \dots, n$. Para cada posible trayectoria $q_i(t)$ introducida en (1.2), nos suministra un número real, la acción sobre esa trayectoria.

Postulado: La trayectoria que va a seguir el sistema es aquél camino que pasando por los puntos extremos definidos en los instantes t_1 y t_2 , en los que fijamos los valores de las variables y sus derivadas $q_i^{(s)}(t_1)$ y $q_i^{(s)}(t_2)$, $i = 1, \dots, n$, $s = 0, 1, \dots, k - 1$, hasta el orden máximo $k - 1$, hace extremal al funcional acción (1.2), es decir el valor de la acción es máximo o mínimo.

Observar que necesitamos fijar en los extremos, además del valor del tiempo t unos valores particulares de los n grados de libertad q_i y de sus derivadas temporales hasta el orden $k - 1$, es decir, un orden inferior al máximo orden que el correspondiente grado de libertad aparece en la Lagrangiana. Aunque como condiciones de contorno fijamos valores de los grados de libertad y de sus derivadas, los valores que escogemos son totalmente independientes unos de otros, es decir, caracterizan de forma unívoca los estados inicial y final de la evolución.

Recíprocamente, podríamos decir que si conocemos el tipo de variables que definen los estados extremos, la Lagrangiana es una función explícita de estas variables, y de su siguiente derivada temporal.

Una vez que tenemos definido el funcional acción (1.2) para un determinado camino arbitrario $q_i(t)$, para analizar su variación, producimos una modificación infinitesimal del mismo $q_i(t)$, que lo escribimos $q_i'(t) = q_i(t) + \delta q_i(t)$ y de todas sus derivadas temporales manteniendo fijos los extremos de la evolución, es decir, que en t_1 y t_2 la modificación de las variables generalizadas y sus derivadas hasta el orden $k - 1$, se anulen, y por lo tanto, $\delta q_i^{(s)}(t_1) = \delta q_i^{(s)}(t_2) = 0$, para $i = 1, \dots, n$ y $s = 0, 1, \dots, k - 1$ (ver figura 1.1).

La variación de las diferentes derivadas de $q_i(t)$ viene dada por $q_i^{(s)}(t) \rightarrow q_i^{(s)}(t) + \delta q_i^{(s)}(t) = q_i^{(s)}(t) + d^s \delta q_i(t)/dt^s$, puesto que la modificación de la derivada de orden s es precisamente la derivada de orden s de la modificación de la función. Esto lleva a que el funcional acción sufre una modificación entre ambos caminos, $\delta \mathcal{A} = \mathcal{A}[q + \delta q] - \mathcal{A}[q]$, dada por:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A} &= \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_i^{(s)}(t) + \delta q_i^{(s)}(t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_i^{(s)}(t)) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial q_i^{(1)}} \delta q_i^{(1)} + \dots + \frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \delta q_i^{(k)} \right], \end{aligned} \quad (1.3)$$

después de desarrollar a orden más bajo la primera integral y restarle la segunda. El término

$$\frac{\partial L}{\partial q_i^{(1)}} \delta q_i^{(1)} = \frac{\partial L}{\partial q_i^{(1)}} \frac{d}{dt} \delta q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(1)}} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(1)}} \right) \delta q_i,$$

que integrando entre t_1 y t_2 , nos da:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_i^{(1)}} \delta q_i^{(1)} dt = \frac{\partial L}{\partial q_i^{(1)}} \delta q_i(t_2) - \frac{\partial L}{\partial q_i^{(1)}} \delta q_i(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(1)}} \right) \delta q_i dt$$

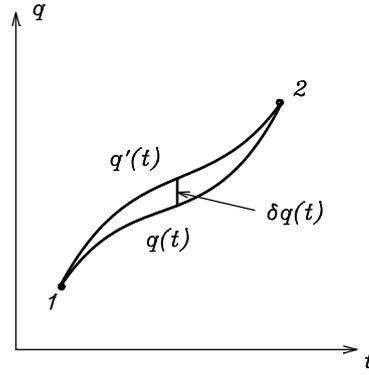


Figura 1.1: Caminos $q(t)$ y $q'(t)$ modificado pasando por los mismos puntos extremos 1 y 2

$$= - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(1)}} \right) \delta q_i dt,$$

ya que las variaciones $\delta q_i(t_1)$ y $\delta q_i(t_2)$, se anulan. Lo mismo para el siguiente término:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_i^{(2)}} \delta q_i^{(2)} &= \frac{\partial L}{\partial q_i^{(2)}} \frac{d}{dt} \delta q_i^{(1)} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(2)}} \delta q_i^{(1)} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(2)}} \right) \delta q_i^{(1)}, \\ \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_i^{(2)}} \delta q_i^{(2)} dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(2)}} \right) \delta q_i^{(1)} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(2)}} \right) \delta q_i dt, \end{aligned}$$

ya que δq_i y $\delta q_i^{(1)}$ se anulan en t_1 y t_2 , y finalmente para el último término

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \delta q_i^{(k)} dt = (-1)^k \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^k}{dt^k} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \right) \delta q_i dt,$$

de tal manera que cada término de (1.3) se escribe solamente en términos de las variaciones de los grados de libertad δq_i y no de sus derivadas de orden superior. Observar de nuevo que para llegar hasta aquí ha sido necesario suponer la anulación de las variaciones de todas las $\delta q_i^{(s)}$, para $s = 0, \dots, k-1$, en los instantes t_1 y t_2 . Recolectando todos los términos, obtenemos

$$\delta \mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(1)}} \right) + \dots + (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \right) \right] \delta q_i.$$

Si el funcional acción es extremal sobre el camino $q_i(t)$, su variación debe ser nula, $\delta \mathcal{A} = 0$. Como las modificaciones del camino δq_i son arbitrarias, todos los términos entre paréntesis cuadrados deben anularse de forma idéntica. Obtenemos así, un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(1)}} \right) + \dots + (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.4)$$

las denominadas ecuaciones de Euler-Lagrange.

1.3.2. Espacio Cinemático

En general, el sistema (1.4) es un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias de orden $2k$, y, por lo tanto, los teoremas de existencia y unicidad nos garantizan la existencia de una solución para las $2kn$ condiciones de contorno $q_i^{(s)}(t_1)$, $i = 1, \dots, n$ and $s = 0, 1, \dots, 2k-1$, en el instante inicial t_1 . Sin embargo, la formulación variacional ha sido planteada con la condición de que la solución pasara por los dos puntos extremos fijos. Esto no garantiza ni la existencia de

solución ni siquiera su unicidad. Sin embargo, supongamos que el sistema anterior (1.4) posee alguna solución, no necesariamente única, con los valores prefijados de los puntos extremos del problema variacional $q_i^{(s)}(t_1)$ y $q_i^{(s)}(t_2)$, $i = 1, \dots, n$ and $s = 0, 1, \dots, k - 1$, en los instantes t_1 y t_2 , respectivamente. Esto supone, de alguna manera, que las $2kn$ condiciones de contorno en el instante t_1 , como requieren los teoremas de existencia y unicidad, pueden ser expresadas, tal vez de forma no única, como funciones de las kn condiciones en cada uno de los extremos. De ahora en adelante, supondremos que los sistemas físicos que vamos a analizar poseen solución pasando por algunos puntos extremos prefijados. Resulta entonces que, una solución particular que pasa por los extremos se podrá expresar como una función del tiempo y de las variables en los puntos extremos

$$\tilde{q}_i(t) \equiv q_i(t; q_j^{(r)}(t_1), q_l^{(r)}(t_2)), \quad (1.5)$$

$i, j, l = 1, \dots, n$, $r = 0, 1, \dots, k - 1$, que al particularizar $t = t_1$ o $t = t_2$, nos produzca para la función y sus derivadas, los correspondientes valores en los extremos.

Definición: La **Función Acción** de un sistema, es el valor del funcional Acción (1.2) a lo largo del camino clásico (1.5) que satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.4) y que pasa por los puntos extremos: ⁷

$$\int_{t_1}^{t_2} L(t, \tilde{q}_i(t)) dt = A\left(t_1, q_i^{(r)}(t_1); t_2, q_i^{(r)}(t_2)\right). \quad (1.6)$$

Una vez que la integral temporal se calcula, el resultado será una función explícita de las $kn + 1$ variables en el instante inicial, $q_j^{(r)}(t_1)$, $r = 0, \dots, k - 1$, incluyendo el tiempo t_1 , y de las correspondientes $kn + 1$ variables en el instante final t_2 . Lo escribimos como

$$A\left(t_1, q_i^{(r)}(t_1); t_2, q_i^{(r)}(t_2)\right) \equiv A(x_1, x_2).$$

Y llegamos a la siguiente

Definición: Las **variables cinemáticas** del sistema son el tiempo t y los n grados de libertad q_i y sus derivadas hasta el orden $k - 1$. La variedad que generan X recibe el nombre de **espacio cinemático** del sistema.

El espacio cinemático de las Lagrangianas ordinarias es el espacio de configuración generado por las variables q_i , juntamente con la variable tiempo t . Se le suele denominar **espacio de configuración ampliado**. Pero para Lagrangianas generalizadas de orden superior incluye también las derivadas de los grados de libertad hasta un orden una unidad inferior al máximo orden del que aparece en la Lagrangiana. Por lo tanto, **La función acción de un sistema es una función de los valores de las variables cinemáticas en los extremos de la trayectoria**, x_1 y x_2 , es decir una función de los estados inicial y final. De ahora en adelante consideraremos sistemas para los cuales la función acción está definida y es una función continua y derivable de las variables cinemáticas en los extremos de la evolución. Claramente satisface la propiedad $A(x, x) = 0$.

⁷Observar que estamos usando la misma letra mayúscula $A(\)$ para la función acción que para el funcional acción $\mathcal{A}[\]$, aunque ésta en cursiva. La primera está seguida de paréntesis normales en los que se contienen las variables de las que depende, en tanto que en el funcional aparece seguido de paréntesis cuadrados, para realzar que no es una función de varias variables, sino un funcional que depende de caminos completos entre los puntos extremos.

1.3.3. Cambio del tiempo por otro parámetro de evolución

En la relatividad restringida, el tiempo es relativo a cada observador, por lo que usar el tiempo como variable de evolución sirve para cada observador particular, pero eso no produce un formalismo que sea independiente del parámetro de evolución. Por eso, el interés de una formulación variacional es construirla en términos de un parámetro invariante, el mismo para todos los observadores inerciales. Supongamos entonces, que la trayectoria del sistema se puede expresar en forma paramétrica, en términos de cierto parámetro de evolución arbitrario τ , $\{t(\tau), q_i(\tau)\}$, el mismo para todo observador inercial. El funcional (1.2) se puede reescribir en términos de las variables cinemáticas y sus derivadas en la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[t, q] &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} L \left(t(\tau), q_i(\tau), \frac{\dot{q}_i(\tau)}{\dot{t}(\tau)}, \dots, \frac{\dot{q}_i^{(k-1)}(\tau)}{\dot{t}(\tau)} \right) \dot{t}(\tau) d\tau \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{L}(x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau, \end{aligned} \quad (1.7)$$

donde ahora el punto significa tomar la derivada con respecto al parámetro de evolución τ , que sin pérdida de generalidad se puede escoger adimensional. Por lo tanto $\tilde{L} \equiv L(t(\tau), \dot{q}_i^{(s)}/\dot{t}(\tau)) \dot{t}(\tau)$ tiene dimensiones de acción.

1.3.4. Homogeneidad de la Lagrangiana

Podemos ver que el integrando \tilde{L} es una **función homogénea de primer grado como función de las derivadas con respecto a τ de las variables cinemáticas**. En efecto, cada derivada temporal $q_i^{(s)}(t)$ ha sido reemplazada por el cociente $\dot{q}_i^{(s-1)}(\tau)/\dot{t}(\tau)$ de dos derivadas con respecto a τ . Incluso la derivada de mayor orden k , $q_i^{(k)} = \dot{q}_i^{(k-1)}/\dot{t}$, se expresa en términos de las derivadas de las variables cinemáticas $q_i^{(k-1)}$ y t . Por lo tanto la función original L es una función homogénea de grado cero en las derivadas de las variables cinemáticas. Finalmente el término $\dot{t}(\tau)$, da lugar a que la nueva función \tilde{L} sea una función homogénea de primer grado. Si reemplazamos cada \dot{x}^i por $\lambda \dot{x}^i$, entonces $\tilde{L}(x(\tau), \lambda \dot{x}(\tau)) = \lambda \tilde{L}(x(\tau), \dot{x}(\tau))$. Por lo tanto, el teorema de Euler sobre funciones homogéneas implica, derivando ambos miembros con respecto a λ , llamando $y^j = \lambda \dot{x}^j$, y haciendo luego $\lambda = 1$

$$\tilde{L}(x(\tau), \dot{x}(\tau)) = \sum_j \left. \frac{\partial \tilde{L}}{\partial y^j} \dot{x}^j \right|_{\lambda=1} = \sum_j \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^j} \dot{x}^j = \sum_j F_j(x, \dot{x}) \dot{x}^j. \quad (1.8)$$

Esta posibilidad de expresar la Lagrangiana como función homogénea de primer grado de las derivadas ya fue considerada por Dirac en 1933⁸ pero como una consideración estética. Es esta homogeneidad la que nos permitirá transformar el formalismo variacional en un formalismo geodésico pero no sobre cualquier variedad, sino precisamente sobre el espacio cinemático X , y donde la métrica $g_{ij}(x, \dot{x})$ será un tensor dependiente de la dirección, y por lo tanto la trayectoria de la partícula es una geodésica, no en una variedad Riemanniana sino en un espacio de Finsler.⁹

La función \tilde{L} no es función explícita del parámetro de evolución τ y por lo tanto el problema variacional (1.7), es invariante con respecto a cualquier cambio arbitrario de parámetro de evolución τ .¹⁰

⁸ P.A.M. Dirac, *Proc. Cam. Phil. Soc.* **29**, 389 (1933): "a greater elegance is obtained", "a symmetrical treatment suitable for relativity."

⁹ G.S. Asanov, *Finsler geometry, Relativity and Gauge theories*, Reidel Pub. Co, Dordrecht (1985).

¹⁰ R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1, Interscience, N.Y. (1970); I.M. Gelfand, S.V. Fomin, *Calculus of Variations* Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1963).

En efecto, si cambiamos el parámetro de evolución $\tau = \tau(\theta)$, entonces $\dot{t}(\tau) = (dt/d\theta)(d\theta/d\tau)$ y $\dot{q}_i^{(s)}(\tau) = (dq_i^{(s)}(\theta)/d\theta)(d\theta/d\tau)$ de tal forma que los cocientes

$$\frac{\dot{q}_i^{(s)}(\tau)}{\dot{t}(\tau)} = \frac{(dq_i^{(s)}(\theta)/d\theta)\dot{\theta}(\tau)}{(dt(\theta)/d\theta)\dot{\theta}(\tau)} \equiv \frac{\dot{q}_i^{(s)}(\theta)}{\dot{t}(\theta)},$$

donde de nuevo el punto significa ahora derivación con respecto a θ . Resulta que (1.7) se puede poner como:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[t, q] &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(t(\theta), q_i(\theta), \dots, \dot{q}_i^{(k-1)}(\theta)/\dot{t}(\theta)) \frac{dt(\theta)}{d\theta} d\theta \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tilde{L}(x(\theta), \dot{x}(\theta)) d\theta. \end{aligned} \quad (1.9)$$

1.3.5. Obtención de la Lagrangiana a partir de la función Acción

El formalismo así planteado tiene la ventaja de que es independiente del parámetro de evolución, y si queremos volver a utilizar el tiempo concreto de un cierto observador, para hacer un análisis temporal, reemplazamos $\tau = t$ y por lo tanto $\dot{t} = 1$. A partir de ahora vamos a considerar aquellos sistemas para los que es posible una descripción paramétrica de la evolución y, utilizaremos el símbolo $\tilde{}$ sobre la Lagrangiana, la cual debe siempre ser entendida como escrita en términos de las variables cinemáticas y sus primeras derivadas con respecto a este parámetro arbitrario τ . De esta forma, distinguiremos las Lagrangianas \tilde{L} de las Lagrangianas L , sin el símbolo $\tilde{}$, que hacen el análisis de la evolución temporal del sistema material. El paso de \tilde{L} a L se hace tomando $t = \tau$, y $\dot{t} = 1$.

Si conocemos la función acción $A(x_1, x_2)$, como función de los puntos extremos de la evolución, podemos recuperar esta Lagrangiana $\tilde{L}(x, \dot{x})$ mediante un proceso de límite:

$$\tilde{L}(x, \dot{x}) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\partial A(x, y)}{\partial y^j} \dot{x}^j, \quad (1.10)$$

donde hemos usado el criterio habitual de suma sobre el índice mudo j , extendido al conjunto de todas las variables cinemáticas.

Si en (1.7) consideramos dos puntos muy próximos $x_1 \equiv x$ y $x_2 \equiv x + dx$, y hacemos un desarrollo de la función acción a primer orden $A(x, x + dx) = A(x, x + \dot{x}d\tau) = \tilde{L}(x, \dot{x})d\tau$ con la condición $A(x, x) = 0$, obtenemos (1.10).

1.3.6. Simetría de un sistema dinámico

Se define una simetría de un sistema dinámico, como **aquella transformación que deja invariantes las ecuaciones dinámicas**. Como la composición de simetrías, produce nuevas simetrías, y esta ley de composición es asociativa y existe la transformación unidad, resulta que el conjunto de todas las simetrías de un sistema dinámico forma un grupo, el **grupo de simetrías** del sistema. Si admitimos que se satisface el principio de Relatividad Restringido, entonces el grupo cinemático que define la relación entre observadores equivalentes, es un subgrupo del grupo general de simetrías.

Si una transformación deja invariante a la Lagrangiana de un sistema dinámico, entonces es una simetría. El recíproco no es cierto, es decir pueden existir simetrías que no dejen invariante a la Lagrangiana. Sin embargo, si bajo una transformación, la Lagrangiana cambia a otra que difiere de la anterior en una función que es una derivada total, con respecto al parámetro de evolución τ , de una función arbitraria de las variables cinemáticas, entonces esa transformación es también una simetría.

Las transformaciones de simetría pueden ser discretas o continuas. Una transformación es discreta si forma parte de un grupo discreto o finito, por ejemplo la transformación $t' = -t$,

representa una inversión temporal, es una transformación discreta y si es una simetría, decimos que el sistema dinámico es invariante por inversión temporal. Transformaciones continuas son aquellas que son transformaciones de un grupo continuo, como por ejemplo, traslaciones y rotaciones. En el caso de los grupos continuos, el análisis de las simetrías basta con hacerlo con las transformaciones infinitesimales, con el análisis del álgebra de Lie del grupo. En el apéndice 1.8, se hace una pequeña introducción a los grupos continuos, o grupos de Lie, para fijar la notación y el ver cómo se representan los generadores de las transformaciones infinitesimales.

1.3.7. Funciones gauge de la Lagrangiana

En la formulación variacional de la mecánica clásica

$$\mathcal{A}[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_i^{(s)}(t)) dt \equiv \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{L}(x, \dot{x}) d\tau, \quad (1.11)$$

$\mathcal{A}[q]$ es un funcional sobre los posibles caminos, es decir, toma en general valores diferentes para los diferentes caminos que unen cada par de puntos fijos x_1 y x_2 . Entonces, para que se produzcan en general, valores diferentes, es necesario que $\tilde{L}d\tau$ no sea una diferencial exacta. En caso contrario, si $Ldt = d\lambda$, entonces $\mathcal{A}[q] = \lambda(x_2) - \lambda(x_1)$ y el funcional no distingue con valores diferentes entre los diferentes caminos, y la función acción del sistema entre x_1 y x_2 , es esa única integral $A(x_1, x_2) = \lambda(x_2) - \lambda(x_1)$, que queda expresada en función de la función $\lambda(x)$, siendo por lo tanto, independiente del camino.

Si $\lambda(x)$ es una función real definida sobre el espacio cinemático X de un sistema Lagrangiano cuya función acción sea $A(x_1, x_2)$, entonces la función $A'(x_1, x_2) = A(x_1, x_2) + \lambda(x_2) - \lambda(x_1)$ es otra función acción equivalente a $A(x_1, x_2)$ en el sentido de que produce las mismas ecuaciones dinámicas. En efecto, por (1.10) da lugar a una Lagrangiana L' que difiere de L en una derivada total con respecto a τ .¹¹

Usando (1.10), obtenemos

$$\tilde{L}'(x, \dot{x}) = \tilde{L}(x, \dot{x}) + \frac{d\lambda(x)}{d\tau}, \quad (1.12)$$

y por lo tanto \tilde{L} y \tilde{L}' producen las mismas ecuaciones dinámicas y $A(x_1, x_2)$ y $A'(x_1, x_2)$ se dice que son funciones acción equivalentes.

Supongamos una Lagrangiana de un sistema de un grado de libertad $L(t, q, \dot{q})$ y la modificamos a $L' = L + d\lambda(t, q)/dt$. Las ecuaciones dinámicas a partir de L' son:

$$L' = L + \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial q} \dot{q}, \quad \frac{\partial L'}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial q \partial t} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial q^2} \dot{q},$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{q}}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial q} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial q^2} \dot{q},$$

por lo que

$$\frac{\partial L'}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)$$

y L' y L producen las mismas ecuaciones dinámicas. El resultado es general si L depende de más grados de libertad o de derivadas de orden superior. La única condición es que λ sea función de las variables cinemáticas.

Sea G un grupo continuo de transformaciones del espacio de configuración ampliado (t, q_i) , que puede extenderse a un grupo de transformaciones del espacio cinemático X . Sea $g \in G$ un elemento arbitrario de G y $x' = gx$, el transformado de x . Consideremos un sistema mecánico caracterizado por la función acción $A(x_1, x_2)$ que bajo la transformación g se cambia

¹¹ J.M. Levy-Leblond, *Comm. Math. Phys.* **12**, 64 (1969).

en $A(x'_1, x'_2)$. Si G es un grupo de simetrías del sistema, es decir, las ecuaciones dinámicas en términos de las variables x' son las mismas que en términos de las variables x , esto implica que $A(x'_1, x'_2)$ y $A(x_1, x_2)$ son necesariamente funciones acción equivalentes, y estarán relacionadas por:

$$A(gx_1, gx_2) = A(x_1, x_2) + \alpha(g; x_2) - \alpha(g; x_1). \quad (1.13)$$

La función α , será en general una función continua de g y de x . Esta función $\alpha(g; x)$ definida sobre $G \times X$ recibe el nombre de **función gauge** del grupo G para el espacio cinemático X . Como el grupo es un grupo continuo, satisface $\alpha(e; x) = 0$, siendo e el elemento neutro de G . Si la transformación g es infinitesimal, representada por sus coordenadas δg^σ , entonces $\alpha(\delta g; x) = \delta g^\sigma \lambda_\sigma(x)$ a primer orden en los parámetros del grupo. La transformación de la función acción toma la forma

$$A(\delta g x_1, \delta g x_2) = A(x_1, x_2) + \delta g^\sigma \lambda_\sigma(x_2) - \delta g^\sigma \lambda_\sigma(x_1),$$

es decir, en la forma que va a requerir el teorema de Noether de la sección siguiente, a la hora de determinar las magnitudes conservadas. En general, las funciones λ_σ para Lagrangianas que poseen funciones gauge se obtienen de

$$\lambda_\sigma(x) = \left. \frac{\partial \alpha(g; x)}{\partial g^\sigma} \right|_{g=0}. \quad (1.14)$$

Debido a la propiedad asociativa de la ley de composición de todo grupo, cualquier función gauge satisface la identidad

$$\alpha(g'; gx) + \alpha(g; x) - \alpha(g'g; x) = \xi(g', g), \quad (1.15)$$

donde la función ξ , definida sobre $G \times G$, es independiente de x y es un exponente del grupo G .

Se puede ver esto a partir de la mencionada ley asociativa. A partir de (1.13) tenemos:

$$A(g'gx_1, g'gx_2) = A(x_1, x_2) + \alpha(g'g; x_2) - \alpha(g'g; x_1), \quad (1.16)$$

y también

$$\begin{aligned} A(g'gx_1, g'gx_2) &= A(gx_1, gx_2) + \alpha(g'; gx_2) - \alpha(g'; gx_1) \\ &= A(x_1, x_2) + \alpha(g; x_2) - \alpha(g; x_1) + \alpha(g'; gx_2) - \alpha(g'; gx_1), \end{aligned}$$

y por lo tanto, por identificación con el anterior (1.16), recolectando los términos con el mismo argumento x , se llega a

$$\alpha(g'; gx_2) + \alpha(g; x_2) - \alpha(g'g; x_2) = \alpha(g'; gx_1) + \alpha(g; x_1) - \alpha(g'g; x_1),$$

y como x_1 y x_2 son dos puntos arbitrarios de X , esta expresión es (1.15) y define una función $\xi(g', g)$, independiente de x .

Levy-Leblond demuestra en la referencia previa que si X es un espacio homogéneo de G , es decir, si existe un subgrupo H de G tal que $X = G/H$, entonces, el exponente ξ es equivalente a cero sobre el subgrupo H , y las funciones gauge para espacios homogéneos resultan ser:

$$\alpha(g; x) = \xi(g, h_x), \quad (1.17)$$

done h_x es cualquier elemento del conjunto representado por $x \in G/H$.

Para el grupo de Poincaré \mathcal{P} todos sus exponentes son equivalentes a cero y las funciones gauge cuando X sea un espacio homogéneo de \mathcal{P} son idénticamente nulas. Las Lagrangianas de los sistemas relativistas cuyos espacios cinemáticos sean espacios homogéneos de \mathcal{P} , son invariantes.

Sin embargo, en la formulación no relativista, el grupo de Galileo \mathcal{G} posee exponentes no triviales, que vienen caracterizados por un parámetro m que se interpreta como la masa total

del sistema. Las Lagrangianas Galileanas para sistemas masivos no son en general invariantes bajo \mathcal{G} . En el formalismo cuántico, el espacio de Hilbert de los estados de un sistema masivo no relativista, es el espacio de una representación *projectiva* unitaria del grupo de Galileo, en vez de una verdadera representación unitaria.¹²

1.4. Teorema de Noether Generalizado

El análisis de Noether¹³ para sistemas Lagrangianos generalizados, demuestra que

Teorema: A cada grupo uniparamétrico de transformaciones continuas de las variables t y q_i , $i = 1, \dots, n$, que dejando las ecuaciones dinámicas invariantes, transforman la función acción del sistema, bajo una transformación infinitesimal δg , en la forma

$$A(\delta g x_1, \delta g x_2) = A(x_1, x_2) + \lambda(x_2)\delta g - \lambda(x_1)\delta g,$$

donde $\lambda(x)$ es una función definida sobre el espacio cinemático, hay asociado un observable clásico N , el cual es una constante del movimiento.

Este observable N se construye en función de $\lambda(x)$, de las derivadas de la Lagrangiana, y de la acción infinitesimal del grupo sobre las variables cinemáticas.

Supongamos que tenemos un grupo continuo uniparamétrico de transformaciones G , del espacio de configuración ampliado (t, q_i) , que puede extenderse a un grupo de transformaciones de todo el espacio cinemático X . Sea δg un elemento infinitesimal de G , y su acción sobre estas variables viene dada por:

$$t \rightarrow t' = t + \delta t = t + M(t, q)\delta g, \quad (1.18)$$

$$q_i(t) \rightarrow q'_i(t') = q_i(t) + \delta q_i(t) = q_i(t) + M_i^{(0)}(t, q)\delta g, \quad (1.19)$$

y su extensión al resto de variables cinemáticas por

$$q_i^{(1)}(t') = q_i^{(1)}(t) + \delta q_i^{(1)}(t) = q_i^{(1)}(t) + M_i^{(1)}(t, q, q^{(1)})\delta g, \quad (1.20)$$

y en general

$$q_i^{(s)}(t') = q_i^{(s)}(t) + \delta q_i^{(s)}(t) = q_i^{(s)}(t) + M_i^{(s)}(t, q, \dots, q^{(s)})\delta g, \quad s = 0, 1, \dots, k-1, \quad (1.21)$$

donde M y $M_i^{(0)}$ son únicamente funciones de q_i y de t mientras que las funciones $M_i^{(s)}$ con $s \geq 1$, se obtienen a partir de las derivadas de aquellas, y serán funciones del tiempo t y de las variables q_i y sus derivadas hasta el orden s .

Por ejemplo,

$$q_i^{(1)}(t') \equiv \frac{dq'_i(t')}{dt'} = \frac{d(q_i(t) + M_i^{(0)}\delta g)}{dt} \frac{dt}{dt'},$$

¹² ver ref.7 y también J.M. Levy-Leblond, *Galilei Group and Galilean Invariance*, en E.M. Loeb, *Group Theory and its applications*, Acad. Press, NY (1971), vol. 2, p. 221.



¹³ **Emmy Amalie Noether** Nace en Erlangen, Baviera, Alemania, el 23 de marzo de 1882 y fallece en Bryn Mawr, Pennsylvania, USA, el 14 de abril de 1935. Sus mayores contribuciones en matemáticas son en el campo del álgebra abstracta, anillos y módulos. Sin embargo su influencia en la física teórica es importante con el teorema que aquí se presenta y su teoría de invariantes, que condujo a Einstein a formular distintos conceptos en su teoría de la relatividad general.

pero a primer orden en δg

$$\frac{dt'}{dt} = 1 + \frac{dM(t, q)}{dt} \delta g, \quad \frac{dt}{dt'} \approx 1 - \frac{dM(t, q)}{dt} \delta g,$$

y por lo tanto

$$q_i^{(1)}(t') = q_i^{(1)}(t) + \left(\frac{dM_i^{(0)}(t, q)}{dt} - q_i^{(1)} \frac{dM(t, q)}{dt} \right) \delta g,$$

que al comparar con (1.20) obtenemos

$$M_i^{(1)}(t, q, q^{(1)}) = \frac{dM_i^{(0)}(t, q)}{dt} - q_i^{(1)} \frac{dM(t, q)}{dt},$$

donde las derivadas totales

$$\frac{dM(t, q)}{dt} = \frac{\partial M}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial M}{\partial q_j} q_j^{(1)}, \quad \frac{dM_i^{(0)}(t, q)}{dt} = \frac{\partial M_i^{(0)}}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial M_i^{(0)}}{\partial q_j} q_j^{(1)}.$$

Las demás $M_i^{(s)}$ para $s > 1$, se obtienen de la misma forma a partir de las funciones $M_i^{(s-1)}$.

Bajo δg el funcional acción del sistema cambia:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A}[q] &= \int_{t'_1}^{t'_2} L(t', q_i^{(s)}(t')) dt' - \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_i^{(s)}(t)) dt \\ &= \int_{t'_1}^{t'_2} L(t + \delta t, q_i^{(s)}(t) + \delta q_i^{(s)}(t)) dt' - \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_i^{(s)}(t)) dt. \end{aligned}$$

Si reemplazamos en la primera integral el intervalo de integración (t'_1, t'_2) por (t_1, t_2) sabiendo que el Jacobiano de t' en términos de t implica que el diferencial $dt' = (1 + d(\delta t)/dt) dt$, y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A}[q] &= \int_{t_1}^{t_2} L(t + \delta t, q_i^{(s)} + \delta q_i^{(s)}) \left(1 + \frac{d(\delta t)}{dt} \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_i^{(s)}) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(L \frac{d(\delta t)}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \frac{\partial L}{\partial q_i^{(s)}} \delta q_i^{(s)}(t) \right) dt, \end{aligned}$$

habiendo reemplazado la Lagrangiana $L(t + \delta t, q^{(s)} + \delta q^{(s)})$, por su desarrollo Taylor a primer orden en las variaciones δt y $\delta q^{(s)}$.

En la variación de $\delta q_i^{(s)}(t) = q_i^{(s)}(t') - q_i^{(s)}(t)$ está contenida una variación en la forma de la función $q_i^{(s)}(t)$, y una variación de su argumento t , (ver figura 1.2), el cual también es afectado por la transformación del grupo, y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \delta q_i^{(s)} &= q_i^{(s)}(t + \delta t) - q_i^{(s)}(t) = q_i^{(s)}(t) + (dq_i^{(s)}(t)/dt) \delta t \\ &= \bar{\delta} q_i^{(s)}(t) + q_i^{(s+1)}(t) \delta t, \end{aligned}$$

donde $\bar{\delta} q_i^{(s)}(t)$ es la variación en la forma de la función $q_i^{(s)}(t)$ en el instante t . Sabiendo que para la variación de forma a t constante

$$\bar{\delta} q_i^{(s)}(t) = d^s(\bar{\delta} q_i(t))/dt^s = d(\bar{\delta} q_i^{(s-1)}(t))/dt,$$

resulta que

$$\delta \mathcal{A}[q] = \int_{t_1}^{t_2} \left(L \frac{d(\delta t)}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \frac{\partial L}{\partial q_i^{(s)}} \bar{\delta} q_i^{(s)}(t) + \frac{\partial L}{\partial q_i^{(s)}} \frac{dq_i^{(s)}}{dt} \delta t \right) dt$$

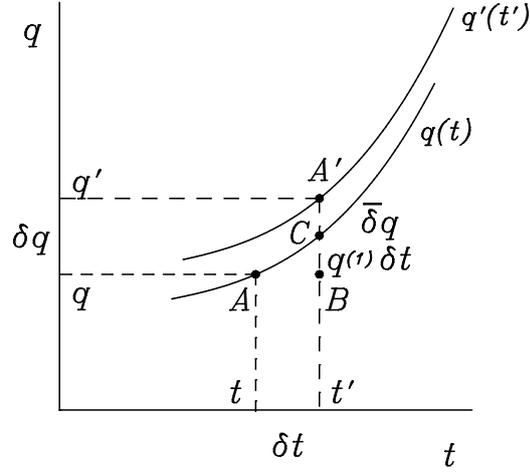


Figura 1.2: Transformación del punto A en el A' , y de la curva $q(t)$ en la $q'(t')$ bajo una transformación infinitesimal. La variación $\delta q = BA'$ es la suma de la parte $BC = q^{(1)}\delta t$ y la parte $CA' = \bar{\delta}q$, que es la variación a t constante de la función q , y que aquí la denominamos la variación en forma de la función.

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d(L\delta t)}{dt} + \frac{\partial L}{\partial q_i^{(s)}} \bar{\delta}q_i^{(s)}(t) \right) dt. \quad (1.22)$$

Si reemplazamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_i} \bar{\delta}q_i &= \frac{\partial L}{\partial q_i} \bar{\delta}q_i, \\ \frac{\partial L}{\partial q_i^{(1)}} \bar{\delta}q_i^{(1)} &= \frac{\partial L}{\partial q_i^{(1)}} \frac{d(\bar{\delta}q_i)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(1)}} \bar{\delta}q_i \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(1)}} \right) \bar{\delta}q_i, \\ \frac{\partial L}{\partial q_i^{(2)}} \bar{\delta}q_i^{(2)} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(2)}} \bar{\delta}q_i^{(1)} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(2)}} \right) \bar{\delta}q_i^{(1)} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(2)}} \bar{\delta}q_i^{(1)} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(2)}} \right) \bar{\delta}q_i \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(2)}} \right) \bar{\delta}q_i, \\ \frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \bar{\delta}q_i^{(k)} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \bar{\delta}q_i^{(k-1)} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \right) \bar{\delta}q_i^{(k-2)} \right) + \dots, \end{aligned}$$

y juntamos términos, obtenemos

$$\delta \mathcal{A}[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{d(L\delta t)}{dt} + \bar{\delta}q_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(1)}} \right) + \dots + (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \right) \right] \right\} \quad (1.23)$$

$$+ \frac{d}{dt} \left(\bar{\delta}q_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i^{(1)}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(2)}} \right) + \dots + (-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \right) \right] \right) \quad (1.24)$$

$$+ \frac{d}{dt} \left(\bar{\delta} q_i^{(1)} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i^{(2)}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(3)}} \right) + \cdots + (-1)^{k-2} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \right) \right] \right) \quad (1.25)$$

$$+ \cdots + \frac{d}{dt} \left(\bar{\delta} q_i^{(k-1)} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \right] \right) \}. \quad (1.26)$$

Los términos entre paréntesis cuadrados son los momentos canónico-conjugados $p_{i(s)}$, excepto el primero (1.23), que es el miembro de la izquierda de las ecuaciones de Euler-lagrange (1.4) y que se anula idénticamente si las funciones q_i satisfacen las ecuaciones dinámicas.

Para sistemas Lagrangianos ordinarios que dependen únicamente de derivadas de primer orden, el momento canónico-conjugado de la variable generalizada q_i es una variable dinámica p_i , definida por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

Como generalización de esto, para sistemas Lagrangianos con derivadas de orden superior, el formalismo canónico generalizado se obtiene definiendo como variables generalizadas los grados de libertad q_i y sus derivadas temporales $q_i^{(s)}$ hasta el orden $k-1$, es decir las variables generalizadas son las variables cinemáticas con el tiempo excluido. Entonces cada variable generalizada posee un momento canónico conjugado definido de acuerdo con los paréntesis cuadrados anteriores:¹⁴

$$p_{i(1)} = \frac{\partial L}{\partial q_i^{(1)}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(2)}} \right) + \cdots + (-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \right) \quad (1.27)$$

$$p_{i(2)} = \frac{\partial L}{\partial q_i^{(2)}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(3)}} \right) + \cdots + (-1)^{k-2} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \right) \quad (1.28)$$

$$\dots$$

$$p_{i(k)} = \frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \quad (1.29)$$

Se dice que $p_{i(s)}$ es el momento conjugado de la variable $q_i^{(s-1)}$ y como regla general se ve que en su definición, el primer término contiene la derivada parcial de L con respecto a $q_i^{(s)}$, es decir a la primera derivada temporal de la correspondiente variable generalizada canónico conjugada.

Si introducimos en el integrando las variables q_i que satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange, el término (1.23) es idénticamente nulo y la variación del funcional acción (1.22) se transforma en la variación de la función acción a lo largo de la trayectoria clásica, y por lo tanto, la variación de la función acción se puede poner como la integral de una derivada temporal,

$$\delta A(x_1, x_2) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left\{ L \delta t + \left(\bar{\delta} q_i p_{i(1)} + \bar{\delta} q_i^{(1)} p_{i(2)} + \cdots + \bar{\delta} q_i^{(k-1)} p_{i(k)} \right) \right\} dt, \quad (1.30)$$

donde los $p_{i(s)}$ están dados en (1.27-1.29). Si reemplazamos en (1.30) la variación en forma $\bar{\delta} q_i^{(s)} = \delta q_i^{(s)} - q_i^{(s+1)} \delta t$, entonces

$$\delta A(x_1, x_2) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left\{ L \delta t + \delta q_i^{(s)} p_{i(s+1)} - q_i^{(s)} p_{i(s)} \delta t \right\} dt \quad (1.31)$$

con el criterio habitual de suma sobre índices repetidos. Si sustituimos las variaciones δt y $\delta q_i^{(s)}$ en términos del elemento infinitesimal del grupo δg , (1.18-1.21), obtenemos:

$$\delta A(x_1, x_2) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left\{ \left(L - p_{i(s)} q_i^{(s)} \right) M + p_{i(s)} M_i^{(s-1)} \right\} \delta g dt, \quad (1.32)$$

¹⁴ E.T. Whittaker, *Analytical Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge (1927), p. 265.

donde el rango de suma para cada índice repetido es, $i = 1, \dots, n$, $s = 1, \dots, k$, y donde el parámetro infinitesimal del grupo δg se puede sacar fuera de la integral.

Como en la integral anterior estamos usando una solución de las ecuaciones dinámicas, las cuales son invariantes bajo la transformación, la variación de la función acción es

$$\delta A(x_1, x_2) = A(\delta g x_1, \delta g x_2) - A(x_1, x_2).$$

Si resulta que a primer orden en el parámetro infinitesimal del grupo la podemos poner en la forma

$$\delta A(x_1, x_2) = \lambda(x_2)\delta g - \lambda(x_1)\delta g, \quad (1.33)$$

igualando a (1.32) podemos realizar la integral temporal del lado derecho de (1.32) que se reduce al término entre corchetes evaluado en t_2 menos él mismo evaluado en t_1 . Si el parámetro δg del grupo es arbitrario, reagrupando los términos que dependen de t_1 a la izquierda y los de t_2 derecha, obtenemos un observable que toma los mismos valores en los dos instantes arbitrarios t_1 y t_2 . Es, por lo tanto, una constante del movimiento y representa la magnitud física conservada

$$N = \lambda(x) - \left(L - p_{i(s)} q_i^{(s)} \right) M(t, q) - p_{i(s)} M_i^{(s-1)}(t, q, \dots, q^{(s)}), \quad (1.34)$$

donde el término entre paréntesis $H = p_{i(s)} q_i^{(s)} - L$, es la diferencia entre los productos de cada momento por la derivada temporal de la correspondiente variable generalizada canónico conjugada menos la Lagrangiana, es el **Hamiltoniano generalizado**, de tal manera que finalmente

$$N = \lambda(x) + H M(t, q) - p_{i(s)} M_i^{(s-1)}(t, q, \dots, q^{(s)}). \quad (1.35)$$

Si el grupo de transformaciones tiene r parámetros, existen r constantes del movimiento relacionadas con las transformaciones infinitesimales (1.33) de la función acción bajo el correspondiente grupo de Lie de r parámetros.

Los diferentes momentos se escriben en términos de las funciones $F_i(x, \dot{x})$ del desarrollo (1.8) de la Lagrangiana y de sus derivadas temporales.

Por ejemplo, si tenemos una Lagrangiana que depende hasta la derivada segunda de un grado de libertad r , $L(t, r, dr/dt, d^2r/dt^2) \equiv L(t, r, u, a)$, y la $\tilde{L}(t, r, u, \dot{t}, \dot{r}, \dot{u})$. La Lagrangiana \tilde{L} se puede escribir

$$\tilde{L} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i = F_i(x, \dot{x}) \dot{x}_i = T\dot{t} + R\dot{r} + U\dot{u},$$

donde las funciones T , R y U son esas derivadas parciales $F_i(x, \dot{x})$ de \tilde{L} , que son funciones homogéneas de grado cero de las derivadas \dot{x}_i , y por lo tanto son funciones de (t, r, u, a) . Las variables cinemáticas son, $x \equiv \{t, r, u\}$ y las variables generalizadas son $q \equiv \{r, u\}$ por lo que hay un momento canónico conjugado de r , p_r y otro p_u el canónico conjugado de u y así, tenemos:

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \frac{\partial(\tilde{L}/\dot{t})}{\partial \dot{r}} \frac{\partial \dot{r}}{\partial u} = \frac{1}{\dot{t}} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{r}} \dot{t} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{r}} = R$$

ya que $\dot{r} = u\dot{t}$. Análogamente

$$\frac{\partial L}{\partial a} = \frac{\partial(\tilde{L}/\dot{t})}{\partial \dot{u}} \frac{\partial \dot{u}}{\partial a} = \frac{1}{\dot{t}} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{u}} \dot{t} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{u}} = U$$

pues $\dot{u} = a\dot{t}$.

El momento p_r se define de acuerdo con (1.27-1.29) como

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial a} \right) = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{u}} \right) = R - \frac{dU}{dt},$$

y el momento p_u

$$p_u = \frac{\partial L}{\partial a} = U,$$

que han quedado expresados en términos de las funciones $F_i(x, \dot{x})$ y de sus derivadas temporales.

La constante del movimiento Noetheriana N se expresa finalmente en términos de las funciones F_i y sus derivadas temporales (o bien del Hamiltoniano H y de los momentos $p_{i(s)}$), de las funciones $M_i^{(s)}$ que representan la forma en que las variables cinemáticas transforman bajo las transformaciones infinitesimales, $\delta t = \delta g M$, $\delta q_i^{(s)} = \delta g M_i^{(s)}$, y de la función $\lambda(x)$ que, como veremos en seguida y para partículas elementales, está relacionada con los exponentes del grupo G y con el hecho de que las Lagrangianas no son invariantes. Las funciones F_i y sus derivadas temporales son funciones homogéneas de grado cero en las derivadas de las variables cinemáticas \dot{x}^i . Las funciones $\lambda(x)$ y $M_i^{(s)}(x)$ dependen únicamente de las variables cinemáticas. En consecuencia, las constantes del movimiento Noetherianas son funciones homogéneas de grado cero en las derivadas de las variables cinemáticas y por lo tanto invariantes bajo cambios arbitrarios del parámetro de evolución. Son funciones de las derivadas temporales de los grados de libertad.

1.5. Sistemas Elementales

En mecánica Newtoniana el sistema más simple es un punto de masa m . A partir de puntos masivos se pueden construir sistemas arbitrarios de cualquier forma y masa, y por lo tanto cualquier distribución arbitraria de materia. El punto masivo se puede considerar como la partícula elemental de la mecánica Newtoniana. Desde el punto de vista actual de la física de partículas corresponde a la descripción clásica de una partícula sin espín. Sabemos que existen objetos como electrones, muones, fotones, neutrinos, quarks y muchos otros, que pueden ser considerados como partículas elementales en el sentido de que no parecen estar compuestos de otros objetos. Más aún, no se ha encontrado en la naturaleza ninguna partícula elemental sin espín. Es claro que el punto Newtoniano no da cuenta de la estructura clásica del espín y la existencia del espín es un atributo fundamental de una partícula elemental, que no aparece en los objetos elementales de la mecánica Newtoniana, por lo que es necesario describirlo adecuadamente.

En mecánica cuántica, el trabajo de Wigner¹⁵ sobre las representaciones del grupo de Lorentz inhomogéneo suministra una definición matemática muy precisa del concepto de partícula elemental. Una **partícula elemental** es un sistema cuántico cuyo espacio de Hilbert de estados puros, es el espacio de una representación unitaria, proyectiva e **irreducible** del grupo de Poincaré. Las representaciones irreducibles del grupo de Poincaré se caracterizan por dos parámetros invariantes m y S , la masa y el espín del sistema, respectivamente. Analizando las diferentes representaciones irreducibles, podremos obtener la descripción de partículas con o sin masa y de cualquier valor del espín.

La idea de irreducibilidad de Wigner lo que viene a decir es que todos los posibles estados vectoriales puros se pueden construir, dentro del formalismo cuántico, a partir de uno cualquiera de ellos. Comenzando en un estado cualquiera descrito por un observador inercial y añadiéndole las descripciones que de ese estado hacen el resto de los observadores inerciales, y efectuando las operaciones habituales de suma de vectores y de límites de sucesiones, se completa todo el espacio de Hilbert. Aquí está patente la idea del principio atómico. No hay más estados que las modificaciones cinemáticas de uno cualquiera de ellos. Si la partícula elemental cambia de estado, siempre es posible encontrar otro observador inercial que la describa en el mismo estado que anteriormente.

En la formulación Lagrangiana, si preparamos a la partícula elemental en el estado x_1 para evolucionar hasta el estado x_2 , el estado final y cualquier estado intermedio, se puede siempre obtener del estado inicial mediante un cambio de observador inercial, es decir $x_2 = gx_1$, para algún elemento g del grupo cinemático G . Esto no es posible en un sistema arbitrario. Esto es lo que distingue a un sistema elemental de uno que no lo es, que la variedad X , el espacio cinemático debe cumplir esta restricción, que, dados dos puntos cualesquiera del mismo, siempre

¹⁵ E.P. Wigner, *Ann. Math.* **40**, 149 (1939)

es posible encontrar alguna transformación cinemática que los ligue. Llegamos pues a la

Definición ¹⁶: Una **partícula elemental clásica** es un sistema Lagrangiano cuyo espacio cinemático X es un **espacio homogéneo** del grupo cinemático G .

Los grupos de Galileo y de Poincaré son grupos de Lie de diez parámetros y por lo tanto los espacios homogéneos más amplios que podemos encontrar en ellos son de dimensión 10. Además, las variables que definen a los espacios homogéneos comparten con los parámetros del grupo sus mismos dominios, su dimensionalidad y su significación geométrica. Ambos grupos, como veremos más adelante, se pueden parametrizar en términos de 10 variables $(b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha})$ con los siguientes dominios y dimensiones, $b \in \mathbb{R}$ representa un parámetro con dimensiones de tiempo que nos caracteriza la traslación temporal, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, 3 variables espaciales que caracterizan a las traslaciones espaciales. El parámetro $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ con dimensiones de velocidad y que representa la velocidad relativa entre observadores, restringida a $v < c$ en el caso Poincaré. Finalmente $\boldsymbol{\alpha} \in SO(3)$ son tres parámetros adimensionales que caracterizan la orientación relativa entre los correspondientes sistemas cartesianos de referencia y que pertenecen a un dominio compacto, que es una parametrización del grupo de rotaciones.

De esta forma, el máximo número de variables cinemáticas, para caracterizar el estado cinemático de una partícula elemental, será 10. Representamos estas variables cinemáticas por $x \equiv (t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha})$ con los mismos dominios y dimensiones que los anteriores parámetros, y que los interpretamos geoméricamente como **tiempo t , posición \mathbf{r} , velocidad \mathbf{u} y orientación $\boldsymbol{\alpha}$** de la partícula.

Como la Lagrangiana debe depender también de las siguientes derivadas temporales, llegamos a la conclusión de que L debe depender de la aceleración y de la velocidad angular de la partícula. Es por lo tanto, un sistema de 6 grados de libertad. Tres \mathbf{r} , representan la posición de un punto y los otros tres $\boldsymbol{\alpha}$, su orientación en el espacio. Podemos visualizarlo mediante tres vectores unidad ortogonales ligados al punto \mathbf{r} , como un sistema cartesiano comóvil. Pero la Lagrangiana debe depender hasta la derivada segunda de \mathbf{r} , es decir de la aceleración del punto, y hasta la primera derivada de $\boldsymbol{\alpha}$, es decir, la velocidad angular. Los grupos de Galileo y Poincaré conducen a Lagrangianas generalizadas que dependen de derivadas de segundo orden de la posición de un punto.

Debido a esta definición, es el grupo cinemático G , asociado al Principio de Relatividad Restringido el que determina completamente el espacio cinemático de una partícula elemental, sobre el que se van a definir las posibles Lagrangianas. Las partículas puntuales son casos particulares de esta definición ya que su espacio cinemático es el generado por las variables (t, \mathbf{r}) , tiempo y posición. Dados dos puntos cualesquiera (t_1, \mathbf{r}_1) y (t_2, \mathbf{r}_2) , con $t_2 > t_1$, una traslación espacio-temporal los liga, por lo que esta variedad es un espacio homogéneo tanto del grupo de Galileo como del grupo de Poincaré, ya que las traslaciones son un subgrupo de ambos grupos.

Cuanto más amplio sea el grupo cinemático, mayor número de variables tendremos para caracterizar las posibles variables clásicas que definen el espacio cinemático de una partícula elemental. De esta manera, el formalismo que se propone se puede acomodar a cualquier grupo de simetrías. Solamente hace falta dar con el grupo adecuado, que no solamente define las simetrías sino que suministra las variables clásicas de los sistemas elementales. Este grupo está todavía sin ser desvelado.

Ejemplo: Partícula puntual Galileana. Es un sistema mecánico de 3 grados de libertad, \mathbf{r} , la posición del punto. Posee por lo tanto 4 variables cinemáticas, $x \equiv \{t, \mathbf{r}\}$. Si definimos el estado

¹⁶ M. Rivas, *J. Phys. A* **18**, 1971 (1985); *J. Math. Phys.* **30**, 318 (1989); *J. Math. Phys.* **35**, 3380 (1994).

inicial por $x_1 \equiv \{t_1, \mathbf{r}_1\}$ y el estado final por $x_2 \equiv \{t_2, \mathbf{r}_2\}$, vemos que una traslación espacio-temporal transforma uno de los puntos en el otro, por lo que el espacio cinemático es un espacio homogéneo del grupo de Galileo. Se trata por lo tanto de una partícula elemental. Por supuesto que el grupo de traslaciones también es subgrupo del grupo de Poincaré, por lo que la partícula puntual también es una partícula elemental desde el punto de vista relativista. Obtendremos en el capítulo siguiente que si la evolución es libre, esto es que las leyes dinámicas son invariantes bajo \mathcal{G} , la Lagrangiana resulta ser

$$L_0 = \frac{1}{2}m \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2, \quad \tilde{L}_0 = \frac{1}{2}m \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{t}$$

en términos de los grados de libertad y también como función homogénea de grado 1 en términos de las derivadas de las variables cinemáticas. Podemos ver que \tilde{L}_0 depende de las derivadas de todas las variables cinemáticas. Las ecuaciones de Euler-Lagrange a partir de L_0 se reducen a $d^2\mathbf{r}/dt^2 = 0$, e imponemos como condiciones de contorno que la solución pase por los estados inicial y final x_1 y x_2 , respectivamente,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1 + \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{t_2 - t_1}(t - t_1), \quad t \in [t_1, t_2]$$

y que si hacemos la descripción en términos de un parámetro arbitrario τ , la solución queda:

$$t(\tau) = t_1 + (t_2 - t_1)(\tau - \tau_1), \quad \mathbf{r}(\tau) = \mathbf{r}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)(\tau - \tau_1), \quad \tau \in [\tau_1, \tau_2].$$

Si redefinimos el parámetro de evolución mediante $\theta = (\tau - \tau_1)/(\tau_2 - \tau_1)$, podemos tener un parámetro de evolución adimensional tal que los instantes inicial y final se corresponden con $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = 1$, con lo que

$$t(\theta) = t_1 + (t_2 - t_1)\theta, \quad \mathbf{r}(\theta) = \mathbf{r}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\theta, \quad \theta \in [0, 1].$$

La función acción, es decir la integral de la Lagrangiana a lo largo del camino clásico vale

$$A(x_1, x_2) = \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{t_2 - t_1} \right)^2 dt = \frac{m}{2} \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2}{t_2 - t_1},$$

que finalmente se expresa en términos de las variables cinemáticas de los estados inicial y final y del único parámetro característico de la partícula elemental sin espín, que es la masa m .

El teorema de Noether nos va a llevar a que la energía y el momento lineal se expresen en términos de las derivadas de la \tilde{L}_0 , en la forma:

$$H = -\frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial t} = \frac{1}{2}m \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{t^2} = \frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2, \quad \mathbf{p} = \frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m \frac{\dot{\mathbf{r}}}{t} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

funciones homogéneas de grado cero en términos de las derivadas de las variables cinemáticas, y por lo tanto dependientes de las derivadas temporales de los grados de libertad. El resultado es que las magnitudes conservadas son independientes del parámetro arbitrario de evolución τ .

1.5.1. Aplicación a grupos cinemáticos sencillos

Supongamos que admitimos que las leyes de la física son solamente invariantes por traslación espacio-temporal. Esto equivale a que el grupo cinemático asociado al Principio de Relatividad Restringido G , es el grupo de traslaciones espacio-temporales $\{\mathbb{R}^4, +\}$, dependiente de cuatro parámetros:

$$t' = t + b, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}.$$

En este caso, el espacio homogéneo más amplio de G que podemos establecer es el propio G , por lo que las posibles variables cinemáticas son (t, \mathbf{r}) . Estamos describiendo la partícula puntual localizada en \mathbf{r} . Como solamente poseemos como simetrías las traslaciones, el teorema de Noether solamente nos produce la definición de los observables H y \mathbf{P} , momento temporal y momento lineal, respectivamente, y la conservación del momento angular no queda descrita para esta partícula. La Lagrangiana que describa este sistema será función de $(t, \mathbf{r}, \mathbf{u})$, siendo $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$ la velocidad del punto \mathbf{r} .

Compliquemos un poco el grupo y admitamos que las leyes de la física son también invariantes por rotación de los sistemas de referencia. Entonces el grupo G viene dado por

$$t' = t + b, \quad \mathbf{r}' = R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{r} + \mathbf{a},$$

dependiente de siete parámetros. El espacio homogéneo más amplio será el propio grupo y tendremos como variables cinemáticas a $(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha})$ y diremos que la partícula elemental, además de estar localizada en el punto \mathbf{r} , posee una orientación descrita por las variables $\boldsymbol{\alpha}$. La Lagrangiana que describa este sistema será función de $(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\omega})$, dependerá, además de la velocidad del punto \mathbf{r} , \mathbf{u} , de la velocidad de cambio de la orientación, o velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Para este tipo de partícula, el teorema de Noether ya nos brinda la definición de momento angular, al tener un grupo cinemático más amplio. Estamos describiendo algo formalmente equivalente a un sólido rígido.

El siguiente paso, que vamos a desarrollar en más detalle, es considerar que el grupo cinemático también contiene transformaciones inerciales puras con desplazamiento relativo entre observadores con velocidad constante (boosts). Introducimos tres nuevos parámetros de velocidad \mathbf{v} , y por lo tanto podremos usar tres variables de velocidad como variables cinemáticas. La Lagrangiana dependerá también de la derivada de la velocidad. Además, el teorema de Noether nos producirá la definición de otro observable, el momento cinemático. Analizaremos más adelante las dos posibilidades de usar bien el grupo de Galileo \mathcal{G} o el de Poincaré \mathcal{P} .

1.6. Estructura métrica del espacio cinemático

La variedad X , el espacio cinemático de los sistemas dinámicos Lagrangianos, posee una estructura métrica. Es un espacio de Finsler en el que la métrica no solamente es función del punto x sino que depende también de la derivada \dot{x} . En efecto, como $\tilde{L}(x, \dot{x})$ es una función homogénea de grado 1 en términos de las variables \dot{x}^i , resulta que \tilde{L}^2 es una función homogénea de grado 2 de las variables \dot{x}^i . Si reemplazamos \dot{x}^i por $\lambda \dot{x}^i \equiv y^i$, $\tilde{L}^2(x, \lambda \dot{x}) = \tilde{L}^2(x, y) = \lambda^2 \tilde{L}^2(x, \dot{x})$. Si derivamos dos veces con respecto a λ y hacemos luego $\lambda = 1$,

$$2\lambda \tilde{L}^2 = \frac{\partial \tilde{L}^2}{\partial y^i} \dot{x}^i, \quad 2\tilde{L}^2 = \frac{\partial^2 \tilde{L}^2}{\partial y^i \partial y^j} \dot{x}^i \dot{x}^j \Big|_{\lambda=1}$$

Por lo tanto puede escribirse como

$$\tilde{L}^2 = g_{ij}(x, \dot{x}) \dot{x}^i \dot{x}^j, \quad g_{ij}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{L}^2}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} = g_{ji}$$

donde las funciones $g_{ij}(x, \dot{x})$ son homogéneas de grado cero en las \dot{x}^i y por lo tanto involucran solamente derivadas temporales. Pero además de depender del punto x , son funciones de las \dot{x} . Un espacio métrico en el que la métrica es también función de las derivadas de las variables del espacio recibe el nombre de **espacio de Finsler**^{17 18}.

Como $\pm \tilde{L} = \pm \sqrt{\tilde{L}^2}$, el problema variacional en el espacio cinemático X se reescribe

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{L}(x, \dot{x}) d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\tilde{L}^2(x, \dot{x})} d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{g_{ij}(x, \dot{x}) \dot{x}^i \dot{x}^j} d\tau =$$

¹⁷G.S. Asanov, *Finsler geometry, Relativity and Gauge theories*, (Reidel Pub. Co, Dordrecht 1985); H. Rund, *The Hamilton-Jacobi theory in the calculus of variations*, (Krieger Pub. Co., N.Y 1973). H. Rund, *The differential geometry of Finsler spaces*, (Springer, Berlin, 1959).



¹⁸ **Paul Finsler** Nacido el 11 Abril 1894 en Heilbronn, Neckar, Alemania, y fallecido en Zurich, Suiza, el 29 de Abril de 1970. Se dedicó a la geometría diferencial y a la teoría de conjuntos. Consideraba que los conjuntos eran como números generalizados con los que se podían establecer técnicas aritméticas. Fue Elie Cartan quien en 1934, en un libro que publica titulado *Les espaces de Finsler*, denomina espacios de Finsler a los espacios métricos que estamos estudiando.

$$= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{g_{ij}(x, \dot{x}) dx^i dx^j} = \int_{x_1}^{x_2} ds,$$

pudiendo interpretar ds como el diferencial de arco de la curva que une los puntos extremos de la evolución en el espacio cinemático X . Al postular que la distancia que recorre el sistema dinámico en el espacio X entre x_1 y x_2 debe ser mínima, estamos transformando el problema variacional de hacer extremal la acción del sistema mecánico en un problema geodésico en un espacio métrico. La evolución de todo sistema dinámico entre los estados inicial x_1 y final x_2 , sigue una geodésica del espacio X . Y esto es independiente de que el sistema dinámico sea un sistema arbitrario o sea una partícula elemental. Incluso en este caso, es independiente de que la partícula sea libre o esté sometida a una interacción. Lo que sucede es que entre una partícula libre y otra en interacción, la Lagrangiana, y por lo tanto la métrica, son distintas, es decir, **toda interacción modifica la métrica del espacio cinemático de la partícula libre**.

Si utilizamos transformaciones que dejan invariante a la Lagrangiana, entonces, bajo estas transformaciones, las magnitudes g_{ij} transforman como las componentes covariantes de un tensor simétrico de dos índices.

Dadas las ecuaciones de Euler-Lagrange de un sistema dinámico, el problema variacional implica que debemos buscar soluciones de estas ecuaciones que pasen por los puntos extremos x_1 y x_2 . Esto, en general, no tiene por qué poseer solución para puntos arbitrarios. Si preparamos al sistema en el punto x_1 , diremos que el punto x_2 está **causalmente conectado** con x_1 , si las ecuaciones de Euler-Lagrange entre esos puntos poseen solución. En caso contrario diremos que están causalmente desconectados y no podemos llevar, por evolución dinámica, el sistema del estado x_1 al estado x_2 . Como $\tilde{L}^2 > 0$, la métrica del espacio es definida positiva entre los estados causalmente conectados, por lo que en la variedad X si entre dos puntos infinitesimalmente próximos y para velocidades adecuadas no se satisface que entre ellos $g_{ij}(x, \dot{x}) dx^i dx^j > 0$, entonces no es posible que estén conectados causalmente y por lo tanto la evolución entre ellos no está permitida.

Para la partícula puntual relativista libre de masa m , la Lagrangiana se escribe

$$\tilde{L}_0 = \pm mc \sqrt{\dot{x}_0^2 - \dot{\mathbf{r}}^2}, \quad x_0 = ct.$$

Si reescalamos \tilde{L}_0 dividiéndola por la constante mc , la Lagrangiana tiene ahora dimensiones de longitud donde claramente se ve que la métrica resulta ser $g_{\mu\nu}^{(0)} = \eta_{\mu\nu}$, la métrica de Minkowski, con $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Como $\tilde{L}^2 > 0$ eso implica que para todo τ se tiene que cumplir que

$$\tilde{L}^2 = g_{\mu\nu}^{(0)} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = c^2 \dot{t}^2 - \dot{\mathbf{r}}^2 > 0,$$

por lo que los puntos causalmente conectados son aquellos que se alcanzan a partir de uno dado con la condición de que la partícula se mueva con $\mathbf{u}^2 = \dot{\mathbf{r}}^2/\dot{t}^2 < c^2$, es decir $u < c$. Dado x_1 los puntos causalmente conectados con él son los del interior de su cono de luz del futuro. El resto de los puntos del espacio cinemático (que en este caso se reduce al espacio-tiempo) están causalmente desconectados. Son los puntos del pasado, los de su cono de luz y aquellos que quedan fuera de éste. En esos casos $\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \leq 0$, y las ecuaciones de Euler-Lagrange no suministran solución física.

Dada la estructura general de la $\tilde{L} = F_i(x, \dot{x}) \dot{x}^i$, con $F_i = \partial \tilde{L} / \partial \dot{x}^i$, es fácil ver que los coeficientes de la métrica se escriben como

$$g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{L}^2}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \left(\tilde{L} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^j} \right) = F_i F_j + \tilde{L} \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} = F_i F_j + \tilde{L} \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}^j}. \quad (1.36)$$

En general, el espacio cinemático tendrá una métrica que será función de punto x si es que la Lagrangiana lo es, pero lo que siempre resultará es que es ineludible que sea función de las \dot{x}^i . En el caso de la partícula puntual relativista libre, la métrica no depende ni de x ni de \dot{x} como

corresponde a un sistema libre en el que todos los puntos del espacio y todas las velocidades son equivalentes. Pero si introducimos una interacción, y la intensidad de la interacción depende de la velocidad, como en el caso de un campo magnético, la métrica va a dejar de ser constante y en general dependerá de la velocidad del punto.

Por ejemplo, la partícula puntual de masa m y de carga e en presencia de un campo electromagnético externo viene descrita por $\tilde{L} = \tilde{L}_0 + \tilde{L}_I$, con $\tilde{L}_0 = -p_\mu(x)\dot{x}^\mu = -H\dot{t} + \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}}$, $\tilde{L}_I = -eA_\mu(x)\dot{x}^\mu$, de manera que el problema variacional en el mismo espacio cinemático es un problema geodésico con una métrica dada, en el caso relativista, por

$$g_{\mu\nu}(x, \dot{x}) = m^2 c^2 \eta_{\mu\nu} + e^2 A_\mu A_\nu + e(p_\mu A_\nu + p_\nu A_\mu) + eA_\sigma \dot{x}^\sigma \frac{\partial p_\mu}{\partial \dot{x}^\nu}. \quad (1.37)$$

La modificación de la métrica se anula cuando $e \rightarrow 0$. Como p_μ no depende explícitamente de las x , la dependencia de la métrica de las x , lo es a través de los campos externos $A_\mu(x)$. Pero depende de las variables \dot{x} a través de su dependencia de las p_μ y de sus derivadas. En el límite de baja velocidad, cuando $u/c \rightarrow 0$, $p_0 = mc$ y $p_i = 0$, por lo que nos resulta una métrica Riemanniana, que reescalando \tilde{L} por un factor global mc y llamando $k = e/mc$, $\tilde{L}_I = -kA_\mu(x)\dot{x}^\mu$,

$$g_{00}(x) = 1 + k^2 A_0^2 + 2kA_0 = (1 + kA_0(x))^2, \quad g_{ii}(x) = -1 - kA_0(x) + k^2 A_i^2(x), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$g_{0i}(x) = kA_i(x) + k^2 A_0(x)A_i(x), \quad g_{ij}(x) = k^2 A_i(x)A_j(x), \quad i \neq j = 1, 2, 3.$$

Así, en el caso de un campo eléctrico uniforme, $A_0 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{r}/c$, $\mathbf{A} = 0$, los coeficientes no nulos de la aproximación Riemanniana son $g_{00} = (1 + e\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}/mc^2)^2$, $g_{ii} = -(1 + e\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}/mc^2)$. Si lo que tenemos es un campo magnético uniforme, $A_0 = 0$, $\mathbf{A} = (\mathbf{r} \times \mathbf{B})/2$, $g_{00} = 1$, $g_{ii} = -1 + (e(\mathbf{r} \times \mathbf{B})/2mc)_i^2$, $g_{0i} = e(\mathbf{r} \times \mathbf{B})_i/2mc$ y finalmente $g_{ij} = (e(\mathbf{r} \times \mathbf{B})/2mc)_i (e(\mathbf{r} \times \mathbf{B})/2mc)_j$, con $i \neq j$. En una interacción en la que solamente tuviéramos una energía potencial, como en el caso habitual gravitatorio, $mA_0 = mV(x)/c$, y el $g_{00} = (1 + V(x)/c^2)^2$, $g_{ii} = -(1 + V(x)/c^2)$, como veremos en los ejemplos analizados más adelante.

Las ecuaciones dinámicas las podemos determinar como las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenidas a partir de la Lagrangiana L . En el ejemplo de la partícula puntual cargada

$$\dot{p}_\mu = eF_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\nu, \quad F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Otra forma alternativa es como las ecuaciones de las geodésicas construidas a partir de la métrica que se obtiene derivando dos veces la \tilde{L}^2 , dada en (1.37). Las ecuaciones geodésicas son

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\sigma = 0,$$

donde los símbolos de Christoffel Finslerianos $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ se expresan en términos de las derivadas de la métrica de la misma manera que en el caso Riemanniano,

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\rho} \right) = \Gamma_{\sigma\nu}^\mu.$$

Las componentes contravariantes del tensor métrico se definen como habitualmente $g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta_\nu^\mu$. El espacio-tiempo X es, en general, un espacio de Finsler con torsión. El tensor de torsión de Cartan, es un tensor simétrico

$$C_{\mu\nu\lambda} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \dot{x}^\lambda} = eA_\mu \frac{\partial p_\nu}{\partial \dot{x}^\lambda} + eA_\nu \frac{\partial p_\mu}{\partial \dot{x}^\lambda} + eA_\lambda \frac{\partial p_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} + eA_\sigma \dot{x}^\sigma \frac{\partial^2 p_\mu}{\partial \dot{x}^\nu \partial \dot{x}^\lambda}.$$

Los espacios de Riemann son espacios sin torsión de Cartan, porque la métrica es independiente de las derivadas \dot{x} .

Postular, como hace la Relatividad General, que la gravedad produce una modificación de la métrica del espacio cinemático de la partícula puntual, esto es, del espacio-tiempo, en la que los coeficientes $g_{ij}(x)$ resultan ser solamente funciones de punto, es establecer una restricción matemática fuerte sobre las posibles métricas, ya que éstas pueden, en general, ser funciones también de las \dot{x} . Por eso consideramos que en su estatus actual la Relatividad General es una especie de límite de baja velocidad de una teoría de la gravitación más general. La segunda restricción es que en la naturaleza no existen partículas elementales sin espín, por lo que la gravedad, lo que modificaría sería la métrica del espacio cinemático de la partícula elemental con espín, que resulta ser una variedad más amplia que el espacio-tiempo, como veremos a lo largo de este curso.

Como conclusión final, diríamos que la Relatividad General parece ser una teoría de la gravedad de materia sin espín, moviéndose a baja velocidad.

1.6.1. Ejemplos de espacios de Finsler

En la figura 1.3 se muestran posibles movimientos de una partícula puntual cargada en su espacio cinemático, que en este caso es el espacio-tiempo, en cuatro situaciones dinámicas.¹⁹

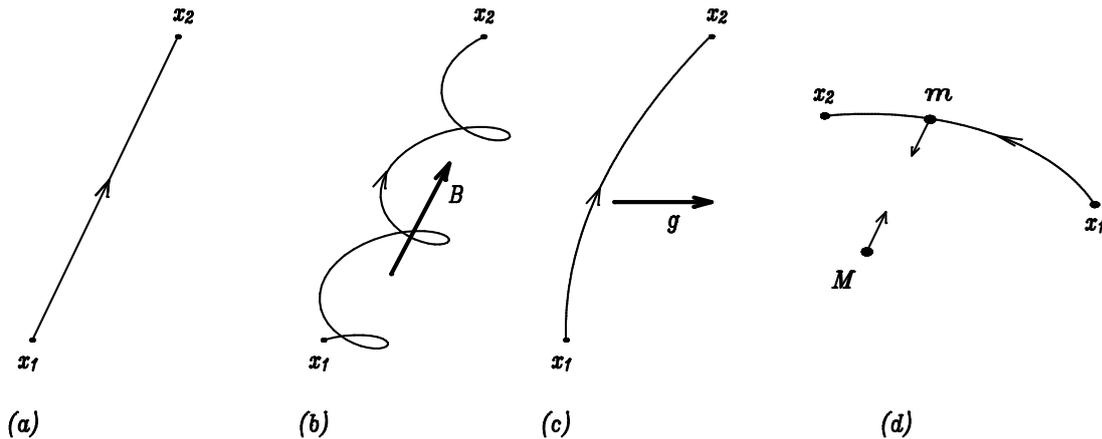


Figura 1.3: Cuatro movimientos de una partícula puntual en su espacio cinemático, entre los puntos x_1 y x_2 , (a) en el caso libre, (b) en presencia de un campo magnético B , (c) movimiento libre visto desde un observador acelerado o movimiento en presencia de un campo gravitatorio uniforme g . El ejemplo (d) es el análisis gravitatorio en presencia de una masa M situada en el origen del sistema de referencia que crea un campo Newtoniano. En los cuatro casos el espacio cinemático es el mismo, el espacio-tiempo, pero con métricas Finslerianas diferentes que producen trayectorias que en el espacio tridimensional son, en el caso (a) una recta sin torsión ni curvatura, en (b) con torsión y curvatura, y en (c) y (d) una trayectoria plana con curvatura.

Las cuatro trayectorias son geodésicas del espacio-tiempo pero con respecto a cuatro métricas diferentes. En la parte (a) el movimiento es libre, la trayectoria es una recta; en (b) está sometida a un campo magnético uniforme, y su trayectoria espacial tiene curvatura y torsión. En este caso la métrica Finsleriana del espacio-tiempo es diferente de la métrica del caso libre. El campo magnético externo la modifica. En (c) es la misma trayectoria libre pero vista desde

¹⁹Este tema corresponde a una charla impartida en castellano por el autor en el IAC en Noviembre de 2014. (<http://iactalks.iac.es/talks/view/703>) y a una videoconferencia, impartida en inglés en el VIA, (<http://viavca.in2p3.fr/site.html>) en Enero de 2015.

un observador acelerado. De acuerdo con el principio de equivalencia esto equivale a la presencia de un campo gravitatorio constante. También en este caso la métrica ha sido modificada. Finalmente, en (d) analizamos el movimiento de la partícula puntual en un campo gravitatorio Newtoniano producido por una masa M localizada en el origen del sistema de referencia inercial que hace el análisis.

Los ejemplos que siguen, relativos al movimiento de una partícula de masa m , les vamos a reescalar la Lagrangiana, dividiéndola por el factor mc , con lo que \tilde{L} tendrá ahora dimensiones de longitud. Conviene recordar, que si la evolución se expresa en términos de un parámetro adimensional τ , los coeficientes de la métrica $g_{\mu\nu}$ son adimensionales, ya que las coordenadas de los puntos del espacio-tiempo tienen dimensiones de longitud.

En el caso (a) la Lagrangiana reescalada de la partícula libre es

$$\tilde{L}_0 = \pm \sqrt{\dot{x}_0^2 - \dot{\mathbf{r}}^2} = F_\mu \dot{x}^\mu, \quad \tilde{L}_0^2 = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = c^2 \dot{t}^2 - \dot{\mathbf{r}}^2 > 0,$$

la métrica es $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ con $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Es constante y corresponde a la métrica de Minkowski.

En el caso (b), supongamos un campo magnético uniforme en la dirección OZ , de intensidad B . Podemos tomar como potencial vector $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$ y potencial escalar $A_0 = 0$. La Lagrangiana de la partícula puntual reescalada en este campo es

$$\tilde{L}_B = -\sqrt{\dot{x}_0^2 - \dot{\mathbf{r}}^2} + \frac{eB}{mc} xy = F_\mu \dot{x}^\mu, \quad F_0 = -p_0, \quad F_1 = -p_1, \quad F_2 = -p_2 + (eB/mc)x, \quad F_3 = -p_3.$$

que conduce a la ecuación dinámica regida por la fuerza de Lorentz en un campo magnético

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{u} \times \mathbf{B}.$$

$$p_0 = \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{\dot{x}_0^2 - \dot{\mathbf{r}}^2}} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - u^2}}, \quad p_i = \frac{-\dot{x}_i}{\sqrt{\dot{x}_0^2 - \dot{\mathbf{r}}^2}} = \frac{-u_i}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

De acuerdo con (1.37) con $A_0 = A_1 = A_3 = 0$, $A_2 = Bx$, llamando $k = eB/mc$, la formulación variacional nos lleva a que el espacio-tiempo tiene la métrica

$$g_{00} = 1 + \frac{kxu^2u_y}{(c^2 - u^2)^{3/2}}, \quad g_{11} = -1 + \frac{kxu_y}{(c^2 - u^2)^{3/2}} (c^2 - u_y^2 - u_z^2),$$

$$g_{22} = -1 + k^2x^2 + \frac{kxu_y}{(c^2 - u^2)^{3/2}} (3c^2 - 3u_x^2 - 2u_y^2 - 3u_z^2),$$

$$g_{33} = -1 + \frac{kxu_y}{(c^2 - u^2)^{3/2}} (c^2 - u_x^2 - u_y^2),$$

$$g_{01} = -\frac{kxcu_xu_y}{(c^2 - u^2)^{3/2}}, \quad g_{02} = -\frac{kxc}{(c^2 - u^2)^{3/2}} (c^2 - u_x^2 - u_z^2), \quad g_{03} = -\frac{kxcu_yu_z}{(c^2 - u^2)^{3/2}}$$

$$g_{12} = \frac{kxu_x}{(c^2 - u^2)^{3/2}} (c^2 - u_x^2 - u_z^2), \quad g_{13} = \frac{kx}{(c^2 - u^2)^{3/2}} u_xu_yu_z, \quad g_{23} = \frac{kxu_z}{(c^2 - u^2)^{3/2}} (c^2 - u_x^2 - u_z^2),$$

Como vemos, los coeficientes son funciones de punto, es decir de la variable x , pero son función además, de las tres componentes de la velocidad de la partícula u_x, u_y, u_z , es decir $g_{\mu\nu}(x, \dot{x})$. Si la velocidad del punto es despreciable frente a c , los coeficientes de la métrica quedan:

$$g_{00} = 1, \quad g_{02} = -kx, \quad g_{11} = -1, \quad g_{22} = -1 + k^2x^2, \quad g_{33} = -1,$$

siendo nulos los demás, donde la dependencia de las velocidades ha desaparecido y se ha transformado en una métrica Riemanniana. Con esta métrica restringida obtendremos una Lagrangiana restringida \tilde{L}_R

$$\tilde{L}_R^2 = c^2 \dot{t}^2 - \dot{\mathbf{r}}^2 + k^2 x^2 \dot{y}^2 - 2kxct\dot{y},$$

que difiere de la Lagrangiana original en un término extra

$$\tilde{L}_B^2 = \tilde{L}_R^2 - 2kxy \left(\sqrt{c^2 \dot{t}^2 - \dot{\mathbf{r}}^2} - c\dot{t} \right),$$

y por lo tanto la fuerza sobre la partícula no es la fuerza de Lorentz. Esta métrica no es solución de vacío de las ecuaciones de Einstein, sino que produce un escalar de curvatura y tensor de Einstein, que valen

$$R = \frac{-k^2}{2}, \quad G_{tt} = \frac{3k^2}{4}, \quad G_{ty} = -\frac{3k^3x}{4}, \quad G_{xx} = \frac{k^2}{4}, \quad G_{yy} = \frac{1}{4}(k^2 + 3k^4x^2), \quad G_{zz} = \frac{-k^2}{4},$$

y los símbolos de Christoffel no nulos son

$$\Gamma_{tx}^t = k^2x/2, \quad \Gamma_{xy}^t = -\frac{1}{2}k(1+k^2x^2), \quad \Gamma_{ty}^x = -k/2, \quad \Gamma_{yy}^x = k^2x, \quad \Gamma_{tx}^y = k/2, \quad \Gamma_{xy}^y = -k^2x/2.$$

Con la fuerza de Lorentz las ecuaciones dinámicas son

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{eB}{m\gamma(u)}u_y = \frac{1}{\gamma(u)}kcu_y, \quad \frac{du_y}{dt} = -\frac{eB}{m\gamma(u)}u_x = -\frac{1}{\gamma(u)}kcu_x, \quad \frac{du_z}{dt} = 0,$$

que nos lleva a que $u_x du_x/dt + u_y du_y/dt + u_z du_z/dt = \mathbf{u} \cdot d\mathbf{u}/dt = 0$, por lo que el movimiento es de módulo constante, el factor $\gamma(u)$ es constante y la partícula se desplaza en la dirección OZ con velocidad constante y rota a la vez que se desplaza con velocidad constante en el plano XOY , con velocidad angular $\omega = eB/\gamma(u)m$. Sin embargo las ecuaciones de las geodésicas debidas a la métrica restringida \tilde{L}_R son

$$\frac{du_x}{dt} = kcu_y(1 - kxu_y/c), \quad \frac{du_y}{dt} = -kcu_x(1 - kxu_y/c), \quad \frac{du_z}{dt} = 0,$$

que también conducen a que el movimiento sea con velocidad u constante. Siendo consecuentes con el límite de baja velocidad, deberemos tomar en estas ecuaciones el límite cuando $u/c \rightarrow 0$, $\gamma(u) \rightarrow 1$, y se reducen a las anteriores. Para la Lagrangiana restringida \tilde{L}_R , la fuerza sobre la partícula es la fuerza de Lorentz en el límite de baja velocidad.

En el ejemplo (c) de un campo gravitatorio uniforme, la dinámica vendría descrita por la Lagrangiana

$$\tilde{L}_g = \tilde{L}_0 + \frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}}{c^2} ct,$$

que conduce a las ecuaciones dinámicas $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{g}$, con $\mathbf{p} = \gamma(u)\mathbf{u}$, independientes de la masa de la partícula. Esta Lagrangiana reescalada, desde el punto de vista geodésico corresponde a una evolución en el espacio-tiempo con una métrica Finsleriana dada por:

$$g_{00} = 1 + \left(\frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}}{c^2} \right)^2 - \frac{c(2c^2 - 3u^2)}{c(c^2 - u^2)^{3/2}} \frac{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})}{c^2},$$

$$g_{ii} = -1 + \frac{(c^2 + u_i^2 - u^2)}{c(c^2 - u^2)^{3/2}} \frac{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})}{c^2}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$g_{0i} = -\frac{u^2 u_i}{(c^2 - u^2)^{3/2}} \frac{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})}{c^2}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$g_{ij} = \frac{cu_i u_j}{c(c^2 - u^2)^{3/2}} \frac{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})}{c^2}, \quad i \neq j = 1, 2, 3$$

El término $\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}$ tiene dimensiones de velocidad al cuadrado. Si la velocidad del punto es despreciable frente a c , los coeficientes no nulos son los

$$g_{00} = 1 + \left(\frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}}{c^2}\right)^2 - 2(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})/c^2, \quad g_{ii} = -1 + (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})/c^2, \quad i = 1, 2, 3$$

es decir

$$g_{00} = \left(1 - \frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}}{c^2}\right)^2, \quad g_{ii} = -\left(1 - \frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}}{c^2}\right), \quad i = 1, 2, 3,$$

donde la componente g_{00} es idéntica a la de la métrica de Rindler correspondiente a un observador uniformemente acelerado o a la presencia de un campo gravitatorio global constante.

El último ejemplo el (d) es el de la partícula puntual en el potencial gravitatorio Newtoniano de una masa puntual M situada en el origen del sistema de referencia. La Lagrangiana reescalada es

$$\tilde{L}_N = \tilde{L}_0 + \frac{GM}{c^2 r} ct.$$

A partir de aquí, y teniendo en cuenta (1.36) se obtiene la métrica de la partícula puntual en un espacio con un potencial central. La métrica que resulta, es

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 + \left(\frac{GM}{c^2 r}\right)^2 - \frac{c(2c^2 - 3u^2)}{(c^2 - u^2)^{3/2}} \frac{GM}{c^2 r}, \\ g_{ii} &= -1 + \frac{c(c^2 - u^2 + u_i^2)}{(c^2 - u^2)^{3/2}} \frac{GM}{c^2 r}, \quad i = 1, 2, 3 \\ g_{0i} &= -\frac{u^2 u_i}{(c^2 - u^2)^{3/2}} \frac{GM}{c^2 r}, \quad i = 1, 2, 3, \\ g_{ij} &= \frac{cu_i u_j}{(c^2 - u^2)^{3/2}} \frac{GM}{c^2 r}, \quad i \neq j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Es una métrica Finsleriana que, en el caso de velocidades pequeñas frente a c , los únicos términos que sobreviven son los términos diagonales,

$$g_{00} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{G^2 M^2}{c^4 r^2}\right) = \left(1 - \frac{GM}{c^2 r}\right)^2,$$

que si el último término que va con G^2/c^4 se considera despreciable, es el coeficiente de la métrica de Schwarzschild. Para los

$$g_{ii} = -\left(1 - \frac{GM}{c^2 r}\right),$$

que de ser Schwarzschild tendría que salir $-(1 - 2GM/c^2 r)^{-1}$. Vemos que los coeficientes en el caso de bajas velocidades se reducen al potencial gravitatorio de una masa central en el origen M , dividido por c^2 .

Este límite de baja velocidad de la métrica Finsleriana de la partícula en un potencial Newtoniano, aparece como

$$ds^2 = \left(1 - \frac{GM}{c^2 r}\right)^2 c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{GM}{c^2 r}\right) (dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2))$$

que es una métrica Riemanniana, estática, invariante por rotación. Si llamamos $R_s = 2GM/c^2$ al radio de Schwarzschild, el escalar de curvatura y el tensor de Einstein aparecen como

$$R = \frac{R_s^2}{r(2r - R_s)^3},$$

$$G_{tt} = \frac{3R_s^2}{8r^3(2r - R_s)}, \quad G_{rr} = \frac{(24r - 7R_s)R_s}{4r^2(2r - R_s)^2}, \quad G_{\theta\theta} = \frac{(R_s - 3r)R_s}{(2r - R_s)^2}, \quad G_{\phi\phi} = \frac{(R_s - 3r)R_s \sin^2 \theta}{(2r - R_s)^2},$$

por lo que no es solución de vacío de las ecuaciones de Einstein de la Relatividad General.

En los dos ejemplos gravitatorios, la aproximación Riemanniana de la métrica se ha traducido en que el g_{00} Minkowskiano de la partícula libre se modifica en la interacción gravitatoria en la forma $g'_{00} = g_{00}(1 + V(r)/c^2)^2$ y los g_{ii} en la forma $g'_{ii} = g_{ii}(1 + V(r)/c^2)$, siendo en ambos casos $V(r)$ el potencial gravitatorio.

1.6.2. Principio de Causalidad

Entre los principios fundamentales enunciados no está incluido el **Principio de Causalidad**. El contenido de este principio, que de forma coloquial viene a expresar que las cosas no suceden porque sí, sino que cualquier efecto viene precedido por una causa que lo produce, vamos a ver que está de alguna manera contenido en el Principio Variacional.

Podríamos considerar el Principio de Causalidad como la restricción impuesta al espacio cinemático X por la condición de que la métrica Finsleriana debe ser definida positiva. Eso nos define en el espacio X , fijado un punto, dos subvariedades, una desconectada causalmente con ese punto y otra conectada, es decir, que si establezcemos un punto inicial para el planteamiento variacional no puedo escoger en X cualquier otro punto para caracterizar el estado final. Solamente aquellos que pertenecen a la subvariedad causalmente conectada con él. Por una parte está la flecha del tiempo, lo que hace que $\dot{t}(\tau) > 0$, es decir que $t_2 > t_1$, y por otra que $g_{ij}dx^i dx^j > 0$. Si el Principio Atómico nos lleva a que X , para una partícula elemental, debe ser necesariamente un espacio homogéneo de G , el Principio de Causalidad nos restringe este espacio a una subvariedad del mismo, que en el caso particular de la partícula puntual se reduce al interior del cono de luz del futuro del punto inicial de la evolución x_1 . En general, con la métrica dada, si damos dos puntos arbitrarios x_1 y x_2 del espacio cinemático X , el que exista un $g \in G$ que los ligue no significa que causalmente puedan estar conectados. Por ejemplo, para una partícula puntual si $x_1 \equiv (t_1, \mathbf{r}_1)$ es el estado inicial, lo podemos llevar a $x_2 \equiv (t_1, \mathbf{r}_2)$ mediante una traslación, pero este punto de X no podría ser el final de la evolución ya que el punto se movería con velocidad infinita. Entre estos dos puntos, como puntos del espacio de Minkowski, $\int \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu < 0$. Esto viene a confirmar que solamente entre aquellos puntos en los que $g_{ij}dx^i dx^j > 0$ sea claramente definida positiva se va a dar una posible evolución, ya que los demás puntos estarían causalmente desconectados. Si lo que evoluciona es una partícula puntual sin masa, entonces la variedad causalmente conectada es la superficie del cono de luz, entre cuyos puntos la métrica es nula.

La homogeneidad de X implica que todos los estados son equivalentes, y que fijado uno de ellos, el resto son los posibles estados en que pueden encontrar a la partícula elemental el resto de los observadores equivalentes. Es el carácter definido positivo de la acción al cuadrado entre dos puntos el que justifica que puntos pueden estar causalmente conectados.

1.7. Resumen del formalismo

1. Para un sistema de n grados de libertad q_i cuya Lagrangiana dependa hasta las derivadas de orden k de los grados de libertad $q_i^{(k)} = d^k q_i / dt^k$, $L(t, q_i, q_i^{(1)}, \dots, q_i^{(k)})$, las variables cinemáticas son $x_j \equiv \{t, q_i, q_i^{(1)}, \dots, q_i^{(k-1)}\}$, es decir el tiempo, los grados de libertad y sus derivadas temporales hasta el orden $k - 1$. Las variables generalizadas son $\{q_i, q_i^{(1)}, \dots, q_i^{(k-1)}\}$, es decir, las variables cinemáticas con el tiempo excluido.

2. Cada variable generalizada posee un momento canónico conjugado, definido por

$$p_{i(s)} = \frac{\partial L}{\partial q_i^{(s)}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(s+1)}} \right) + \dots + (-1)^{k-s} \frac{d^{k-s}}{dt^{k-s}} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \right), \quad s = 1, \dots, k$$

es decir $p_{i(1)}$ es el momento conjugado de las q_i , $p_{i(2)}$ es el momento conjugado de las $q_i^{(1)}$ y finalmente $p_{i(k)}$ es el momento conjugado de las $q_i^{(k-1)}$.

3. En una descripción paramétrica de la evolución, $t(\tau)$, $q_i(\tau)$, la Lagrangiana $\tilde{L} = L\dot{t}$, donde el punto $\dot{}$ representa a la derivada con respecto al parámetro τ , es una función de las variables cinemáticas y de sus primeras derivadas con respecto de τ , \dot{x} , $\tilde{L}(x, \dot{x})$.

4. La función acción es el valor del funcional acción para el camino que la hace extremal.

5. La función acción es una función explícita de **todas** las variables cinemáticas x_1 y x_2 en los extremos de la trayectoria en el espacio cinemático X , $A(x_1, x_2)$.

6. El parámetro de evolución arbitrario τ se puede elegir adimensional, y por lo tanto \tilde{L} tiene dimensiones de acción.

7. La Lagrangiana \tilde{L} se puede obtener de la función acción mediante el límite

$$\tilde{L}(x, \dot{x}) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\partial A(x, y)}{\partial y_i} \dot{x}_i.$$

8. La Lagrangiana \tilde{L} no es función explícita de τ , pero es función homogénea de grado 1 de las derivadas \dot{x}_i de **todas** las variables cinemáticas. Esto nos permite escribirla como una suma de tantos términos como variables cinemáticas

$$\tilde{L}(x, \dot{x}) = \frac{\partial \tilde{L}(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i = F_i(x, \dot{x}) \dot{x}_i.$$

9. Las funciones $F_i(x, \dot{x})$ son funciones homogéneas de grado cero de las \dot{x}_i y por lo tanto son funciones de las derivadas temporales. Como cada sumando $F_i \dot{x}_i$ tiene dimensiones de acción, cada F_i tiene la dimensión complementaria de la correspondiente variable x_i .

10. La función \tilde{L}^2 , que es definida positiva, se puede siempre escribir como

$$\tilde{L}^2 = g_{ij}(x, \dot{x}) \dot{x}_i \dot{x}_j, \quad g_{ij}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{L}^2}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} = g_{ji},$$

donde los coeficientes $g_{ij} = g_{ji}$, son funciones homogéneas de grado 0 de las derivadas \dot{x}_i .

11. El espacio cinemático es siempre un espacio métrico Finsleriano. Como

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{L} d\tau = \pm \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\tilde{L}^2} d\tau = \pm \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{g_{ij}(x, \dot{x}) \dot{x}_i \dot{x}_j} d\tau = \pm \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{g_{ij} dx_i dx_j} = \pm \int ds$$

y el problema variacional es equivalente a un problema geodésico sobre el espacio cinemático X , con una métrica $g_{ij}(x, \dot{x})$ que es función de punto x y de las derivadas \dot{x}_i .

12. Si el sistema mecánico es una partícula elemental, entonces es condición necesaria que el espacio cinemático X sea un espacio homogéneo del grupo cinemático G asociado al Principio de Relatividad Restringido.
13. El espacio cinemático de una partícula puntual es el espacio-tiempo. Esta variedad es siempre un espacio métrico, con una métrica más general que una métrica Riemanniana. El admitir, como hace la Relatividad General, que el espacio tiempo como variedad de la partícula test, es un espacio métrico Riemanniano es una restricción sobre la posible situación más general. El espacio cinemático de la partícula puntual relativista libre tiene como métrica la métrica de Minkowski.
14. La invariancia de las ecuaciones dinámicas bajo un grupo de transformaciones no implica que la Lagrangiana ni la función acción sean invariantes bajo este grupo. El teorema de Noether establece la relación entre cómo se modifica la función $A(x_1, x_2)$ bajo un grupo y la construcción explícita de las constantes del movimiento asociadas a ese grupo que deja invariantes las ecuaciones dinámicas. Las constantes del movimiento Noetherianas se escriben en función de la Lagrangiana, de sus derivadas $F_i(x, \dot{x})$, de las derivadas temporales de éstas y de las funciones $M(x)$ de cómo transforman las variables cinemáticas $\delta t = M_0(x)\delta g$, $\delta q_i^{(s)} = M_i^{(s)}(x)\delta g$, bajo una transformación infinitesimal del grupo de parámetro δg .

$$N = \lambda(x) - (L - p_{i(s)}q_i^{(s)})M_0 - p_{i(s)}M_i^{(s-1)} = \lambda(x) + HM_0 - p_{i(s)}M_i^{(s-1)},$$

donde $p_{i(s)}$ es el momento canónico conjugado de la variable generalizada $q_i^{(s-1)}$ y $\lambda(x)$ la función que aparece en la no invariancia de la Lagrangiana bajo el grupo.

1.8. Apéndice: Grupos de Lie de transformaciones

Vamos a introducir la notación y algunos elementos generales de la teoría de grupos de Lie de transformaciones de una variedad. Se trata de analizar cómo las diferentes magnitudes físicas transforman bajo la acción de cambios de sistemas de referencia y bajo grupos de simetrías.

Consideremos la transformación de una variedad de dimensión n , X , $x' = gx$ dada por n funciones continuas y derivables, que dependen de un conjunto de r parámetros continuos, en la forma:

$$x'^i = f^i(x^j; g^\sigma), \quad \forall x \in X, \quad \forall g \in G, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad \sigma = 1, \dots, r.$$

Esta transformación se dice que es la acción de un grupo de Lie de transformaciones si cumple las dos condiciones:

(i) G es un grupo de Lie, es decir, existe una ley de composición de grupo para los elementos de G , $c = \phi(a, b) \in G$, $\forall a, b \in G$, dada por r funciones continuas y derivables $\phi^\sigma(a, b)$ de las $2r$ coordenadas de los elementos a y b .

(ii) Las ecuaciones de transformación satisfacen

$$x'' = f(x'; b) = f(f(x; a); b) = f(x; c) = f(x; \phi(a, b)).$$

La parametrización del grupo se puede siempre tomar de tal manera que las coordenadas del elemento neutro e del grupo son $e \equiv (0, \dots, 0)$, de tal manera que un elemento infinitesimal del grupo es uno cuyas coordenadas δg^σ , $\sigma = 1, \dots, r$, son infinitesimales.

Bajo la acción de un elemento infinitesimal δg del grupo G , el cambio en las coordenadas x^i del punto $x \in X$ está dada por

$$x^i + dx^i = f^i(x; \delta g) = x^i + \left. \frac{\partial f^i(x; g)}{\partial g^\sigma} \right|_{g=e} \delta g^\sigma = x^i + u_\sigma^i(x) \delta g^\sigma,$$

después de un desarrollo Taylor a primer orden en los parámetros del grupo y sabiendo que $x^i = f^i(x; 0)$. Hay nr funciones auxiliares del grupo que se definen por

$$u_\sigma^i(x) = \left. \frac{\partial f^i(x; g)}{\partial g^\sigma} \right|_{g=e}, \quad (1.38)$$

y por lo tanto a primer orden en los parámetros, $dx^i = u_\sigma^i(x) \delta g^\sigma$.

La acción del grupo sobre la variedad X se puede extender a la acción del grupo sobre el conjunto $\mathcal{F}(X)$ de funciones continuas y derivables definidas sobre X , mediante:

$$g : h(x) \rightarrow h'(x) \equiv h(gx). \quad (1.39)$$

Si el elemento del grupo es infinitesimal, entonces

$$h'(x) = h(x^i + dx^i) = h(x^i + u_\sigma^i(x) \delta g^\sigma) = h(x) + \frac{\partial h(x)}{\partial x^i} u_\sigma^i(x) \delta g^\sigma,$$

después de un desarrollo Taylor a primer orden en los parámetros infinitesimales del grupo. La transformación infinitesimal sobre $\mathcal{F}(X)$ se puede representar mediante la acción de un operador diferencial en la forma

$$h'(x) = \left(\mathbb{I} + \delta g^\sigma u_\sigma^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \right) h(x) = (\mathbb{I} + \delta g^\sigma X_\sigma) h(x) = U(\delta g) h(x),$$

donde \mathbb{I} es el operador unidad y los operadores diferenciales

$$X_\sigma = u_\sigma^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (1.40)$$

En particular, cuando actuamos con el operador $U(\delta g) \equiv (\mathbb{I} + \delta g^\sigma X_\sigma)$ sobre la coordenada x^j obtenemos $x^j + dx^j = x^j + u_\sigma^j(x) \delta g^\sigma$.

Los operadores X_σ se denominan los **generadores** de las transformaciones infinitesimales. Hay r operadores linealmente independientes que generan un espacio vectorial real r -dimensional y tal que el conmutador de dos cualesquiera de ellos $[X_\sigma, X_\lambda]$ también pertenece a este espacio vectorial, es decir,

$$[X_\sigma, X_\lambda] = c_{\sigma\lambda}^\alpha X_\alpha, \quad \alpha, \sigma, \lambda = 1, \dots, r. \quad (1.41)$$

Los coeficientes $c_{\sigma\lambda}^\alpha$ son un conjunto de constantes reales, llamadas las **constantes de estructura** del grupo y el espacio vectorial que construyen los generadores se le llama el **álgebra de Lie** $\mathcal{L}(G)$, asociada al grupo de Lie G . Las constantes de estructura son antisimétricas en sus índices inferiores $c_{\sigma\lambda}^\alpha = -c_{\lambda\sigma}^\alpha$, y satisfacen las identidades de Jacobi:

$$c_{\sigma\lambda}^\alpha c_{\mu\alpha}^\beta + c_{\lambda\mu}^\alpha c_{\sigma\alpha}^\beta + c_{\mu\sigma}^\alpha c_{\lambda\alpha}^\beta = 0, \quad \forall \sigma, \lambda, \mu, \beta = 1, \dots, r.$$

Las ecuaciones (1.41) son las reglas de conmutación que caracterizan la estructura del álgebra de Lie del grupo.

Si una transformación finita del grupo, de parámetros g^σ , se puede hacer en n pasos más pequeños de parámetros g^σ/n , con n suficientemente grande, entonces una transformación finita $U(g)h(x)$ Se puede obtener como

$$U(g)h(x) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mathbb{I} + \frac{g^\sigma}{n} X_\sigma \right)^n h(x) = \exp(g^\sigma X_\sigma) h(x).$$

Esto define la aplicación exponencial y en este caso se dice que los parámetros g^σ son los parámetros **normales** o **canónicos**. En la parametrización normal la ley de composición de los subgrupos uniparamétricos se reduce a la suma de los correspondientes parámetros de los elementos que intervienen en la operación.

Consideremos que $\mathcal{F}(X)$ es el espacio de Hilbert de los estados de un sistema cuántico; (1.39) puede ser interpretada como la función de onda transformada bajo el elemento del grupo g . Entonces, si el operador $U(g)$ es unitario, habitualmente se escribe en la forma

$$U(g) = \exp \left(\frac{i}{\hbar} g^\sigma \tilde{X}_\sigma \right),$$

en términos de la unidad imaginaria i y la constante de Planck \hbar , de tal manera que en este caso los nuevos operadores \tilde{X}_σ son operadores autoadjuntos y representan ciertos observables del sistema. Las dimensiones físicas de estos observables dependen de las dimensiones de los parámetros del grupo g^σ , puesto que el argumento de una exponencial es adimensional, y la presencia de la constante de Planck implica que $g^\sigma \tilde{X}_\sigma$ tiene dimensiones de acción. Estos observables, teniendo en cuenta (1.40), se representan en una representación unitaria por los operadores diferenciales autoadjuntos

$$\tilde{X}_\sigma = \frac{\hbar}{i} u_\sigma^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (1.42)$$

Sin embargo, (1.39) no es la forma más general de transformación de una función de onda de un sistema cuántico, como veremos en el Capítulo 3. Pero una vez que conozcamos cómo transforma, podremos obtener las expresiones explícitas de los generadores del grupo por un procedimiento similar. En general, la función de onda transforma bajo un grupo continuo con lo que se denomina una representación unitaria proyectiva del grupo, la cual involucra en general, alguna fase adicional.

1.8.1. Operadores de Casimir

Cuando tenemos una representación de un grupo de Lie, bien sea mediante operadores lineales o por matrices que actúan sobre un espacio vectorial, podemos definir lo que se denominan operadores de Casimir. Son operadores C que pueden ser expresados como funciones de los generadores X_σ del álgebra de Lie, habitualmente en forma polinómica, y que tienen la propiedad de que conmutan con todos los generadores, esto es, satisfacen $[C, X_\sigma] = 0$, $\forall \sigma = 1, \dots, r$. En general no se expresan como combinaciones lineales reales de los X_σ y por lo tanto no pertenecen al álgebra de Lie del grupo. Pertenecen a lo que se denomina el **álgebra del grupo**, es decir, el álgebra asociativa, pero en general no conmutativa construida a partir de todas las combinaciones lineales reales o complejas de productos de los X_σ , en la correspondiente representación del grupo.

En aquellas representaciones en las que los X_σ sean operadores autoadjuntos, como en el caso de un formalismo cuántico, los operadores de Casimir pueden también ser autoadjuntos y representarán a aquellos observables que permanecen invariantes bajo cualquier transformación del grupo. En particular, cuando consideremos los grupos cinemáticos que relacionan a los observadores inerciales, los operadores de Casimir de estos grupos representarán las propiedades intrínsecas del sistema. Son aquellas propiedades que son independientes de qué observador inercial las mida. Son aquellos observables cuyas medidas toman el mismo valor cuando cambiamos de sistema de referencia

Para grupos semisimples, es decir, grupos que no poseen subgrupos invariantes Abelianos, como el grupo de rotaciones $SO(3)$, los grupos unitarios $SU(n)$ y muchos otros, se demuestra que los operadores de Casimir son polinomios reales homogéneos de los generadores X_σ , pero esto no es el caso para grupos de Lie arbitrarios. Sin embargo, para la mayor parte de los grupos con interés en física, como el grupo de Galileo, Poincaré, De Sitter, Weyl, $SL(4, \mathbb{R})$, el grupo inhomogéneo $ISL(4, \mathbb{R})$ y el grupo Conforme $SU(2, 2)$, los operadores de Casimir se pueden tomar como polinomios de coeficientes reales de los generadores.

1.8.2. Espacios homogéneos de un grupo

Una variedad X recibe el nombre de espacio homogéneo de un grupo G , si $\forall x_1, x_2 \in X$ existe al menos un elemento $g \in G$ tal que $x_2 = gx_1$. En ese caso se dice que G actúa sobre X de una forma transitiva. El término *homogéneo* nos recuerda que las propiedades locales de la variedad en el punto x se trasladan a cualquier otro punto de la variedad por medio de la acción del grupo, y por lo tanto, todos los puntos de X comparten las mismas propiedades locales.

La **órbita** de un punto x es el conjunto de puntos de la forma gx , $\forall g \in G$, tal que si X es un espacio homogéneo de G , entonces todo X es la órbita de cualquiera de sus puntos.

Dado un punto $x_0 \in X$, el **subgrupo estabilizador** (little group) de x_0 es el subgrupo H_{x_0} de G , que deja invariante al punto x_0 , es decir, $\forall h \in H_{x_0}$, $hx_0 = x_0$.

Si H es un subgrupo de G , entonces todo elemento $g \in G$ se puede escribir como $g = g'h$, donde $h \in H$, y g' es un elemento de G/H , el conjunto de cosets por la izquierda generados por el subgrupo H . Si X es un espacio homogéneo de G , puede ser generado por la acción de G sobre cualquier punto arbitrario $x_0 \in X$. Entonces $\forall x \in X$, $x = gx_0 = g'hx_0 = g'x_0$, por lo que el espacio homogéneo X es isomorfo a la variedad G/H_{x_0} .

Los espacios homogéneos de un grupo se pueden construir como estructuras cociente del grupo por todos sus posibles subgrupos continuos. Recíprocamente, se puede demostrar que si X es un espacio homogéneo de un grupo G , entonces existe un subgrupo H de G tal que X es isomorfo a G/H . Por lo tanto, el espacio homogéneo más amplio de un grupo es el propio grupo.

1.8.3. Ejemplos de grupos continuos

1. Consideremos el grupo de traslaciones de la recta:

$$x' = x + a.$$

Con $a = 0$ tenemos el elemento neutro del grupo y $-a$ representa al elemento inverso. La transformación es infinitesimal si a lo es y la escribimos como $x' = x + \delta a$. Si $f(x)$ es una función de x , la acción infinitesimal del grupo sobre f la definimos como

$$f'(x) = f(x + \delta a) = f(x) + \delta a \frac{\partial f(x)}{\partial x} = (\mathbb{I} + \delta a P) f(x).$$

Al operador $P = \partial/\partial x$ le llamamos el generador de la transformación infinitesimal y el elemento infinitesimal del grupo se convierte en el operador $\delta g \equiv \mathbb{I} + \delta a P$ al actuar sobre las variables y funciones de estas variables. Si $f(x)$ es una función invariante bajo la acción de este grupo, entonces $Pf = \partial f/\partial x = 0$, y f no depende de x .

2. Consideremos las rotaciones del plano

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \quad y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

Con $\alpha = 0$ tenemos el elemento neutro del grupo y $-\alpha$ es el inverso. Si α es infinitesimal, de valor $\delta\alpha$, a primer orden en este parámetro las ecuaciones de transformación quedan:

$$x' = x - y\delta\alpha, \quad y' = y + x\delta\alpha.$$

Si $f(x, y)$ es una función de estas variables, bajo el grupo transforma

$$f'(x, y) \equiv f(x', y') = f(x - y\delta\alpha, y + x\delta\alpha) = f(x, y) + \delta\alpha \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) = (\mathbb{I} + \delta\alpha J) f(x, y)$$

donde el operador diferencial

$$J = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y},$$

es el generador de las rotaciones infinitesimales. Si $f(x, y)$ es invariante bajo rotaciones, entonces $Jf = 0$, es decir es solución de la ecuación diferencial

$$-y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}, \quad x dx + y dy = 0$$

ya que el elemento de arco de componentes (dx, dy) es ortogonal al gradiente de f y por lo tanto f debe ser una función arbitraria de las curvas $x^2 + y^2 = \text{cte}$, es decir $f(x^2 + y^2)$.

3. Consideremos un boost Galileano a lo largo del eje OX ,

$$t' = t, \quad x' = x + vt.$$

Con $v = 0$ tenemos el elemento neutro del grupo y $-v$ representa el elemento inverso. La transformación infinitesimal es con δv infinitesimal y queda:

$$t' = t, \quad x' = x + \delta vt.$$

La acción del elemento infinitesimal sobre una función $f(t, x)$ viene dada por

$$f'(t, x) = f(t', x') = f(t, x) + \delta vt \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} = (\mathbb{I} + \delta v K) f(t, x),$$

donde $K = t\partial/\partial x$ es el generador de los boosts a lo largo del eje OX .

Capítulo 2

Ejemplos de partículas con espín

PARTÍCULAS NO RELATIVISTAS

2.1. Partícula puntual no relativista

El grupo cinemático asociado al Principio de Relatividad Restringido es el grupo de Galileo \mathcal{G} . Ver el Apéndice al final del capítulo sobre el grupo Galileo para la notación y propiedades que vamos a usar en este capítulo.

Consideremos un espacio cinemático caracterizado por las variables $(t, \mathbf{r}) \equiv x$, con dominios $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, similares a los parámetros del grupo b y \mathbf{a} , respectivamente. Supondremos que son funciones de un cierto parámetro de evolución τ y que en cualquier instante τ de la evolución dos observadores inerciales cualesquiera relacionan sus medidas espacio-temporales mediante:

$$t'(\tau) = t(\tau) + b, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{r}'(\tau) = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{r}(\tau) + \mathbf{v}t(\tau) + \mathbf{a}. \quad (2.2)$$

Debido a cómo transforman estas variables, las interpretamos como el tiempo y la posición de la partícula, respectivamente. Si suponemos que el parámetro de evolución τ es invariante para todos los observadores inerciales, tomando la derivada τ de ambos miembros resulta que las derivadas de las variables cinemáticas en cualquier instante τ , transforman:

$$\dot{t}'(\tau) = \dot{t}(\tau), \quad (2.3)$$

$$\dot{\mathbf{r}}'(\tau) = R(\boldsymbol{\mu})\dot{\mathbf{r}}(\tau) + \mathbf{v}\dot{t}(\tau). \quad (2.4)$$

Si definimos la velocidad de la partícula mediante $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt = \dot{\mathbf{r}}/\dot{t}$, entonces la velocidad de la partícula transforma entre observadores inerciales en la forma:

$$\mathbf{u}'(\tau) = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{u}(\tau) + \mathbf{v}.$$

De esta manera podríamos obtener la forma de transformar de las sucesivas derivadas. La Lagrangiana que describa a esta partícula será función $L(t, \mathbf{r}, \mathbf{u})$ y en la descripción paramétrica de la evolución $\tilde{L}(t, \mathbf{r}, \dot{t}, \dot{\mathbf{r}}) = \tilde{L}(x, \dot{x})$ y homogénea de grado 1 de las derivadas \dot{x}_i . Esta homogeneidad nos lleva a la forma general:

$$\tilde{L} = T\dot{t} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}}, \quad (2.5)$$

donde $T = \partial\tilde{L}/\partial\dot{t}$ y $R_i = \partial\tilde{L}/\partial\dot{r}_i$ son todavía funciones desconocidas de las variables cinemáticas y de sus derivadas. Además, son funciones homogéneas de grado cero de las derivadas de las variables cinemáticas, por lo que son funciones de $(t, \mathbf{r}, \mathbf{u})$. Esta homogeneidad es independiente de que la partícula sea libre o esté sometida a alguna interacción.

Si la partícula es libre, las ecuaciones dinámicas deben ser invariantes para el conjunto de observadores inerciales, ya que tanto desde el punto de vista activo como pasivo, el cambio de sistema de referencia o la transformación cinemática de la partícula no pueden alterar sus leyes dinámicas. Si estuviera bajo una interacción, habría que desplazar también los mecanismos que interaccionan con ella, por lo que en general las ecuaciones dinámicas no serán invariantes, ya que los cambios que hacemos entre observadores inerciales afectan solamente a las variables cinemáticas y sus derivadas, asociadas a la partícula y no a los mecanismos de interacción como campos, imanes, etc.

Desde el punto de vista de las transformaciones infinitesimales, como $\tilde{L}_0(t, \mathbf{r}, \dot{t}, \dot{\mathbf{r}})$ depende de estas variables que transforman según (2.1-2.4), los diferentes generadores del grupo de Galileo al actuar sobre funciones de estas variables son:

$$H = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{P} = \nabla, \quad \mathbf{J} = \mathbf{r} \times \nabla + \dot{\mathbf{r}} \times \nabla_{\dot{\mathbf{r}}}, \quad \mathbf{K} = t\nabla + \dot{t}\nabla_{\dot{t}}.$$

Si la Lagrangiana es invariante bajo las traslaciones, entonces $H\tilde{L}_0 = 0$ y $\mathbf{P}\tilde{L}_0 = 0$, implica que \tilde{L}_0 no es función de t ni de \mathbf{r} . Bajo rotaciones $\mathbf{J}\tilde{L}_0 = 0$, e implica que es función de $\dot{\mathbf{r}}^2$ y también de \dot{t} y debe ser homogénea de grado 1 en estas derivadas. Finalmente, si es invariante bajo los boosts Galileanos $\mathbf{K}\tilde{L}_0 = 0$, lo que implica que $\partial\tilde{L}_0/\partial\dot{\mathbf{r}} = 0$, y sería independiente de $\dot{\mathbf{r}}$. Como esto no puede ser, si $\mathbf{K}\tilde{L}_0 = d(f(t, \mathbf{r}))/d\tau$, con dimensiones de masa×distancia, es una derivada total y las ecuaciones dinámicas resultan ser invariantes. De acuerdo con la estructura de la función gauge (2.6), se tiene

$$\mathbf{K}\tilde{L}_0 = m\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{d\tau}(m\mathbf{r}). \quad \dot{t}\nabla_{\dot{t}}\tilde{L}_0 = m\dot{\mathbf{r}}, \quad \Rightarrow \quad \tilde{L}_0 = \frac{1}{2}m\frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{\dot{t}} + F(\dot{t}),$$

siendo $F(\dot{t})$ una función arbitraria de \dot{t} que debe ser homogénea de grado 1, por lo que en general, tiene la forma $F = -H_0\dot{t}$, con H_0 una constante, que se interpreta como la energía interna.

Asociada a esta variedad X , la función gauge del grupo de Galileo es

$$\alpha(g; x) = \xi(g, x) = m(v^2 t/2 + \mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{r}), \quad (2.6)$$

donde el parámetro m se interpreta como la masa de la partícula y $\xi(g, g')$ es el exponente del grupo \mathcal{G} .

Si en vez del análisis infinitesimal hacemos el análisis bajo transformaciones finitas, la transformación de la Lagrangiana libre bajo una transformación finita general del grupo de Galileo es

$$\tilde{L}(x', \dot{x}') = \tilde{L}(x, \dot{x}) + m(v^2 \dot{t}/2 + \mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\dot{\mathbf{r}}). \quad (2.7)$$

Por lo tanto

$$T' = \frac{\partial\tilde{L}'}{\partial\dot{t}'} = \left(\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{t}} + \frac{1}{2}mv^2 \right) \frac{\partial\dot{t}}{\partial\dot{t}'} + \left(\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\mathbf{r}}_i} + mv_j R(\boldsymbol{\mu})_{ji} \right) \frac{\partial\dot{r}_i}{\partial\dot{t}'}, \quad (2.8)$$

pero de (2.3) y (2.4) tenemos que $\partial\dot{t}/\partial\dot{t}' = 1$ y $\partial\dot{r}_i/\partial\dot{t}' = -R^{-1}(\boldsymbol{\mu})_{ik}v_k$, respectivamente, por lo que

$$T' = T - \frac{1}{2}mv^2 - \mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{R}. \quad (2.9)$$

Análogamente

$$\mathbf{R}' = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{R} + m\mathbf{v}. \quad (2.10)$$

Los momentos canónico conjugados de los tres grados de libertad independientes $q_i = r_i$, son $p_i = \partial\tilde{L}/\partial\dot{r}_i$, y por lo tanto el teorema de Noether nos lleva a las siguientes constantes del movimiento bajo los diferentes subgrupos de simetrías:

a) Bajo traslaciones temporales la función gauge (2.6) es nula, $\delta t = \delta b$, $M = 1$, mientras que $\delta r_i = 0$ y la constante se reduce a la expresión $\mathbf{R} \cdot d\mathbf{r}/dt - \tilde{L}/\dot{t} = -T$.

- b)** Bajo traslaciones espaciales también $\alpha(g; x) \equiv 0$, $\delta t = 0$, $M = 0$, mientras que $\delta r_i = \delta a_i$, $M_{ij} = \delta_{ij}$ y el observable conservado es \mathbf{R} .
- c)** Bajo transformaciones Galileanas puras con velocidad constante (boosts) $\delta t = 0$ y $M = 0$, en tanto que $\delta r_i = t\delta v_i$ y $M_{ij} = t\delta_{ij}$, pero ahora la función gauge a primer orden en el parámetro de velocidad es $\alpha(\delta \mathbf{v}; x) = m\mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{v}$, por lo que el observable conservado es $m\mathbf{r} - \mathbf{P}t$.
- d)** Bajo rotaciones $\alpha(g; x) \equiv 0$, $\delta t = 0$ y $M = 0$, pero $\delta r_i = \varepsilon_{ijk}r_j\delta\alpha_k$ y $M_{ik} = \varepsilon_{ijk}r_j$ y la magnitud conservada es $\mathbf{r} \times \mathbf{R}$.

Recolectando estas magnitudes, les podemos dar los siguientes nombres y símbolos:

$$\text{Momento temporal } H = -T, \quad (2.11)$$

$$\text{Momento lineal } \mathbf{P} = \mathbf{R} = \mathbf{p}, \quad (2.12)$$

$$\text{Momento cinemático } \mathbf{K} = m\mathbf{r} - \mathbf{P}t, \quad (2.13)$$

$$\text{Momento angular } \mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}. \quad (2.14)$$

Les hemos reservado los mismos símbolos en mayúsculas que los de los correspondientes generadores del grupo de simetrías, que dejan las ecuaciones dinámicas invariantes: Incluso sus nombres hacen referencia al tipo de parámetro de la correspondiente transformación.

En general, lo que hemos definido como el momento temporal, recibe habitualmente el nombre de **energía** o bien de **Hamiltoniano** del sistema. Sin embargo, ninguno de los observables asociados a los grupos uniparamétricos de simetrías es definido positivo. Todos ellos pueden tomar ambos signos, ya que si el parámetro de una transformación de un grupo es positivo el de su inversa es negativo y los generadores de las transformaciones infinitesimales son vectores tangentes a las órbitas, y por lo tanto pueden tener componentes de cualquier signo. Por energía entendemos un observable que es siempre definido positivo por lo que en realidad la energía se definiría como $E = |H|$. Esto es importante a la hora de clasificar las diferentes partículas que vamos a encontrar, sobre todo en la formulación relativista, en la que, por lo que respecta a H , el signo de H es también una propiedad intrínseca, independiente del observador inercial que la mida. En la formulación relativista llamamos partícula a aquél sistema para el que $H_p > 0$ y antipartícula cuando $H_a < 0$. En ambos casos, si partícula y antipartícula poseen masa m y están en reposo, $H_p = mc^2$ y $H_a = -mc^2$, y su energía es $E = mc^2 = |H|$. Por abuso de lenguaje y porque históricamente así se le ha denominado y se le sigue denominando, es posible que a lo largo de las notas usemos el nombre de energía para el observable H .

Para el momento cinemático existen nombres alternativos en la literatura. Así, Levy-Leblond lo denomina *momento Galileano* y en otros textos, escasos por cierto, se le suele denominar *momento estático*, porque es un observable de dimensiones de masa \times distancia. Siendo consistentes con la propuesta primera le deberíamos denominar *momento Poincaré* en el caso relativista. En estas notas usaremos el nombre de momento cinemático, incluso en la formulación relativista.

Si tomamos la derivada τ en (2.13) del momento cinemático $\dot{\mathbf{K}} = 0$, por ser una constante del movimiento, implica $\mathbf{P} = m\dot{\mathbf{r}}/t = m\mathbf{u} = \mathbf{R}$, donde \mathbf{u} es la derivada temporal de la posición de la partícula.

Las seis condiciones $\mathbf{P} = 0$ y $\mathbf{K} = 0$, implican $\mathbf{u} = 0$ y $\mathbf{r} = 0$, de tal manera que la partícula está en reposo y su posición localizada en el origen del sistema de referencia del observador. Para definir de forma única un observador nos falta fijar una rotación arbitraria y una traslación temporal. Sin embargo, a falta de estas operaciones, decimos que la clase de observadores para los que $\mathbf{P} = 0$ y $\mathbf{K} = 0$, representan el observador del centro de masa. Estas seis condiciones las utilizaremos también para definir el observador del centro de masa, en el caso relativista.

A partir de (2.9) y (2.10) vemos que la energía (momento temporal) y el momento lineal transforman como:

$$H' = H + \mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{P} + \frac{1}{2}mv^2, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{P}' = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{P} + m\mathbf{v}. \quad (2.16)$$

Entonces, si H_0 y $\mathbf{P} = 0$ son la energía y el momento lineal medidos por el observador del centro de masa, para un observador arbitrario que ve a la partícula moviéndose con velocidad \mathbf{u} , resulta de (2.15) y (2.16) que

$$H = H_0 + \frac{1}{2}m\mathbf{u}^2 = H_0 + \mathbf{P}^2/2m, \quad \mathbf{P} = m\mathbf{u}.$$

La Lagrangiana para la partícula puntual es

$$\tilde{L} = T\dot{t} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -H\dot{t} + \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -H_0\dot{t} + \frac{m}{2} \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{\dot{t}}, \quad (2.17)$$

donde H_0 es una constante arbitraria que no juega ningún papel en la dinámica ya que el término que la contiene es una derivada total y puede tomarse como $H_0 = 0$. Estará relacionada con el término mc^2 de la partícula puntual relativista.

Si definimos el espín como el momento angular con respecto al punto \mathbf{r} , resulta

$$\mathbf{S} = \mathbf{J} - \mathbf{r} \times \mathbf{P} = \mathbf{J} - \frac{1}{m} \mathbf{K} \times \mathbf{P} = 0, \quad (2.18)$$

es una constante del movimiento idénticamente nula, por lo que la partícula puntual es una partícula sin espín.

2.1.1. Interacción con el exterior

La Lagrangiana más general de la partícula puntual es de la forma $\tilde{L} = T\dot{t} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}}$, donde las funciones T y \mathbf{R} son funciones de $t, \dot{t}, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$ y homogéneas de grado cero en las derivadas \dot{t} y $\dot{\mathbf{r}}$, por lo que son funciones de las variables $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{r}}/\dot{t}$. En el caso libre, la Lagrangiana es invariante por traslaciones y por lo tanto no son funciones ni de t ni de \mathbf{r} , y toman la forma, en el caso Galileano

$$T_0 = -\frac{1}{2}m\mathbf{u}^2 = -H_m, \quad \mathbf{R}_0 = m\mathbf{u} = \mathbf{P}_m$$

mientras que en el caso Poincaré, ésta resulta ser, como veremos en la sección 2.3,

$$T_0 = \frac{-mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = -H_m, \quad \mathbf{R}_0 = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \mathbf{P}_m.$$

De ahí que la Lagrangiana libre tanto en el caso relativista como en el no relativista, se pueda escribir como $\tilde{L}_0 = T_0\dot{t} + \mathbf{R}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}} = -H_m\dot{t} + \mathbf{P}_m \cdot \dot{\mathbf{r}}$. A estas magnitudes relacionadas con la Lagrangiana libre, que da cuenta de la masa de la partícula, las hemos denotado con el subíndice m , para indicar que son propiedades mecánicas.

En el caso general, si la Lagrangiana de la partícula puntual bajo una actuación exterior es \tilde{L} , las ecuaciones dinámicas no tienen por qué ser invariantes por traslación, ya que cuando desplazamos las variables t y \mathbf{r} , si no desplazamos también cuantos dispositivos interaccionan con ella, la dinámica será diferente. Pero la homogeneidad de \tilde{L} en términos de \dot{t} y $\dot{\mathbf{r}}$ se mantendrá. Podemos definir la parte de interacción con el exterior como la diferencia de estas dos funciones homogéneas $\tilde{L}_I = \tilde{L} - \tilde{L}_0$, que sigue manteniendo la misma estructura homogénea en términos de las derivadas de las variables cinemáticas. Entonces, $\tilde{L}_I = A_0\dot{t} + \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}}$, donde $A_0 = \partial\tilde{L}_I/\partial\dot{t}$, $\mathbf{A} = \partial\tilde{L}_I/\partial\dot{\mathbf{r}}$. Tanto A_0 como \mathbf{A} serán en general, funciones de $t, \mathbf{r}, \mathbf{u}$. Está claro que estos términos modifican las definiciones de la H y de la \mathbf{P} de la partícula libre, y ahora $H = -\partial\tilde{L}/\partial\dot{t} = H_m - A_0$ y $\mathbf{P} = \partial\tilde{L}/\partial\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{P}_m + \mathbf{A}$. La función $-A_0$ es la modificación del momento temporal mecánico H_m , y \mathbf{A} la modificación del momento lineal mecánico \mathbf{P}_m , debidas a la interacción. Además de los observables H y \mathbf{P} , también \mathbf{K} y \mathbf{J} son modificados por los agentes externos.

Vamos a ver que la dependencia en \mathbf{u} , tanto de A_0 como de \mathbf{A} es innecesaria, por lo que la interacción general, será dada por funciones (que denominaremos **campos**) solamente espacio-temporales e independientes de la velocidad. En efecto, consideremos el caso Galileano. Las ecuaciones dinámicas a partir de la Lagrangiana en su descripción temporal

$$L = \frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 + A_0(t, \mathbf{r}) + \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{u},$$

son

$$\frac{\partial A_0}{\partial r_i} + u_j \frac{\partial A_j}{\partial r_i} - \frac{d}{dt} (m u_i + A_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

es decir

$$m \frac{d^2 r_i}{dt^2} = \frac{\partial A_0}{\partial r_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} + u_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial r_i} - \frac{\partial A_i}{\partial r_j} \right)$$

el último término entre paréntesis es una función antisimétrica en i y j , por lo que puede ponerse como $\epsilon_{ijk} B_k u_j$, con lo que la variación del momento lineal mecánico de la partícula puntual

$$\frac{d\mathbf{P}_m}{dt} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}, \quad (2.19)$$

con

$$\mathbf{E} = \nabla A_0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

es igual a la fuerza de Lorentz asociada a sendos campos \mathbf{E} y \mathbf{B} funciones solamente de t y de \mathbf{r} . En el caso relativista también obtendríamos que $d\mathbf{P}_m/dt = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}$, pero la expresión de $\mathbf{P}_m = \gamma(u)m\mathbf{u}$ en términos de la velocidad, es diferente. Si tanto A_0 como \mathbf{A} fueran funciones de \mathbf{u} , al plantear las ecuaciones dinámicas tendríamos:

$$\frac{\partial A_0}{\partial r_i} + u_j \frac{\partial A_j}{\partial r_i} - \frac{d}{dt} \left(m u_i + \frac{\partial A_0}{\partial u_i} + A_i + u_j \frac{\partial A_j}{\partial u_i} \right) = 0.$$

Ahora bien, de la homogeneidad de la $\tilde{L}_I = A_0 \dot{t} + A_j \dot{r}_j$, al derivar ambos miembros con respecto a \dot{r}_j , se obtiene:

$$A_j = \dot{t} \frac{\partial A_0}{\partial u_j} \frac{1}{\dot{t}} + \dot{r}_i \frac{\partial A_i}{\partial u_j} \frac{1}{\dot{t}} + A_j,$$

por lo que el término adicional que aparece en las ecuaciones dinámicas

$$\frac{\partial A_0}{\partial u_i} + u_j \frac{\partial A_j}{\partial u_i} = 0,$$

es idénticamente nulo y no interviene en la dinámica, como si tanto A_0 como \mathbf{A} , fueran independientes de \mathbf{u} como habíamos supuesto. Lo mismo se puede aplicar al caso de la partícula puntual relativista, por lo que la fuerza más general es una fuerza de tipo de Lorentz, con campos solamente espacio-temporales. Respecto de la variación de la energía mecánica, solamente la parte de la fuerza de interacción \mathbf{E} realiza trabajo. En efecto, en el caso no relativista,

$$H_m = \frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2, \quad \frac{dH_m}{dt} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{E}.$$

En el caso relativista, $H_m = \gamma(u)mc^2$, $\mathbf{P}_m = \gamma(u)m\mathbf{u}$, pero al ser una partícula elemental, el invariante masa, definido por $H_m^2/c^2 - \mathbf{P}_m^2 = m^2c^2$, no cambia debido a la interacción, por lo que derivando temporalmente esta expresión, tenemos:

$$\frac{2}{c^2} H_m \frac{dH_m}{dt} - 2\mathbf{P}_m \cdot \frac{d\mathbf{P}_m}{dt} = 0, \quad \frac{dH_m}{dt} = \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{P}_m}{dt} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{E}.$$

En ambos casos, la variación por unidad de tiempo de la energía mecánica de la partícula, es el trabajo de la fuerza \mathbf{E} debida a la interacción, a lo largo de la trayectoria que sigue el centro de masa de la partícula. Como los campos externos están definidos en el punto \mathbf{r} , este punto también representa la localización del centro de carga de la partícula.

Como $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, satisface $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, y se trata de un campo pseudovectorial sin fuentes, de divergencia nula. Por otra parte, tomando el rotacional de \mathbf{E} , se anula el $\nabla \times (\nabla A_0)$, por lo que unas ecuaciones que satisfacen estos campos son:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.20)$$

que son parte de las ecuaciones de Maxwell del campo electromagnético. Como son campos vectoriales, nos falta conocer, para que los campos queden definidos, cómo son las $\nabla \cdot \mathbf{E}$ y $\nabla \times \mathbf{B}$ y las correspondientes condiciones de contorno. En el caso de las ecuaciones de Maxwell, éstas son:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.21)$$

y no aparecen mientras no establezcamos la parte de la Lagrangiana que describa a los campos libres y cómo éstos son modificados por la presencia de la partícula. Es decir nos falta establecer la dinámica de los campos. En el caso del campo electromagnético ρ es la densidad de carga eléctrica y \mathbf{j} el vector densidad de corriente. Si tomamos la divergencia de la segunda ecuación y usamos la primera, llegamos a

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

que es la ley fundamental de conservación de la carga eléctrica.

Para una partícula puntual de carga e localizada en \mathbf{r} en el instante t resulta, $\rho = e\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{x})\delta(t - T)$ y $\mathbf{j} = e\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{x})\delta(t - T)\mathbf{u}$, siendo \mathbf{x} cualquier punto del espacio, T cualquier otro instante y $\delta(x - a)$ la función delta de Dirac. Las ecuaciones (2.20) no dependen para nada del estado de la partícula, mientras que las (2.21) nos muestran cómo la presencia de la partícula, y por lo tanto de la corriente a ella asociada, modifica localmente a los campos en el entorno de la misma. Hay que tener presente que lo que aquí aparecen son derivadas espacio-temporales de los campos, es decir derivadas con respecto a las variables cinemáticas de la partícula, por lo que se refieren desde el punto de vista local a cómo cambian estos campos en puntos próximos a la trayectoria de la partícula. La ley de conservación de la carga eléctrica nos pone de manifiesto la existencia de una propiedad escalar ligada a la partícula y que viaja con ella a lo largo de su trayectoria, por lo que se refuerza de nuevo el que el punto \mathbf{r} es el soporte o localización de la carga e .

Este formalismo no nos garantiza que los campos A_0 y \mathbf{A} , o bien sus campos derivados \mathbf{E} y \mathbf{B} , satisfagan todas las ecuaciones de Maxwell, pero sí que la interacción es invariante bajo (2.22), como veremos a continuación. Pero parece indicar que la posible interacción que una partícula puntual pueda sufrir es mediante una fuerza de tipo Lorentz, expresada en términos de unos campos \mathbf{E} y \mathbf{B} sin restricción en cuanto a su alcance. La gravedad como interacción, ha quedado fuera del contexto de posibles interacciones, por la definición del Principio de Relatividad Restringido. De esta forma de proceder no se determinarían las otras interacciones conocidas de corto alcance como las de tipo fuerte o débil, que están confinadas a regiones del orden de 10^{-15} a 10^{-18} m, distancias en las que los fenómenos cuánticos son relevantes. Estas últimas interacciones se describen habitualmente en el contexto de la teoría cuántica de campos y no son predichas en esta descripción clásica.

Los campos A_0 y \mathbf{A} , no están unívocamente determinados, ya que lo que interviene en la dinámica son sus derivadas espacio-temporales. Si los modificamos en la forma

$$A_0 \rightarrow A_0 + \frac{\partial \Lambda(t, \mathbf{r})}{\partial t}, \quad A_i \rightarrow A_i + \frac{\partial \Lambda(t, \mathbf{r})}{\partial r_i}, \quad (2.22)$$

donde $\Lambda(t, \mathbf{r})$ es una función arbitraria, la Lagrangiana \tilde{L}_I se modifica en la forma

$$\frac{\partial \Lambda(t, \mathbf{r})}{\partial t} \dot{t} + \frac{\partial \Lambda(t, \mathbf{r})}{\partial r_i} \dot{r}_i = \frac{d\Lambda}{d\tau},$$

que resulta ser una derivada total y puede eliminarse por no intervenir en la dinámica. La transformación (2.22), que deja invariantes las ecuaciones dinámicas, modificando los campos externos en cada punto del espacio-tiempo, recibe el nombre de **transformación gauge local**.

Pudiera parecer que al dejar las ecuaciones dinámicas invariantes, nos produciría una ley de conservación, utilizando el teorema de Noether. Pero no se trata de una transformación de un grupo uniparamétrico, sino de una transformación de tipo general, generada por una función arbitraria Λ , que hace que la Lagrangiana no sea invariante, sino que transforme con una derivada total. Parece entonces que si asociado a ese término existe algún parámetro del sistema, éste puede ser la carga, lo mismo que en el caso no relativista el parámetro masa nos caracterizaba a la función gauge cuya derivada total aparecía en la variación de la Lagrangiana.

2.2. Partícula Galileana libre con espín

La partícula elemental no relativista más general ¹ es el sistema Lagrangiano cuyo espacio cinemático X es todo el grupo de Galileo \mathcal{G} . Describimos el estado de la partícula en cada instante τ , mediante el conocimiento del tiempo $t(\tau)$, la posición de un punto $\mathbf{r}(\tau)$, la velocidad de este punto $\mathbf{u}(\tau) = d\mathbf{r}/dt$ y la orientación de un sistema cartesiano de ejes unidad $\mathbf{e}_i(\tau)$, $i = 1, 2, 3$, ligados a ese punto. Estas nueve componentes $(\mathbf{e}_i)_j$ se pueden expresar en términos de tres parámetros esenciales $\boldsymbol{\rho}(\tau)$, como se puede ver en el apéndice 2.7 y en la expresión:

$$(\mathbf{e}_i)_j = R(\boldsymbol{\rho})_{ji} = \frac{1}{1 + \rho^2} [(1 - \rho^2) \delta_{ji} + 2\rho_j \rho_i + 2\varepsilon_{ikj} \rho_k] \quad (2.23)$$

Sin embargo, esta asignación que hace un observador inercial de las variables de orientación de la partícula, como un sistema de tres vectores unidad ortogonales ligados al punto es totalmente arbitraria. Esto quiere decir que la Lagrangiana no va a ser una función explícita del valor actual de estas variables, ya que cualquier otra asignación nos daría los mismos valores para la acción. Pero lo que verdaderamente importa es que esta orientación va cambiando, por lo que la Lagrangiana sí va a ser función de cómo la orientación cambia, es decir de la velocidad angular con que este sistema de ejes rota, la cual es independiente de cual sea esa asignación inicial. Quiere esto decir que si cualquier observador modifica la orientación de los ejes unidad que asigna a la partícula, esto no cambia el valor de la velocidad angular de los mismos, como veremos más adelante.

Tendremos por lo tanto otra simetría adicional a la del grupo cinemático, la de las rotaciones locales de los sistemas de ejes unidad asociados al punto. Le llamaremos el grupo de rotaciones Local, y lo designaremos por $SO(3)_L$, el cual conmuta con todo el grupo de Galileo, por lo que al menos el grupo de simetrías espacio-temporales es el $\mathcal{G} \otimes SO(3)_L$. El resultado es que \tilde{L} es función de las variables de orientación $\boldsymbol{\rho}$ y $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ a través de su dependencia de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$.

Entonces las variables cinemáticas son las diez variables reales $x(\tau) \equiv (t(\tau), \mathbf{r}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \boldsymbol{\rho}(\tau))$ con dominios $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ y $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}_c^3$ similarmente a los correspondientes parámetros del grupo. La relación entre los valores $x'(\tau)$ y $x(\tau)$ en cualquier instante τ para cualquier par de observadores inerciales, y usando la representación pasiva de las rotaciones, está dado por:

$$t'(\tau) = t(\tau) + b, \quad (2.24)$$

$$\mathbf{r}'(\tau) = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{r}(\tau) + \mathbf{v}t(\tau) + \mathbf{a}, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{u}'(\tau) = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{u}(\tau) + \mathbf{v}, \quad (2.26)$$

$$\boldsymbol{\rho}'(\tau) = \frac{\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\rho}(\tau) - \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\rho}(\tau)}{1 - \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\rho}(\tau)}. \quad (2.27)$$

¹ M. Rivas, *J. Phys.* **A 18**, 1971 (1985).

Esta última expresión corresponde a que cada vector unidad transforma en la forma $\mathbf{e}'_i = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{e}_i$, y formando con los tres ejes como vectores columna la matriz $R(\boldsymbol{\rho})$, resulta $R(\boldsymbol{\rho}') = R(\boldsymbol{\mu})R(\boldsymbol{\rho})$ y esta composición de matrices de rotación equivale a que entre los parámetros esenciales exista la ley de transformación mencionada (2.27).

Entre estas variables cinemáticas existen las tres ligaduras diferenciales $\mathbf{u}(\tau) = \dot{\mathbf{r}}(\tau)/\dot{t}(\tau)$, que junto con la homogeneidad de la Lagrangiana \tilde{L} en términos de las derivadas de las variables cinemáticas:

$$\tilde{L}(x, \dot{x}) = (\partial\tilde{L}/\partial\dot{x}_i)\dot{x}_i, \quad (2.28)$$

nos reducen de diez a seis los grados de libertad esenciales de la partícula.

Estos grados de libertad son, la posición $\mathbf{r}(t)$ y la orientación $\boldsymbol{\rho}(t)$. La Lagrangiana depende hasta la segunda derivada de $\mathbf{r}(t)$ y de la primera derivada de $\boldsymbol{\rho}(t)$. La expresión (2.28) está dada explícitamente por:

$$\tilde{L} = T\dot{t} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{V} \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}, \quad (2.29)$$

donde las funciones $T = \partial\tilde{L}/\partial\dot{t}$, $R_i = \partial\tilde{L}/\partial\dot{r}^i$, $U_i = \partial\tilde{L}/\partial\dot{u}^i$, $V_i = \partial\tilde{L}/\partial\dot{\rho}^i$ serán, en general, funciones de las variables cinemáticas $(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ y funciones homogéneas de grado cero en términos de las derivadas $(\dot{t}, \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\boldsymbol{\rho}})$.

Las variables generalizadas son \mathbf{r} , \mathbf{u} y $\boldsymbol{\rho}$, y sus momentos canónico conjugados son:

$$\mathbf{p}_r = \frac{\partial L}{\partial(d\mathbf{r}/dt)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial(d^2\mathbf{r}/dt^2)} \right) = \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\mathbf{r}}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\mathbf{u}}} \right) = \mathbf{R} - \frac{d\mathbf{U}}{dt},$$

$$\mathbf{p}_u = \frac{\partial L}{\partial(d\mathbf{u}/dt)} = \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\mathbf{u}}} = \mathbf{U},$$

$$\mathbf{p}_\rho = \frac{\partial L}{\partial(d\boldsymbol{\rho}/dt)} = \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{\rho}}} = \mathbf{V}.$$

Como variables canónico-conjugadas, \mathbf{p}_r es el momento conjugado de \mathbf{r} , \mathbf{p}_u es el momento conjugado de \mathbf{u} y \mathbf{p}_ρ es el momento conjugado de las variables de orientación $\boldsymbol{\rho}$.

Si suponemos que el parámetro de evolución τ es invariante, las variables derivadas transforman bajo \mathcal{G} :

$$\dot{t}'(\tau) = \dot{t}(\tau), \quad (2.30)$$

$$\dot{\mathbf{r}}'(\tau) = R(\boldsymbol{\mu})\dot{\mathbf{r}}(\tau) + \mathbf{v}\dot{t}(\tau), \quad (2.31)$$

$$\dot{\mathbf{u}}'(\tau) = R(\boldsymbol{\mu})\dot{\mathbf{u}}(\tau), \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\rho}}'(\tau) &= \frac{(\dot{\boldsymbol{\rho}}(\tau) - \boldsymbol{\mu} \times \dot{\boldsymbol{\rho}}(\tau))(1 - \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\rho}(\tau))}{(1 - \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\rho}(\tau))^2} + \\ &\quad \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}(\tau)(\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\rho}(\tau) - \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\rho}(\tau))}{(1 - \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\rho}(\tau))^2}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

En vez de la derivada $\dot{\boldsymbol{\rho}}(\tau)$ que transforma de una manera complicada, es mejor definir la velocidad angular de la partícula $\boldsymbol{\omega}$ como función de ella, en la representación pasiva, en la forma

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{2}{1 + \boldsymbol{\rho}^2}(-\dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\rho} \times \dot{\boldsymbol{\rho}}). \quad (2.34)$$

Es una función lineal de $\dot{\boldsymbol{\rho}}$, y transforma, como vemos más abajo, entre observadores inerciales como:

$$\boldsymbol{\omega}'(\tau) = R(\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\omega}(\tau). \quad (2.35)$$

Estamos interpretando la matriz de rotación que define la orientación de la partícula $R(\boldsymbol{\rho}(\tau))$ como una matriz cuyas tres columnas representan, en el instante τ , las componentes de los tres vectores unidad ligados al punto. Entonces $R(\boldsymbol{\rho}(\tau))$ representaría la rotación que lleva el sistema de ejes ligado a la partícula en el instante $\tau = 0$ al sistema cartesiano en el instante τ .

Si tenemos en $\tau = 0$ los ejes $\mathbf{e}_i(0)$, que definen por columnas la matriz de rotación $R(\boldsymbol{\rho}(0))$, en el instante τ serán

$$((\mathbf{e}_1(\tau))(\mathbf{e}_2(\tau))(\mathbf{e}_3(\tau))) = R(\boldsymbol{\rho}(\tau))R(\boldsymbol{\rho}(0))$$

y su cambio por unidad de parámetro τ

$$((\dot{\mathbf{e}}_1(\tau))(\dot{\mathbf{e}}_2(\tau))(\dot{\mathbf{e}}_3(\tau))) = \dot{R}(\boldsymbol{\rho}(\tau))R(\boldsymbol{\rho}(0)) = \dot{R}(\boldsymbol{\rho}(\tau))R^{-1}(\boldsymbol{\rho}(\tau))((\mathbf{e}_1(\tau))(\mathbf{e}_2(\tau))(\mathbf{e}_3(\tau)))$$

con lo que la velocidad de cambio de cada eje, considerado como vector columna, es la acción sobre el propio eje en el instante τ de una matriz

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{d\tau} = \dot{R}(\boldsymbol{\rho}(\tau))R^{-1}(\boldsymbol{\rho}(\tau))\mathbf{e}_i(\tau) = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{e}_i(\tau),$$

donde la matriz $\boldsymbol{\Omega} = \dot{R}R^{-1} = \dot{R}R^T$ es antisimétrica. En efecto, en cualquier instante τ se cumple, $R(\boldsymbol{\rho}(\tau))R^T(\boldsymbol{\rho}(\tau)) = \mathbb{I}$, donde el superíndice T significa la matriz transpuesta, y \mathbb{I} es la matriz unidad 3×3 . Si tomamos la derivada con respecto a τ de esta expresión, $\dot{R}R^T + R\dot{R}^T = \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}^T = 0$, por lo que las tres componentes esenciales de la matriz antisimétrica $\boldsymbol{\Omega}$ definen un vector $\boldsymbol{\omega}$

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix},$$

de tal manera que podemos escribir la dinámica de cada vector unidad como

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{d\tau} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i.$$

y $\boldsymbol{\omega}$ se interpreta como la velocidad angular con que rota el sistema cartesiano ligado al punto. Las componentes de $\boldsymbol{\omega}$, expresadas como funciones de las variables $\boldsymbol{\rho}$ y $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ vienen dadas en (2.34).

Si cada observador inercial cambia la matriz $R(\tau)$ formada por los tres vectores unidad en el instante τ , por otra cualquiera $R'(\tau) = R(\tau)M$, donde M es cualquier matriz ortogonal, entonces $R'^T(\tau) = M^T R^T(\tau)$, y para este observador $\boldsymbol{\Omega}' = \dot{R}'R'^T = \dot{R}MM^T R^T = \dot{R}R^T = \boldsymbol{\Omega}$, por lo que cualquier asignación que este observador haga de la orientación, nos produce la misma expresión de la velocidad angular en este sistema de referencia en cualquier instante. Esto justifica que la Lagrangiana no dependa explícitamente de las variables $\boldsymbol{\rho}$, y sí lo sea a través de la expresión de la velocidad angular.

La expresión (2.27) corresponde a $R(\boldsymbol{\rho}'(\tau)) = R(\boldsymbol{\mu})R(\boldsymbol{\rho}(\tau))$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}' &= \dot{R}(\boldsymbol{\rho}'(\tau))R^T(\boldsymbol{\rho}'(\tau)) = R(\boldsymbol{\mu})\dot{R}(\boldsymbol{\rho}(\tau))R^T(\boldsymbol{\rho}(\tau))R^T(\boldsymbol{\mu}) \\ &= R(\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\Omega}R^{-1}(\boldsymbol{\mu}), \end{aligned}$$

lo que conduce a la ecuación (2.35) en términos de las componentes esenciales $\boldsymbol{\omega}$ de la matriz antisimétrica $\boldsymbol{\Omega}$. Ver el apéndice 2.7.3 para la descripción precisa de la orientación.

Esto hace que la parte de la Lagrangiana $(\partial\tilde{L}/\partial\dot{\rho}^i)\dot{\rho}^i$ se pueda escribir como

$$\mathbf{V} \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}} \equiv \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\rho}^i} \dot{\rho}^i = \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\omega^j} \frac{\partial\omega^j}{\partial\dot{\rho}^i} \dot{\rho}^i = \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (2.36)$$

debido a la linealidad de $\boldsymbol{\omega}$ en términos de $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ y donde $W_i = \partial\tilde{L}/\partial\omega^i$. Por lo tanto, la forma más general de la Lagrangiana de una partícula elemental no relativista, se escribe, en vez de (2.29), como:

$$\tilde{L} = T\dot{t} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (2.37)$$

y donde las funciones T , \mathbf{R} , \mathbf{U} y \mathbf{W} son funciones, en principio desconocidas y a determinar en cada caso, de las variables $(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \mathbf{a}, \boldsymbol{\Omega})$, donde $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{u}}/\dot{t} = d\mathbf{u}/dt$, es la aceleración del punto (no confundirlo con el parámetro de la traslación espacial), y la variable $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}/\dot{t}$ es la velocidad angular en la descripción temporal, pero no son funciones explícitas de las variables de orientación $\boldsymbol{\rho}$.

Puesto que X es la totalidad del grupo de Galileo \mathcal{G} la función gauge más general es efectivamente el exponente del grupo:

$$\alpha(g; x) = \xi(g, h_x) = m(\mathbf{v}^2 t(\tau)/2 + \mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{r}(\tau)), \quad (2.38)$$

similar a (2.6), lo que nos permite interpretar el parámetro m como la masa de la partícula. Bajo la acción de un elemento arbitrario del grupo de Galileo, la Lagrangiana \tilde{L} transforma de acuerdo con:

$$\tilde{L}(gx(\tau), d(gx(\tau))/d\tau) = \tilde{L}(x(\tau), \dot{x}(\tau)) + d\alpha(g; x(\tau))/d\tau. \quad (2.39)$$

Esto nos conduce, a través de un cálculo similar al desarrollado en (2.8)-(2.10), a que estas funciones transforman:

$$T'(\tau) = T(\tau) - \mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{R}(\tau) - m\mathbf{v}^2/2, \quad (2.40)$$

$$\mathbf{R}'(\tau) = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{R}(\tau) + m\mathbf{v}, \quad (2.41)$$

$$\mathbf{U}'(\tau) = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{U}(\tau), \quad (2.42)$$

$$\mathbf{W}'(\tau) = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{W}(\tau). \quad (2.43)$$

2.2.1. Constantes del movimiento Noetherianas

Conocida la acción del grupo de Galileo sobre las variables cinemáticas dado en (2.24)-(2.27), el teorema de Noether nos define las siguientes constantes del movimiento para la partícula libre:

a) Bajo una traslación temporal la función acción es invariante, $\lambda(x) = 0$, y llamamos como es habitual a la magnitud conservada el **momento temporal total** de la partícula, H . Como $\delta t = \delta b$ y $\delta q_i^{(s)} = 0$, $M = 1$ y $M_i^{(s)} = 0$, y aplicando (1.35), tenemos:

$$H = -(L - p_{(s)}^i q_i^{(s)})M = -(\tilde{L}/\dot{t} - p_{(s)}^i q_i^{(s)}) = -T - \mathbf{R} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{u}}/\dot{t} - \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\omega}/\dot{t} + \\ + (\mathbf{R} - d\mathbf{U}/dt) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{u}}/\dot{t} + \mathbf{V} \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}/\dot{t},$$

y como $\mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{V} \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}$, resulta que

$$H = -T - \frac{d\mathbf{U}}{dt} \cdot \mathbf{u}. \quad (2.44)$$

b) Bajo traslaciones espaciales, $A(x_1, x_2)$ es invariante, $\lambda_i(x) = 0$, y se nos definen las tres componentes del **momento lineal total** de la partícula \mathbf{P} . Ahora

$$\delta t = 0, \quad M = 0, \quad \delta r_i = \delta a_i, \quad M_{ij}^{(r)} = \delta_{ij}, \quad \delta u_i = 0, \quad M_{ij}^{(u)} = 0, \\ \delta \rho_i = 0, \quad M_{ij}^{(\rho)} = 0,$$

y entonces

$$\mathbf{P} = \mathbf{R} - \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{p}_r. \quad (2.45)$$

c) Bajo transformaciones Galileanas puras de velocidad $\delta \mathbf{v}$, $A(x_1, x_2)$ no es invariante sino que teniendo en cuenta (1.13) y la función gauge (2.38) a primer orden en los parámetros δv_i , la acción transforma como $\delta A = m\mathbf{r}_2 \cdot \delta \mathbf{v} - m\mathbf{r}_1 \cdot \delta \mathbf{v}$ y por lo tanto, $\lambda_i(x) = m r_i$, lo que nos define las componentes del **momento cinemático total** de la partícula, \mathbf{K} , en la forma:

$$\delta t = 0, \quad M = 0, \quad \delta r_i = \delta v_i t, \quad M_{ij}^{(r)} = \delta_{ij} t, \quad \delta u_i = \delta v_i, \quad M_{ij}^{(u)} = \delta_{ij}, \\ \delta \rho_i = 0, \quad M_{ij}^{(\rho)} = 0,$$

y así

$$\mathbf{K} = m\mathbf{r} - \mathbf{P}t - \mathbf{U}. \quad (2.46)$$

A partir de $\dot{\mathbf{K}} = 0$, nos lleva a $\mathbf{P} = m\mathbf{u} - d\mathbf{U}/dt$, por lo que identificándolo con (2.45), la función $\mathbf{R} = m\mathbf{u}$ independientemente de la Lagrangiana particular que escojamos. Observar que el momento lineal total no tiene la dirección de la velocidad $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$, del punto \mathbf{r} .

d) Finalmente, bajo rotaciones $A(x_1, x_2)$ permanece invariante, $\lambda_i(x) = 0$, y la correspondiente constante del movimiento, el **momento angular total** de la partícula con respecto al origen del sistema de referencia del observador \mathbf{J} , proviene de la transformación infinitesimal de valor $\delta\alpha_i$, en tanto que el parámetro $\delta\mu_i = \delta\alpha_i/2$, es la mitad del ángulo infinitesimal rotado, por lo que

$$\begin{aligned} \delta t = 0, \quad M_i = 0, \quad \delta r_i = \epsilon_{ikj}r_k\delta\alpha_j, \quad M_{ij}^{(r)} = \epsilon_{ikj}r_k, \\ \delta u_i = \epsilon_{ikj}u_k\delta\alpha_j, \quad M_{ij}^{(u)} = \epsilon_{ikj}u_k, \\ \delta\rho_i = \delta\alpha_j(\delta_{ij} - \epsilon_{ijk}\rho_k + \rho_i\rho_j)/2, \quad M_{ij}^{(\rho)} = (\delta_{ij} - \epsilon_{ijk}\rho_k + \rho_i\rho_j)/2, \end{aligned}$$

y como la constante del movimiento es

$$J_j = -p_{ri}M_{ij}^{(r)} - p_{ui}M_{ij}^{(u)} - p_{\rho i}M_{ij}^{(\rho)}$$

lo que nos lleva a

$$-P_i\epsilon_{ikj}r_k = \epsilon_{jki}r_kP_i, \quad -U_i\epsilon_{ikj}u_k = \epsilon_{jki}u_kU_i,$$

como de (2.34)

$$\begin{aligned} \frac{\partial\omega_k}{\partial\dot{\rho}_i} = \frac{2}{1+\rho^2}(-\delta_{ki} + \epsilon_{kli}\rho_l) \\ -V_iM_{ij}^{(\rho)} = -\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\omega_k}\frac{\partial\omega_k}{\partial\dot{\rho}_i}M_{ij}^{(\rho)} = W_j, \end{aligned}$$

puesto que

$$\frac{\partial\omega_k}{\partial\dot{\rho}_i}M_{ij}^{(\rho)} = -\delta_{kj},$$

y por lo tanto, en forma vectorial

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{u} \times \mathbf{U} + \mathbf{W} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{S}. \quad (2.47)$$

Como \mathbf{J} es el momento angular de la partícula con respecto al origen del observador, \mathbf{S} representa el momento angular de la partícula con respecto al punto \mathbf{r} . Como $d\mathbf{J}/dt = 0$, la función \mathbf{S} satisface $d\mathbf{S}/dt = \mathbf{P} \times \mathbf{u}$ y no es una constante del movimiento ni siquiera para la partícula libre. Es el momento angular clásico equivalente al operador espín de Dirac en el caso cuántico, puesto que satisface exactamente su misma ecuación dinámica.

e) Hemos mencionado que además del grupo de Galileo como grupo de simetrías de la partícula elemental libre tenemos el grupo de rotaciones locales $SO(3)_L$. Este grupo solamente afecta a las variables de orientación. Así, las variables cinemáticas transforman:

$$t' = t, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r}, \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u}, \quad R(\boldsymbol{\rho}') = R(\boldsymbol{\rho})M(\boldsymbol{\alpha}), \quad \forall M(\boldsymbol{\alpha}) \in SO(3)_L,$$

Solamente se nos transforman las variables $\boldsymbol{\rho}$, que corresponde en el caso infinitesimal a

$$\boldsymbol{\rho}' = \frac{\boldsymbol{\rho} + \delta\boldsymbol{\alpha}/2 - \boldsymbol{\rho} \times \delta\boldsymbol{\alpha}/2}{(1 - \boldsymbol{\rho} \cdot \delta\boldsymbol{\alpha}/2)}, \quad \delta\rho_i = \delta\alpha_j \frac{1}{2} (\delta_{ij} + \rho_i\rho_j - \epsilon_{ilj}\rho_l) = M_{ij}^{(L)}\delta\alpha_j.$$

Las magnitudes conservadas solo provienen de los momentos $\mathbf{p}_\rho = \mathbf{V}$, y serán:

$$T_j = -V_i M_{ij}^{(L)} = -\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_k} \frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{\rho}_i} M_{ij}^{(L)},$$

pero

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{\rho}_i} M_{ij}^{(L)} = \frac{-1}{1 + \rho^2} ((1 - \rho^2) \delta_{kj} + 2\rho_k \rho_j + 2\epsilon_{kjs} \rho_s)$$

con lo que este término es en realidad la componente k , cambiada de signo, del vector unidad \mathbf{e}_j , $(\mathbf{e}_j)_k$, dado en (2.23), con lo que estas constantes del movimiento son

$$T_j = -W_k (-\mathbf{e}_j)_k = \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_j, \quad (2.48)$$

la **proyección, en los vectores unidad de la partícula, del momento angular ligado con la rotación.**

De estas constantes del movimiento, el momento lineal \mathbf{P} proviene de la invariancia de L con respecto a las variables de posición \mathbf{r} , por lo que de las propias ecuaciones de Euler-Lagrange para estos grados de libertad podríamos haber obtenido:

$$\frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial (dr_i/dt)} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial (d^2 r_i/dt^2)} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial (dr_i/dt)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial (d^2 r_i/dt^2)} \right) \right] = 0,$$

pues $\partial L / \partial r_i = 0$, con lo que obtenemos de nuevo (2.45).

La conservación de las proyecciones T_i se puede obtener también de las propias ecuaciones dinámicas relativas a la orientación. Como \tilde{L} depende de $\boldsymbol{\rho}$ y de $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ a través de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, estas ecuaciones dinámicas se reescriben como

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \rho_i} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\rho}_i} \right) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_j} \frac{\partial \omega_j}{\partial \rho_i} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_j} \frac{\partial \omega_j}{\partial \dot{\rho}_i} \right) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_j} = W_j,$$

que nos llevan a

$$\frac{d\mathbf{W}}{d\tau} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{W},$$

y la variación de los ejes del cuerpo \mathbf{e}_i , hemos visto que es

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{d\tau} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i,$$

de donde con $T_i = \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_i$, derivando con respecto a τ ,

$$\frac{dT_i}{d\tau} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{W}) \cdot \mathbf{e}_i + \mathbf{W} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i) = 0.$$

Veremos la importancia que tienen estas componentes conservadas del espín en el caso cuántico, para clasificar los estados del electrón.

Ejercicio: Demostrar que si una Lagrangiana depende de las variables de orientación $\boldsymbol{\rho}$ y $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ a través de la expresión (2.34) de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})$, entonces las ecuaciones dinámicas relacionadas con la orientación,

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \rho_i} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\rho}_i} \right) = 0,$$

se transforman en

$$d\mathbf{W}/d\tau = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{W}, \quad \text{con } W_i = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_i}.$$

2.2.2. Espín respecto del centro de masa

Podemos considerar también el momento angular de la partícula con respecto a su centro de masa, una vez que éste, esté adecuadamente definido. El observador del centro de masa se define como aquel observador inercial para el que $\mathbf{P} = 0$ y $\mathbf{K} = 0$. Estas seis condiciones definen una clase de observadores definidos salvo una rotación arbitraria y una traslación temporal, también arbitraria. La condición $\mathbf{P} = 0$ define la clase de observadores para los que el centro de masa está en reposo y $\mathbf{K} = 0$ es la condición adicional de que el centro de masa esté situado en el origen del sistema de referencia. Esto proviene de (2.46), que si ponemos $\mathbf{k} = \mathbf{U}/m$, éste es un observable con dimensiones de longitud, y tomando la derivada con respecto a τ en ambos lados, sabiendo que $\dot{\mathbf{P}} = 0$, obtenemos:

$$\dot{\mathbf{K}} = 0 = m\dot{\mathbf{r}} - \mathbf{P}\dot{t} - m\dot{\mathbf{k}}, \quad \text{es decir,} \quad \mathbf{P} = m\frac{d(\mathbf{r} - \mathbf{k})}{dt}. \quad (2.49)$$

Entonces el punto $\mathbf{q} = \mathbf{r} - \mathbf{k}$ se mueve a velocidad constante y vemos que representa la posición del centro de masa de la partícula. Por lo tanto, el observable $\mathbf{k} = \mathbf{r} - \mathbf{q}$ es la posición relativa del punto \mathbf{r} con respecto al centro de masa. Vemos que $\mathbf{P} = 0$ y $\mathbf{K} = 0$ dan lugar efectivamente a $d\mathbf{q}/dt = 0$, y $\mathbf{r} = \mathbf{k}$, es decir, $\mathbf{q} = 0$, como habíamos adelantado. Con esta definición, el momento cinemático se puede reescribir como $\mathbf{K} = m\mathbf{q} - \mathbf{P}t$, en términos de la posición del centro de masa \mathbf{q} y del momento lineal total \mathbf{P} .

Podemos definir el momento angular de la partícula con respecto a su centro de masa \mathbf{S}_{CM} , como la diferencia entre el momento angular total \mathbf{J} y el momento angular orbital del movimiento del centro de masa $\mathbf{q} \times \mathbf{P}$, por lo que

$$\mathbf{S}_{CM} = \mathbf{J} - \mathbf{q} \times \mathbf{P} = \mathbf{J} - \frac{1}{m}\mathbf{K} \times \mathbf{P} = \mathbf{S} + \mathbf{k} \times \mathbf{P} = -m\mathbf{k} \times \frac{d\mathbf{k}}{dt} + \mathbf{W}. \quad (2.50)$$

Vemos que también se escribe como el momento angular \mathbf{S} con respecto al punto \mathbf{r} , más el momento angular orbital de este punto $\mathbf{k} \times \mathbf{P}$ con respecto al centro de masa. El espín \mathbf{S}_{CM} , queda expresado en términos de las constantes del movimiento \mathbf{J} , \mathbf{K} y \mathbf{P} , y es por lo tanto otra constante del movimiento. Alternativamente lo podemos describir de acuerdo con la última expresión como la parte rotatoria del momento angular \mathbf{W} y del término $-\mathbf{k} \times m d\mathbf{k}/dt$ que sugiere una contribución de naturaleza (anti)orbital debida al movimiento relativo del punto \mathbf{r} alrededor del centro de masa. Esta parte está relacionada con el *zitterbewegung*, o más precisamente con la función $\mathbf{U} = m\mathbf{k}$ que refleja la dependencia de la Lagrangiana con la aceleración. El otro término \mathbf{W} proviene de la dependencia de los otros tres grados de libertad ρ_i , y, por lo tanto, de la velocidad angular. Este *zitterbewegung* refleja el movimiento del centro de carga alrededor del centro de masa. La consideración de que el punto \mathbf{r} representa al centro de carga, ha sido ya sugerido en trabajos previos sobre el electrón relativista ².

Debido a que para la partícula libre $\dot{\mathbf{J}} = 0$, y que $d\mathbf{W}/d\tau = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{W}$ y a partir de la expresión de \mathbf{P} , (2.45), obtenemos una relación general entre diferentes observables para una partícula libre:

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{R} + \dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{U} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{W} = 0, \quad (2.51)$$

lo cual refleja que la velocidad, aceleración y velocidad angular no son magnitudes totalmente independientes. De alguna manera, podemos tomar como sistema de ejes ligados al punto \mathbf{r} , la terna de vectores unidad de Frenet-Serret de la trayectoria del punto. Según esto, con $\dot{\mathbf{r}}$ y $\ddot{\mathbf{r}}$, se determinan el vector tangente y la normal principal, su producto vectorial nos define la binormal, y por lo tanto la derivada de la terna nos produce la velocidad angular que será también función de la tercera derivada.

Sabiendo que en el caso no relativista \mathbf{R} y $\dot{\mathbf{r}}$ tienen la misma dirección, se reduce a

$$\dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{U} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{W} = 0. \quad (2.52)$$

² A.O. Barut and A.J. Bracken, *Phys. Rev. D* **23**, 2454 (1981).

2.2.3. Dinámica del espín

Como el momento angular es un observable que está definido con respecto a un punto concreto, y la partícula elemental posee dos puntos característicos \mathbf{r} y el centro de masa \mathbf{q} , podemos analizar la dinámica del espín con respecto a esos dos puntos, \mathbf{S} y \mathbf{S}_{CM} , respectivamente. En cualquier caso, conocido el momento angular con respecto a un punto, nos permite calcular el momento angular con respecto a cualquier otro sin más que añadirle $\mathbf{r} \times \mathbf{P}$, siendo \mathbf{P} el momento lineal total del sistema y \mathbf{r} el vector de posición del primer punto con respecto al segundo. Para la partícula libre, el momento angular con respecto al origen del observador, se escribe:

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{S} = \mathbf{q} \times \mathbf{P} + \mathbf{S}_{CM}.$$

De aquí se deduce, derivando con respecto al tiempo que

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{P} \times \mathbf{u}, \quad \frac{d\mathbf{S}_{CM}}{dt} = 0.$$

Sin embargo, si sobre la partícula y en el punto \mathbf{r} , tenemos localizada una fuerza \mathbf{F} , el momento de esta fuerza con respecto al origen, nos dará la variación de \mathbf{J} ,

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{u} \times \mathbf{P} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \frac{d\mathbf{S}}{dt}$$

pero $d\mathbf{P}/dt = \mathbf{F}$, con lo que el espín \mathbf{S} satisface exactamente la misma ecuación dinámica que en el caso libre, es decir

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{P} \times \mathbf{u},$$

solo que ahora \mathbf{P} no es una constante del movimiento. Para el otro

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{v} \times \mathbf{P} + \mathbf{q} \times \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \frac{d\mathbf{S}_{CM}}{dt}$$

por lo que

$$\frac{d\mathbf{S}_{CM}}{dt} = (\mathbf{r} - \mathbf{q}) \times \mathbf{F},$$

es el par externo, de la fuerza definida en \mathbf{r} , con respecto al centro de masa. Si el espín con respecto al centro de masa no se conserva, entonces $\mathbf{r} \neq \mathbf{q}$ y el centro de masa y el centro de carga son necesariamente dos puntos distintos.

2.2.4. Transformación de diversos observables

Las diferentes funciones que componen la Lagrangiana \tilde{L} , transforman bajo el grupo de Galileo de acuerdo con (2.40)-(2.43). Si la tercera de estas ecuaciones la derivamos con respecto a τ y la dividimos por $\dot{\tau} = \dot{t}$, resulta:

$$\frac{dU'}{dt'} = R(\boldsymbol{\mu}) \frac{dU}{dt}, \quad \mathbf{u}' \cdot \frac{d\mathbf{U}'}{dt'} = \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{U}}{dt} + \mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu}) \frac{d\mathbf{U}}{dt}$$

Esto nos lleva a que el momento lineal \mathbf{P} y el momento temporal H , transformen entre los observadores Galileanos en la forma dada en (2.15-2.16) para estos mismos observables en el caso de la partícula puntual.

$$H' = H + \mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{P} + \frac{1}{2}mv^2, \quad (2.53)$$

$$\mathbf{P}' = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{P} + m\mathbf{v}. \quad (2.54)$$

De esta forma, si H_0 y $\mathbf{P}_0 = 0$, son los valores que toman estos observables para el observador del centro de masa, entonces, para cualquier otro observador que ve moverse al centro de masa con velocidad \mathbf{v}

$$H = H_0 + \frac{1}{2}mv^2 = H_0 + \frac{\mathbf{P}^2}{2m}, \quad \mathbf{P} = m\mathbf{v}.$$

Por lo tanto, cualquiera que sea el observador, la magnitud $H - \mathbf{P}^2/2m = H_0$ es un número constante y define una propiedad intrínseca de la partícula elemental, ya que su medida es independiente del observador. Además, la parte espacio-temporal de \tilde{L} , es la que define la parte variante gauge, y adopta la forma general

$$T\dot{t} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -H\dot{t} + \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{r}}.$$

En efecto

$$-H'\dot{t}' + \mathbf{P}' \cdot \dot{\mathbf{r}}' = -H\dot{t} + \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2}mv^2\dot{t} + m\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\dot{\mathbf{r}}.$$

De esta forma, la parte segunda de la Lagrangiana $\mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\omega}$, es necesariamente invariante Galileana. El otro parámetro intrínseco de la partícula elemental, el espín o la velocidad de rotación interna, aparecerá ligado a esta parte invariante. Si expresamos el Hamiltoniano en términos de los invariantes H_0 y m , la primera parte nos queda

$$-H\dot{t} + \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -H_0\dot{t} + \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2\dot{t}} - \frac{1}{2m} \left(\frac{d\mathbf{U}}{dt} \right)^2 \dot{t}.$$

El primer término es una derivada total y se puede suprimir, el segundo es el que da lugar a la variación gauge de la Lagrangiana, y el tercero es necesariamente invariante Galileano.

La transformación del espín con respecto al centro de masa \mathbf{S}_{CM} definido en (2.50), proviene de cómo transforman $\mathbf{k} = \mathbf{U}/m$ y \mathbf{W} ,

$$\mathbf{k}' = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{k}, \quad \frac{d\mathbf{k}'}{dt'} = R(\boldsymbol{\mu})\frac{d\mathbf{k}}{dt}, \quad \mathbf{W}' = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{W}$$

lo que nos lleva a que

$$\mathbf{S}'_{CM} = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{S}_{CM}$$

y por lo tanto $S'^2_{CM} = S^2_{CM}$, es una propiedad constante e invariante entre observadores, es decir es un número o propiedad intrínseca de la partícula. La Lagrangiana de una partícula con espín dependerá de forma explícita de estos dos invariantes m y S_{CM} .

No podemos decir lo mismo del espín con respecto al centro de carga $\mathbf{S} = \mathbf{u} \times \mathbf{U} + \mathbf{W}$ que transforma en la forma:

$$\mathbf{S}' = \mathbf{u}' \times \mathbf{U}' + \mathbf{W}' = (R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{U} + R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{W} = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{S} + \mathbf{v} \times R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{U},$$

y por lo tanto su módulo depende de v y no es por lo tanto una propiedad intrínseca.

El centro de masa transforma como \mathbf{r} :

$$\mathbf{q}'(\tau) = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{q}(\tau) + v\tau(\tau) + \mathbf{a}.$$

Esto no va a ser así en el caso relativista y el centro de masa no transforma como la posición del punto. Esto se debe a que si \mathbf{q} y \mathbf{r} son considerados con simultaneidad en un referencial, sus transformados \mathbf{q}' y \mathbf{r}' no tienen por qué ser simultáneos en otro referencial relativista, cosa que sí ocurre en el caso no relativista. También, en el caso relativista, la definición del centro de masa \mathbf{q} depende de la aceleración del punto \mathbf{r} .

2.2.5. Partícula Galileana con espín (anti)orbital

Para analizar la estructura del espín de una partícula elemental vamos a ver ejemplos en los que las dos contribuciones asociadas a las funciones \mathbf{U} y \mathbf{W} , aparecen por separado:

Consideremos una partícula elemental Galileana cuyo espacio cinemático sea $X = \mathcal{G}/SO(3)$, de tal forma que cada punto $x \in X$ está caracterizado por las siete variables $x \equiv (t, \mathbf{r}, \mathbf{u})$, $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$, que se interpretan como tiempo, posición y velocidad de la partícula, respectivamente. En este ejemplo no tenemos variables de orientación. Como la Lagrangiana depende de las derivadas de estas variables, será también función de la aceleración.

Si la partícula es libre, debido a la invariancia por rotación y traslación, esto implica que L será función solamente de \mathbf{u}^2 , $(d\mathbf{u}/dt)^2$ y $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{u}/dt = d(u^2/2)/dt$. Este último término es una derivada total, por lo que puede ser descartado.

A partir de la condición (2.52), $\mathbf{U} \sim \dot{\mathbf{u}}$, y por otra parte $\mathbf{U} = m\mathbf{k}$, pero \mathbf{k} es la posición relativa del punto \mathbf{r} con respecto al centro de masa, con lo que en este vector \mathbf{k} tiene que tener dirección opuesta a la aceleración de \mathbf{r} , porque si no el punto \mathbf{r} se separaría del \mathbf{q} , de ahí que el término $\mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{u}} \sim -\dot{\mathbf{u}}^2$. Como por otra parte la expresión $T\dot{t} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -H\dot{t} + \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{r}}$ nos produce el término gauge dependiente de la masa, esto sugiere que debe ser de la misma forma que en el caso de la partícula puntual.

Spongamos pues que nuestra partícula elemental viene dada por la siguiente Lagrangiana, que en términos de los tres grados de libertad \mathbf{r} y sus derivadas, se escribe:

$$L = \frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 - \frac{m}{2\omega^2} \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right)^2. \quad (2.55)$$

El parámetro m es la masa de la partícula ya que el primer término es variante gauge con la misma función gauge (2.38) que depende de esta constante m , mientras que el parámetro ω de dimensiones de tiempo⁻¹ representa una frecuencia interna constante e inmodificable. Es la frecuencia del zitterbewegung. Los parámetros m y ω serían las propiedades intrínsecas de esta partícula.

En términos de las variables cinemáticas y de sus derivadas, y en términos de un parámetro de evolución τ arbitrario, la Lagrangiana se reescribe

$$\tilde{L} = \frac{m}{2} \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{\dot{t}} - \frac{m}{2\omega^2} \frac{\dot{\mathbf{u}}^2}{\dot{t}}, \quad (2.56)$$

donde el punto significa derivada con respecto a τ . Si consideramos que el parámetro de evolución es adimensional, entonces todos los términos en la Lagrangiana tienen dimensiones de acción. Por ser la Lagrangiana una función homogénea de grado uno en términos de las derivadas de las variables cinemáticas, \tilde{L} puede escribirse como

$$\tilde{L} = T\dot{t} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{u}}, \quad (2.57)$$

donde las diferentes funciones que aparecen están definidas por

$$T = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{t}} = -\frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2\omega^2} \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right)^2, \quad (2.58)$$

$$\mathbf{R} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

$$\mathbf{U} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = -\frac{m}{\omega^2} \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (2.59)$$

Las ecuaciones dinámicas que se obtienen de la Lagrangiana (2.55) son:

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{d^4\mathbf{r}}{dt^4} + \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = 0, \quad (2.60)$$

cuya solución general es:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{A} + \mathbf{B}t + \mathbf{C} \cos \omega t + \mathbf{D} \sin \omega t, \quad (2.61)$$

en términos de 12 constantes de integración \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} y \mathbf{D} .

Al aplicar el teorema de Noether al grupo de Galileo, las correspondientes constantes del movimiento se pueden escribir en la forma:

$$\text{Momento temporal } H = -T - \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{U}}{dt}, \quad (2.62)$$

$$\text{Momento lineal } \mathbf{P} = \mathbf{R} - \frac{d\mathbf{U}}{dt} = m\mathbf{u} - \frac{d\mathbf{U}}{dt}, \quad (2.63)$$

$$\text{Momento cinemático } \mathbf{K} = m\mathbf{r} - \mathbf{P}t - \mathbf{U}, \quad (2.64)$$

$$\text{Momento angular } \mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{u} \times \mathbf{U}. \quad (2.65)$$

Es precisamente la presencia de la función \mathbf{U} lo que distingue a esta partícula de la partícula puntual. La magnitud $\mathbf{S} = \mathbf{u} \times \mathbf{U}$ representa el espín con respecto al punto \mathbf{r} . Encontramos en este ejemplo más simple que el momento lineal tampoco tiene la dirección de la velocidad \mathbf{u} , y la estructura del espín está ligada con la dependencia de la Lagrangiana con la aceleración.

Si sustituimos la solución general (2.61) en (2.62-2.65) vemos que las constantes del movimiento se pueden escribir en términos de las constantes de integración,

$$H = \frac{m}{2}\mathbf{B}^2 - \frac{m\omega^2}{2}(\mathbf{C}^2 + \mathbf{D}^2), \quad (2.66)$$

$$\mathbf{P} = m\mathbf{B}, \quad (2.67)$$

$$\mathbf{K} = m\mathbf{A}, \quad (2.68)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{A} \times m\mathbf{B} - m\omega\mathbf{C} \times \mathbf{D}. \quad (2.69)$$

El momento cinemático \mathbf{K} en (2.64) difiere del de la partícula puntual (2.13) en el término $-\mathbf{U}$, de tal manera que si definimos el vector $\mathbf{k} = \mathbf{U}/m$, con dimensiones de longitud, entonces $\dot{\mathbf{K}} = 0$ nos lleva de (2.64) a la ecuación:

$$\mathbf{P} = m \frac{d(\mathbf{r} - \mathbf{k})}{dt},$$

y $\mathbf{q} = \mathbf{r} - \mathbf{k}$, define la posición del centro de masa de la partícula, que es un punto distinto de \mathbf{r} y que usando (2.59) viene dado por

$$\mathbf{q} = \mathbf{r} - \frac{1}{m}\mathbf{U} = \mathbf{r} + \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (2.70)$$

Tiene la forma (2) que poseía el centro de masa en términos del centro de carga en el análisis hecho en el preámbulo de estas notas.

Las ecuaciones dinámicas (2.60) se pueden reescribir en la forma:

$$\frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2} = 0, \quad (2.71)$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \omega^2(\mathbf{r} - \mathbf{q}) = 0, \quad (2.72)$$

donde (2.71) es (2.60) después de derivar dos veces (2.70), y la ecuación (2.72) es (2.70) habiendo puesto todos los términos en el lado izquierdo.

A partir de (2.71) vemos que el punto \mathbf{q} se mueve en línea recta y a velocidad constante, mientras que el movimiento de \mathbf{r} , dado en (2.72), es un movimiento armónico isótropo de pulsación constante ω , alrededor del punto \mathbf{q} .

El espín de la partícula con respecto al centro de masa, \mathbf{S}_{CM} se define como

$$\mathbf{S}_{CM} = \mathbf{J} - \mathbf{q} \times \mathbf{P} = \mathbf{J} - \frac{1}{m} \mathbf{K} \times \mathbf{P}, \quad (2.73)$$

que al quedar escrito en términos de constantes del movimiento, es claramente otra constante del movimiento. Su magnitud S^2 es una propiedad constante e invariante para todos los observadores inerciales, por lo que será una propiedad intrínseca que caracteriza a la partícula. En términos de las constantes de integración se expresa como

$$\mathbf{S}_{CM} = -m\omega \mathbf{C} \times \mathbf{D}. \quad (2.74)$$

A partir de su definición, obtenemos

$$\mathbf{S}_{CM} = \mathbf{u} \times \mathbf{U} + \mathbf{k} \times \mathbf{P} = -m(\mathbf{r} - \mathbf{q}) \times \frac{d}{dt}(\mathbf{r} - \mathbf{q}) = -\mathbf{k} \times m \frac{d\mathbf{k}}{dt}, \quad (2.75)$$

y aparece como un momento angular (anti)orbital del movimiento relativo del punto \mathbf{r} alrededor del centro de masa \mathbf{q} en reposo, de tal manera que el momento angular total, se escribe

$$\mathbf{J} = \mathbf{q} \times \mathbf{P} + \mathbf{S}_{CM} = \mathbf{L} + \mathbf{S}_{CM}. \quad (2.76)$$

Es la suma del momento angular orbital \mathbf{L} asociado al movimiento del centro de masa y de la parte del espín \mathbf{S}_{CM} . Para una partícula libre, ambos \mathbf{L} y \mathbf{S}_{CM} son separadamente constantes del movimiento. Usamos el término (anti)orbital para sugerir que si el vector \mathbf{k} representa la posición de un punto de masa m , el momento angular de este movimiento tiene la dirección opuesta a la del observable espín. Pero como veremos en seguida, \mathbf{k} no representa la posición de ninguna masa sino que se trata de la posición relativa del centro de carga de la partícula, con respecto al centro de masa.

2.2.6. Interacción con un campo electromagnético externo

Si \mathbf{q} representa la posición del centro de masa, entonces ¿qué posición representa el punto \mathbf{r} ? El punto \mathbf{r} representa la posición de la carga de la partícula. Esto lo podemos ver considerando una cierta interacción con un campo externo. La homogeneidad de la Lagrangiana en términos de las derivadas de las variables cinemáticas sugiere una Lagrangiana de interacción de la forma:

$$\tilde{L}_I = -e\phi(t, \mathbf{r})\dot{t} + e\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}}, \quad (2.77)$$

lineal en las derivadas de las variables t y \mathbf{r} y donde los potenciales externos son solamente funciones de t y \mathbf{r} . Podríamos haber considerado otros términos de interacción de la forma $\mathbf{N}(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{u}}$, y que también las funciones ϕ y \mathbf{A} dependieran de \mathbf{u} y $\dot{\mathbf{u}}$. Sin embargo, si la Lagrangiana de interacción depende de $\dot{\mathbf{u}}$ esto implica que la interacción modifica la definición del observable $\mathbf{U} = m\mathbf{k}$ el cual define el espín. Pero si la partícula es elemental, sus propiedades intrínsecas no pueden cambiar de tal manera que (2.77) es el término de interacción más general. Es lo que se denomina el acoplamiento mínimo, entre la corriente asociada al movimiento de la carga j_μ con los potenciales externos en la forma $j_\mu A^\mu$, donde la corriente j_μ se refiere al movimiento de la carga asociada al punto \mathbf{r} , como veremos a continuación. Por lo visto en la sección 2.1.1, ni ϕ ni \mathbf{A} serán funciones de \mathbf{u} , por lo que (2.77) es la interacción más general.

Las ecuaciones dinámicas que se obtienen de $L + L_I$ son

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{d^4 \mathbf{r}}{dt^4} + \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{e}{m} (\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) + \mathbf{u} \times \mathbf{B}(t, \mathbf{r})), \quad (2.78)$$

donde el campo eléctrico \mathbf{E} y el campo magnético \mathbf{B} se expresan en términos de los potenciales en la forma habitual, $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Las ecuaciones dinámicas (2.78) pueden ser separadas en la forma

$$\frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2} = \frac{e}{m} (\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) + \mathbf{u} \times \mathbf{B}(t, \mathbf{r})), \quad (2.79)$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \omega^2(\mathbf{r} - \mathbf{q}) = 0. \quad (2.80)$$

El centro de masa \mathbf{q} satisface ecuaciones Newtonianas bajo la acción de la fuerza de Lorentz externa, mientras que el punto \mathbf{r} sigue satisfaciendo el mismo movimiento armónico isótropo de pulsación constante ω alrededor de \mathbf{q} . Pero la fuerza externa y los campos están definidos en el punto \mathbf{r} y no en el punto \mathbf{q} . Además, es la velocidad \mathbf{u} del punto \mathbf{r} la que aparece en el término magnético de la fuerza de Lorentz. El punto \mathbf{r} representa claramente la posición de la carga de la partícula.

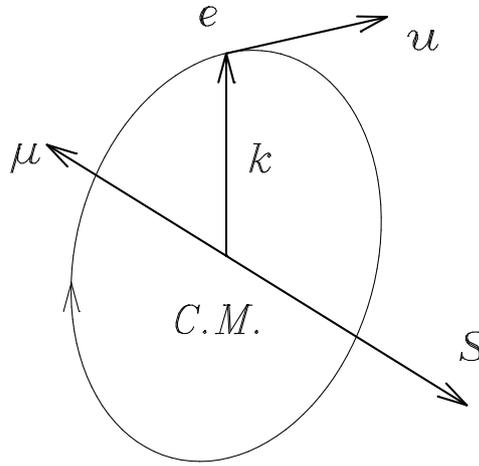


Figura 2.1: **Movimiento de la carga $e > 0$ en el sistema del C.M. El momento magnético tiene sentido contrario al espín y el momento dipolar eléctrico $\mathbf{d} = e\mathbf{k}$, es perpendicular al espín.**

Esta carga efectúa un movimiento oscilante de muy alta frecuencia ω , que para el electrón relativista es, como veremos, $\omega = 2mc^2/\hbar \simeq 1,55 \times 10^{21}\text{s}^{-1}$. El valor medio de la posición de la carga es el centro de masa pero este movimiento relativo da lugar al momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ de la partícula, dibujado en la figura en sentido opuesto al espín, en el supuesto de que la carga $e > 0$ y ortogonal al plano del zitterbewegung. Su valor es, de acuerdo con su definición clásica:³

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \mathbf{j} d^3\mathbf{r} = \frac{e}{2} \mathbf{k} \times \frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\frac{e}{2m} \mathbf{S}_{CM}, \quad (2.81)$$

donde $\mathbf{j} = e\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{k})d\mathbf{k}/dt$ es la corriente asociada al movimiento de la carga e localizada en el punto \mathbf{k} .

La partícula también posee un momento dipolar eléctrico oscilante $\mathbf{d} = e\mathbf{k}$, perpendicular a $\boldsymbol{\mu}$ y por lo tanto a \mathbf{S}_{CM} para el observador del centro de masa, tal que para tiempos superiores a su período natural, su valor medio temporal es cero.

³ J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, NY (1998), 3rd. ed. p.186.

A pesar de ser éste un ejemplo no relativista, por (2.81) vemos que posee una relación giromagnética $g = 1$. Sin embargo, es importante ver que contiene un número importante de detalles que aparecen cuando Dirac hace el análisis del electrón relativista ⁴, donde ambos momentos $\boldsymbol{\mu}$ y \mathbf{d} aparecen, dando lugar a dos posibles términos de interacción en el Hamiltoniano de Dirac. Regresaremos a este análisis cuando analicemos el electrón relativista.

2.2.7. Interacción con un campo magnético uniforme externo

Consideremos la interacción de este modelo de partícula con espín (anti)orbital en un campo magnético uniforme externo \mathbf{B} . Es un ejemplo que puede resolverse de forma exacta. La ventaja de un modelo Lagrangiano es que no necesitamos postular ninguna ecuación para la dinámica del espín, la cual aparecerá como consecuencia de la dinámica de los diferentes grados de libertad. El resultado es que para el espín con respecto al centro de masa obtendremos una ecuación dinámica del tipo $d\mathbf{S}_{CM}/dt = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$, donde el momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ se expresará de forma adecuada en términos del movimiento relativo del centro de carga.

El sistema de ecuaciones(2.79-2.80) se reduce a

$$\frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2} = \frac{e}{m} \mathbf{u} \times \mathbf{B}, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \omega^2(\mathbf{r} - \mathbf{q}) = 0.$$

Con la definición de las variables $\mathbf{v} = d\mathbf{q}/dt$, es equivalente a un sistema lineal de doce ecuaciones diferenciales de primer orden para las componentes cartesianas de \mathbf{r} , \mathbf{u} , \mathbf{q} y \mathbf{v} . Si definimos la variable adimensional $\tau = \omega t$, entonces este sistema de ecuaciones depende únicamente del parámetro adimensional $a = eB/m\omega$ que es el cociente entre la frecuencia ciclotrónica $|\omega_c| = eB/m$ y ω , la frecuencia natural del movimiento interno.

Si tomamos el campo magnético a lo largo del eje OZ la fuerza externa es ortogonal a él. Si llamamos q_3 y r_3 a las correspondientes coordenadas a lo largo de este eje, del centro de masa y del centro de carga, respectivamente, satisfacen

$$\frac{d^2q_3}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2q_3}{dt^2} + \omega^2(r_3 - q_3) = 0 \quad (2.82)$$

cuya solución general en términos de los valores iniciales $q_3(0)$, $r_3(0)$, $v_3(0)$ y $u_3(0)$ es

$$q_3(t) = q_3(0) + v_3(0)t, \quad (2.83)$$

$$r_3(t) = (r_3(0) - q_3(0)) \cos \omega t + \frac{1}{\omega}(u_3(0) - v_3(0)) \sin \omega t + q_3(0) + v_3(0)t. \quad (2.84)$$

Análogamente, las otras componentes del centro de masa en términos de la nueva variable de evolución

$$\frac{d^2q_1}{d\tau^2} = a \frac{dr_2}{d\tau}, \quad \frac{d^2q_2}{d\tau^2} = -a \frac{dr_1}{d\tau},$$

que una vez integradas obtenemos

$$\frac{dq_1}{d\tau} = ar_2 + b_1, \quad \frac{dq_2}{d\tau} = -ar_1 + b_2, \quad (2.85)$$

donde b_1 y b_2 son dos constantes de integración con dimensiones de longitud.

Nos queda integrar estas dos ecuaciones (2.85) y las ecuaciones de las otras dos componente del centro de carga, que aparecen como

$$\frac{dr_1}{d\tau} = u_1, \quad \frac{dr_2}{d\tau} = u_2, \quad (2.86)$$

⁴ P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum mechanics*, Oxford Univ. Press, 4th ed. (1967).

$$\frac{du_1}{d\tau} = q_1 - r_1, \quad \frac{du_2}{d\tau} = q_2 - r_2. \quad (2.87)$$

Como es un sistema lineal, la matriz de este sistema en términos de las seis variables q_1, q_2, r_1, r_2, u_1 y u_2 , tomadas en este orden es

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cuya ecuación característica es $\lambda^6 + 2\lambda^4 + \lambda^2 + a^2 = 0$. Posee seis raíces diferentes, que corresponden a los seis modos normales del sistema. Si llamamos $\lambda = iz$, estas variables verifican $z^2(1 - z^2)^2 = a^2$, por lo que si resolvemos la ecuación cúbica $z(1 - z^2) = a$, las seis soluciones de la forma $\pm iz$ serán los seis valores propios del sistema. Si definimos

$$k = \frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{3\sqrt{3}a}{2} \right), \quad (2.88)$$

los seis valores propios son $\pm i\omega_j$, $j = 1, 2, 3$, donde:

$$\omega_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin k, \quad \omega_2 = -\cos k - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin k, \quad \omega_3 = \cos k - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin k. \quad (2.89)$$

Si $3\sqrt{3}|a|/2 \leq 1$ entonces las seis raíces son imaginarias puras y el movimiento es un movimiento tri-periódico con esas tres frecuencias. En caso contrario, si existen raíces reales, la solución tiene un comportamiento exponencial. En general, para el electrón, como veremos más adelante, la frecuencia del zitterbewegung es $\omega = 2mc^2/\hbar$, y por lo tanto

$$a/B = e/m\omega = e\hbar/2m^2c^2 = 1,13 \times 10^{-10} \text{Tesla}^{-1},$$

por lo que incluso con campos magnéticos muy intensos, el parámetro a es muy pequeño y la solución correspondiente es oscilatoria.

La solución general del sistema completo será una combinación lineal de estas tres oscilaciones y dependerá de doce constantes de integración que se expresarán en términos de los doce valores iniciales de la posición y velocidad del centro de masa y del centro de carga. La forma de la solución para el centro de carga es:

$$\begin{aligned} r_1(\tau) &= A \cos \omega_1 \tau + B \sin \omega_1 \tau + C \cos \omega_2 \tau + D \sin \omega_2 \tau + E \cos \omega_3 \tau \\ &\quad + F \sin \omega_3 \tau + b_2/a, \\ r_2(\tau) &= B \cos \omega_1 \tau - A \sin \omega_1 \tau + D \cos \omega_2 \tau - C \sin \omega_2 \tau \\ &\quad + F \cos \omega_3 \tau - E \sin \omega_3 \tau - b_1/a, \\ r_3(t) &= (r_3(0) - q_3(0)) \cos \omega t \\ &\quad + \frac{1}{\omega} (u_3(0) - v_3(0)) \sin \omega t + q_3(0) + v_3(0)t, \end{aligned}$$

donde

$$b_1/a = v_1(0)/a\omega - r_2(0), \quad b_2/a = v_2(0)/a\omega + r_1(0).$$

Para las coordenadas del centro de masa, obtenemos:

$$q_1(\tau) = (1 - \omega_1^2) (A \cos \omega_1 \tau + B \sin \omega_1 \tau)$$

$$\begin{aligned}
& + (1 - \omega_2^2)(C \cos \omega_2 \tau + D \sin \omega_2 \tau) \\
& + (1 - \omega_3^2)(E \cos \omega_3 \tau + F \sin \omega_3 \tau) + b_2/a, \\
q_2(\tau) & = (1 - \omega_1^2)(B \cos \omega_1 \tau - A \sin \omega_1 \tau) \\
& + (1 - \omega_2^2)(D \cos \omega_2 \tau - C \sin \omega_2 \tau) \\
& + (1 - \omega_3^2)(F \cos \omega_3 \tau - E \sin \omega_3 \tau) - b_1/a, \\
q_3(t) & = q_3(0) + v_3(0)t.
\end{aligned}$$

Las seis constantes A, B, C, D, E , y F , condimensiones de longitud, satisfacen el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ C \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2(0)/a\omega \\ -u_2(0)/\omega \\ r_1(0) - q_1(0) \end{pmatrix},$$

y

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ D \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(0)/a\omega \\ u_1(0)/\omega \\ r_2(0) - q_2(0) \end{pmatrix},$$

donde $\mathbf{q}(0)$, $\mathbf{v}(0)$ and $\mathbf{r}(0)$, $\mathbf{u}(0)$, son, respectivamente la posición y velocidad del centro de masa y centro de carga en el instante $t = 0$.

Si llamamos N a la inversa de la matriz que contiene a las frecuencias, resulta ser:

$$N = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \omega_2\omega_3(\omega_3 - \omega_2) & \omega_2^2 - \omega_3^2 & \omega_3 - \omega_2 \\ \omega_1\omega_3(\omega_1 - \omega_3) & \omega_3^2 - \omega_1^2 & \omega_1 - \omega_3 \\ \omega_1\omega_2(\omega_2 - \omega_1) & \omega_1^2 - \omega_2^2 & \omega_2 - \omega_1 \end{pmatrix},$$

donde $\Delta = (\omega_1 - \omega_2)(\omega_2 - \omega_3)(\omega_3 - \omega_1)$, de tal manera que obtenemos la expresión final de las constantes de integración en términos de las condiciones iniciales.

A orden más bajo en el parámetro a , puesto que $k \approx \sqrt{3}a/2$, los modos normales son:

$$\omega_1 = a + O(a^3), \quad \omega_2 = -1 - \frac{a}{2} + \frac{3a^2}{8} + O(a^3), \quad \omega_3 = 1 - \frac{a}{2} - \frac{3a^2}{8} + O(a^3). \quad (2.90)$$

En términos de los parámetros físicos, y en la evolución temporal, estas frecuencias normales son, a orden más bajo:

$$\omega_1 = \omega_c, \quad \omega_2 = \omega - \frac{\omega_c}{2} - \frac{3\omega_c^2}{8\omega}, \quad \omega_3 = \omega + \frac{\omega_c}{2} - \frac{3\omega_c^2}{8\omega}, \quad (2.91)$$

donde $\omega_c = eB/m$ y ω son la frecuencia ciclotrónica y la del zitterbewegung, respectivamente.

Para expresar estos valores iniciales en términos de parámetros físicos, como el radio del movimiento interno R_0 , el radio ciclotrónico R_c , la velocidad del centro de masa v o la frecuencia del zitterbewegung ω , consideremos un electrón que se lanza con velocidad \mathbf{v} , perpendicular al campo magnético uniforme externo \mathbf{B} . Tomamos el plano XOY de tal manera que la posición inicial del centro de masa está en la coordenada $R_c = -vm/eB$ sobre el eje OX , y la velocidad inicial v es a lo largo de la dirección positiva del eje OY . Con este convenio, el centro de masa efectúa una precesión alrededor del eje OZ con una velocidad angular $|\omega_c|$ en la dirección positiva. Para una partícula de carga positiva la posición inicial se habría tomado en $-|R_c|$ sobre el eje OX y la velocidad angular iría en sentido negativo del eje OZ .

La posición inicial del centro de carga se caracteriza por los tres parámetros ϕ , θ y ψ , donde θ y ϕ representan la orientación inicial de la velocidad angular interna ω , y el parámetro ψ es la fase inicial del centro de carga como se muestra en la Figura 2.2. Con todos estos valores nulos, $\boldsymbol{\omega}$ apunta a lo largo del eje OZ y la posición del centro de carga es el punto $R_c + R_0$ sobre el eje OX .

Estos valores iniciales, escritos en forma matricial son:

$$\mathbf{q}(0) = \begin{pmatrix} R_c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}(0) = \begin{pmatrix} R_c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{R}_{OZ}(\phi)\mathcal{R}_{OY}(\theta)\mathcal{R}_{OZ}(\psi) \begin{pmatrix} R_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{R}_{OZ}(\phi)\mathcal{R}_{OY}(\theta)\mathcal{R}_{OZ}(\psi) \begin{pmatrix} 0 \\ \omega R_0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

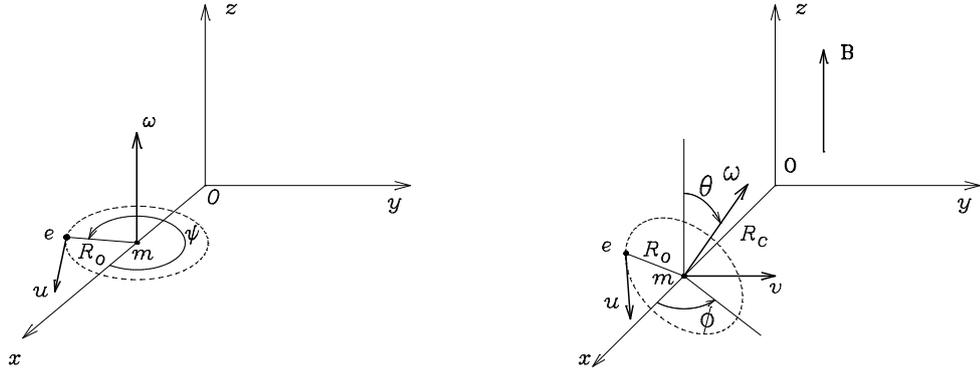


Figura 2.2: Fase inicial ψ del centro de carga y orientación inicial (θ, ϕ) de la velocidad angular ω .

donde $\mathcal{R}_{OZ}(\alpha)$ representa una rotación en sentido activo, de valor α alrededor del eje OZ . Como el espín antiorbital tiene su orientación opuesta a la de la velocidad angular, su valor inicial es

$$\mathbf{S}_{CM}(0) = \mathcal{R}_{OZ}(\phi)\mathcal{R}_{OY}(\theta) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -S \end{pmatrix}, \quad (2.92)$$

donde $S = m\omega R_0^2$. Entonces, las condiciones iniciales para determinar los coeficientes de la solución general son:

$$\begin{pmatrix} -v_2(0)/a\omega \\ -u_2(0)/\omega \\ r_1(0) - q_1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_c \\ aR_c - \alpha R_0 \\ \beta R_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_1(0)/a\omega \\ u_1(0)/\omega \\ r_2(0) - q_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma R_0 \\ \delta R_0 \end{pmatrix},$$

donde $R_c = -vm/eB$, $\omega_c = -eB/m = -a\omega$, como anteriormente, y los parámetros constantes:

$$\begin{aligned} \alpha &= -\sin \phi \cos \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi, \\ \beta &= \cos \phi \cos \theta \cos \psi - \sin \phi \sin \psi, \\ \gamma &= -\cos \phi \cos \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi, \\ \delta &= \sin \phi \cos \theta \cos \psi + \cos \phi \sin \psi. \end{aligned}$$

A orden más bajo en a , las frecuencias son:

$$\begin{aligned} \omega_1 - \omega_2 &= 1 + \frac{3}{2}a, & \omega_2 - \omega_3 &= -2, & \omega_3 - \omega_1 &= 1 - \frac{3}{2}a, \\ \omega_1 + \omega_2 &= -1 + \frac{a}{2}, & \omega_2 + \omega_3 &= -a, & \omega_3 + \omega_1 &= 1 + \frac{a}{2}, \end{aligned}$$

$$\omega_1\omega_2 = -a\left(1 + \frac{a}{2}\right), \quad \omega_2\omega_3 = -\left(1 - \frac{a^2}{4}\right), \quad \omega_3\omega_1 = a\left(1 - \frac{a}{2}\right),$$

y la inversa de la matriz N , a orden $O(a^2)$, es

$$N = \begin{pmatrix} 1 + 2a^2 & -a & -1 - 9a^2/4 \\ a/2 - a^2 & -1/2 + a/2 - 3a^2/4 & 1/2 - 3a/4 + 9a^2/8 \\ -a/2 - a^2 & 1/2 + a/2 + 3a^2/4 & 1/2 + 3a/4 + 9a^2/8 \end{pmatrix}.$$

De esta forma, los coeficientes de la solución general, a primer orden en a , son:

$$\begin{aligned} A &= R_c - \beta R_0 + aR_0\alpha, \\ B &= -R_0(a\gamma + \delta), \\ C &= \frac{R_0}{2}(\alpha + \beta) - \frac{aR_0}{4}(2\alpha + 3\beta), \\ D &= \frac{R_0}{2}(\delta - \gamma) + \frac{aR_0}{4}(2\gamma - 3\delta), \\ E &= \frac{R_0}{2}(\beta - \alpha) + \frac{aR_0}{4}(3\beta - 2\alpha), \\ F &= \frac{R_0}{2}(\delta + \gamma) + \frac{aR_0}{4}(2\gamma + 3\delta), \end{aligned}$$

y los coeficientes

$$b_1/a = -\delta R_0, \quad b_2/a = \beta R_0.$$

Este movimiento depende del radio ciclotrónico R_c , a través del parámetro A , y el resto de los términos dependen del radio interno R_0 .

La solución general, despreciando términos de orden aR_0 , se puede escribir en forma vectorial como:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathcal{R}_{\text{Oz}}(\omega_c t) \begin{pmatrix} R_c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (\mathbb{I} - \mathcal{R}_{\text{Oz}}(\omega_c t)) \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} R_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \mathcal{R}_{\text{Oz}}\left(-\frac{\omega_c t}{2}\right) \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi + \omega t) \begin{pmatrix} R_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + O(aR_0), \end{aligned}$$

donde \mathbb{I} es la matriz unidad 3×3 y $\mathcal{R}(\phi, \theta, \psi) \equiv \mathcal{R}_{\text{Oz}}(\phi)\mathcal{R}_{\text{Oy}}(\theta)\mathcal{R}_{\text{Oz}}(\psi)$. Los dos primeros términos representan el movimiento del centro de masa a este orden de aproximación, mientras que el tercero es precisamente el movimiento relativo del centro de carga alrededor del centro de masa. La contribución a orden aR_0 , que hemos despreciado, se puede escribir como:

$$\begin{aligned} &O(aR_0) \\ &= -J_z \left[\mathcal{R}_{\text{Oz}}(\omega_c t)\mathcal{R}(\phi, \theta, \psi) - \mathcal{R}_{\text{Oz}}\left(-\frac{\omega_c t}{2}\right)\mathcal{R}(\phi, \theta, \psi + \omega t) \right] \begin{pmatrix} 0 \\ aR_0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad - J_z \left[\frac{\sin(\omega t)}{2} \mathcal{R}_{\text{Oz}}\left(-\frac{\omega_c t}{2}\right)\mathcal{R}(\phi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} aR_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \end{aligned}$$

donde

$$J_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

es la matriz 3×3 , generadora de las rotaciones alrededor del eje OZ . Los dos primeros términos representan la corrección a este orden, del movimiento del centro de masa, y el tercero es la corrección del movimiento relativo interno. La presencia del generador J_z en este término, implica que esta corrección no produce ninguna contribución al movimiento alrededor del eje OZ . La solución alrededor de OZ es exactamente:

$$q_3(t) = 0, \quad r_3(t) = -R_0 \sin \theta \cos(\omega t + \psi), \quad (2.93)$$

es decir, un movimiento armónico de amplitud $R_0 \sin \theta$, y frecuencia ω .

La posición relativa del centro de carga con respecto al centro de masa verifica:

$$\mathbf{k}(t) = \mathcal{R}_{OZ} \left(-\frac{\omega_c t}{2} \right) \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi + \omega t) \begin{pmatrix} R_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - J_z \left[\frac{\sin(\omega t)}{2} \mathcal{R}_{OZ} \left(-\frac{\omega_c t}{2} \right) \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} aR_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \quad (2.94)$$

y si despreciamos las contribuciones al orden aR_0 , se reduce al primer término

$$\mathbf{k}(t) \approx \mathcal{R}_{OZ} \left(-\frac{\omega_c t}{2} \right) \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi + \omega t) \begin{pmatrix} R_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.95)$$

que representa una oscilación con la frecuencia natural ω del zitterbewegung alrededor del eje inicial del espín, y con una precesión hacia atrás con la velocidad angular $\omega_c/2$.

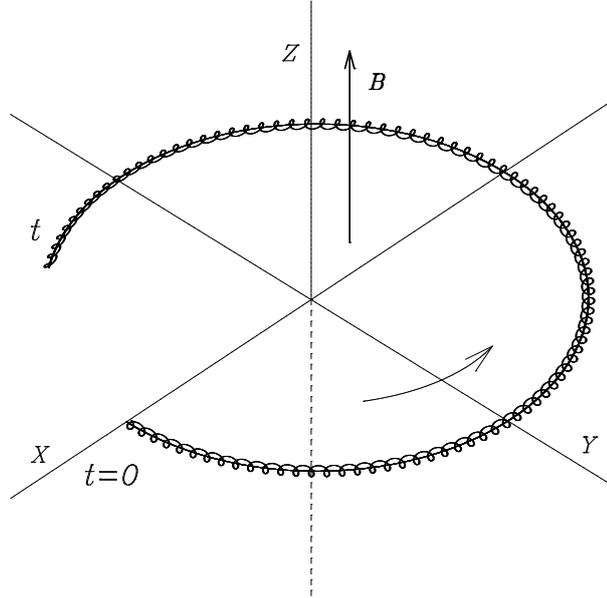


Figura 2.3: **Movimiento del centro de carga y centro de masa de una partícula negativamente cargada, en un campo magnético uniforme. La velocidad del centro de masa es perpendicular al campo.**

La trayectoria de los centros de masa y carga se ha dibujado en la Figura 2.3, donde el movimiento rizado representa la trayectoria del centro de carga.

Para el estudio de la dinámica del espín con respecto al centro de masa, sustituiremos la solución general en su definición analítica

$$\mathbf{S}_{CM}(t) = -m\mathbf{k}(t) \times \frac{d\mathbf{k}(t)}{dt}, \quad (2.96)$$

donde lo único que tenemos que calcular es la derivada (2.95). Para este cálculo, tenemos que tener en cuenta que

$$\mathcal{R}_{\text{OZ}}(\omega t) = \exp(J_z \omega t),$$

y por lo tanto

$$\dot{\mathcal{R}}_{\text{OZ}}(\omega t) = \exp(J_z \omega t) J_z \omega = \mathcal{R}_{\text{OZ}}(\omega t) J_z \omega = J_z \omega \mathcal{R}_{\text{OZ}}(\omega t).$$

Tomando la derivada de (2.95) obtenemos los siguientes términos:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{k}}{dt} &= \mathcal{R}_{\text{OZ}}\left(-\frac{\omega_c t}{2}\right) J_z \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi + \omega t) \begin{pmatrix} -\omega_c R_0/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \mathcal{R}_{\text{OZ}}\left(-\frac{\omega_c t}{2}\right) \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi + \omega t) \begin{pmatrix} 0 \\ \omega R_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.97)$$

donde

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \omega R_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \omega J_z \begin{pmatrix} R_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.98)$$

De todos estos términos, el primero es de orden $\omega_c R_0 = v R_0 / R_c = a \omega R_0 = ac$, que incluso con campos magnéticos intensos se puede despreciar.

La dinámica del espín con respecto al centro de masa se reduce a:

$$\mathbf{S}_{CM}(t) = \mathcal{R}_{\text{OZ}}\left(-\frac{\omega_c t}{2}\right) \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi + \omega t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m\omega R_0^2 \end{pmatrix} = \mathcal{R}_{\text{OZ}}\left(-\frac{\omega_c t}{2}\right) \mathbf{S}_{CM}(0), \quad (2.99)$$

donde $\mathbf{S}_{CM}(0)$ viene dado en (2.92). El espín con respecto al centro de masa precesa hacia atrás con la mitad de la velocidad angular del movimiento ciclotrónico mientras que su valor absoluto permanece constante a este orden de aproximación. En la Figura 2.4 representamos esta evolución durante el mismo intervalo temporal que la de la de la Figura 2.3 con una orientación inicial $\theta = 30^\circ$ y $\phi = 90^\circ$, donde podemos observar, además de la precesión con velocidad angular constante, una pequeña nutación, al siguiente orden de aproximación.

La energía del sistema es

$$H = -T - \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{U}}{dt}, \quad (2.100)$$

que sepuede expresar como:

$$H = \frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 - \frac{m}{2\omega^2} \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)^2 + \frac{m}{\omega^2} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} + eV(\mathbf{r}, t),$$

y, como $V(\mathbf{r}, t) = 0$ en presencia de un campo magnético constante, resulta:

$$H = \frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{q}}{dt}\right)^2 - \frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{k}}{dt}\right)^2 - \frac{m\omega^2}{2} \mathbf{k}^2 = \frac{(\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2}{2m} + H_0. \quad (2.101)$$

A orden más bajo, la contribución proviene de

$$\mathbf{q}(t) = \mathcal{R}_{\text{OZ}}(\omega_c t) \begin{pmatrix} R_c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (\mathbb{I} - \mathcal{R}_{\text{OZ}}(\omega_c t)) \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} R_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

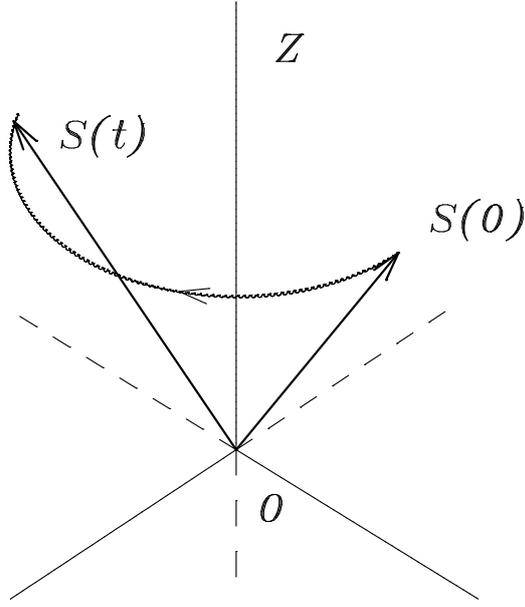


Figura 2.4: **Precesión del espín con respecto al centro de masa alrededor del eje OZ .**

Por lo tanto

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathcal{R}_{OZ}(\omega_c t) \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} - \mathcal{R}_{OZ}(\omega_c t) J_z \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} \omega_c R_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de tal manera que teniendo en cuenta (2.94) y (2.97)

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{q}}{dt}\right)^2 &= v^2 + \left[J_z \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} \omega_c R_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^2 \\ &\quad - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[J_z \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} \omega_c R_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \\ \left(\frac{d\mathbf{k}}{dt}\right)^2 &= \omega^2 R_0^2 + \left[J_z \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi + \omega t) \begin{pmatrix} -\omega_c R_0/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^2 \\ &\quad + 2 \left[J_z \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi + \omega t) \begin{pmatrix} -\omega_c R_0/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \left[\mathcal{R}(\phi, \theta, \psi + \omega t) \begin{pmatrix} 0 \\ \omega R_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Como

$$\mathcal{R}(\phi, \theta, \psi + \omega t) = \begin{pmatrix} \beta(t) & \gamma(t) & \cos \phi \sin \theta \\ \delta(t) & \alpha(t) & \sin \phi \sin \theta \\ -\sin \theta \cos(\omega t + \psi) & \sin \theta \sin(\omega t + \psi) & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$J_z \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi + \omega t) = \begin{pmatrix} -\delta(t) & -\alpha(t) & -\sin \phi \sin \theta \\ \beta(t) & \gamma(t) & \cos \phi \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde

$$\alpha(t) = -\sin \phi \cos \theta \sin(\psi + \omega t) + \cos \phi \cos(\psi + \omega t),$$

$$\begin{aligned}
\beta(t) &= \cos \phi \cos \theta \cos(\psi + \omega t) - \sin \phi \sin(\psi + \omega t), \\
\gamma(t) &= -\cos \phi \cos \theta \sin(\psi + \omega t) - \sin \phi \cos(\psi + \omega t), \\
\delta(t) &= \sin \phi \cos \theta \cos(\psi + \omega t) + \cos \phi \sin(\psi + \omega t)
\end{aligned}$$

entonces

$$J_z \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi + \omega t) \begin{pmatrix} \omega_c R_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \omega_c R_0 \begin{pmatrix} -\delta(t) \\ \beta(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\mathbf{q}}{dt}\right)^2 &= v^2 + \omega_c^2 R_0^2 (\delta(0)^2 + \beta(0)^2) - 2v\omega_c R_0 \beta(0), \\
\left(\frac{d\mathbf{k}}{dt}\right)^2 &= \omega^2 R_0^2 + \frac{\omega_c^2 R_0^2}{4} (\delta(t)^2 + \beta(t)^2) + \omega\omega_c R_0^2 (\delta(t)\gamma(t) - \beta(t)\alpha(t)).
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\delta(t)\gamma(t) - \beta(t)\alpha(t) &= -\cos \theta, \\
\delta(0)^2 + \beta(0)^2 &= 1 - \sin^2 \theta \cos^2 \psi, \\
\delta(t)^2 + \beta(t)^2 &= 1 - \sin^2 \theta \cos^2(\psi + \omega t),
\end{aligned}$$

si expresamos ω_c en términos del parámetro a , $\omega_c = -a\omega$, en el caso del electrón $\omega R_0 = c$, la energía a orden más bajo en a es:

$$\begin{aligned}
H &= H_0 - a \left(\frac{mc^2 \cos \theta}{2} - mvc\beta(0) \right) \\
&+ a^2 \frac{mc^2}{2} \left(\delta(0)^2 + \beta(0)^2 - \frac{1}{4} (\delta(t)^2 + \beta(t)^2) \right).
\end{aligned}$$

Al orden más bajo, la energía de interacción se puede poner como:

$$H_I = -\frac{1}{2} amc^2 \cos \theta = -\frac{eB}{2m} \frac{mc^2}{\omega} \cos \theta = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}, \quad (2.102)$$

y como $S = m\omega R_0^2 = mc^2/\omega$, $S_z = -S \cos \theta$, implica que

$$\mu_z = \frac{eS \cos \theta}{2m} = -\frac{eS_z}{2m}, \quad (2.103)$$

o bien

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{2m} \mathbf{S}_{CM}. \quad (2.104)$$

La energía de interacción se puede también escribir como:

$$H_I = -\frac{eB}{2m} S \cos \theta = \frac{e}{2m} \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}_{CM} = \frac{-\boldsymbol{\omega}_c}{2} \cdot \mathbf{S}_{CM}, \quad (2.105)$$

i.e., como el producto escalar del espín con respecto al centro de masa y la velocidad angular de precesión del espín.

Desde otro punto de vista, si suponemos que la relación entre el espín y el momento magnético viene dada por (2.104), y que la dinámica del momento angular con respecto al centro de masa viene dada por la ecuación del momento

$$\frac{d\mathbf{S}_{CM}}{dt} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} = -\frac{e}{2m} \mathbf{S}_{CM} \times \mathbf{B} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{S}_{CM}.$$

La velocidad angular constante de precesión del espín, es la frecuencia angular de Larmor

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{e\mathbf{B}}{2m} = -\frac{\boldsymbol{\omega}_c}{2},$$

ya que $\boldsymbol{\omega}_c = -e\mathbf{B}/m$, i.e., de valor mitad y dirección opuesta a la velocidad angular ciclotrónica, como se pone de manifiesto en la Figura 2.4. Esto produce la contribución a primer orden, ya que a este orden el espín conserva su valor absoluto. Sin embargo, esta hipótesis no contiene los términos adicionales de corrección a los modos normales ω_i , que pueden ser relevantes en procesos de alta energía, y que se pueden obtener usando la solución general exacta.

2.2.8. Partícula Galileana con orientación

Otro ejemplo simple de partícula con espín es aquél en el que el espín está relacionado con las variables de orientación.

Desde el punto de vista matemático, el espacio cinemático es el $X = \mathcal{G}/\mathbb{R}_v^3$, donde $\mathbb{R}_v^3 \equiv \{\mathbb{R}^3, +\}$ es el subgrupo Abeliano de las transformaciones Galileanas puras con velocidad constante. De esta forma, las variables cinemáticas son $x \equiv (t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})$, que se interpretan como el tiempo, la posición y la orientación, respectivamente.

Una Lagrangiana para este espacio cinemático tiene la forma general

$$\tilde{L} = T\dot{t} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Debido a la estructura del exponente (2.220), la función gauge es la misma que en los ejemplos anteriores. La relación general (2.52) nos lleva a que $\mathbf{W} \times \boldsymbol{\omega} = 0$, ya que la Lagrangiana es independiente de $\dot{\mathbf{u}}$, y por lo tanto \mathbf{W} y $\boldsymbol{\omega}$ son colineales. De acuerdo con la forma de transformar de la Lagrangiana, el término $\mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\omega}$ es invariante Galileano y como \mathbf{W} y $\boldsymbol{\omega}$ son colineales, podemos tomar $\mathbf{W} \sim \boldsymbol{\omega}$ y una posible Lagrangiana puede ser de la forma:

$$\tilde{L} = \frac{m}{2} \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{\dot{t}} + \frac{I}{2} \frac{\boldsymbol{\omega}^2}{\dot{t}}. \quad (2.106)$$

Las diferentes constantes del movimiento Noetherianas son

$$H = \frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 + \frac{I}{2} \boldsymbol{\Omega}^2, \quad \mathbf{P} = m\mathbf{u},$$

$$\mathbf{K} = m\mathbf{r} - \mathbf{P}t, \quad \mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{W},$$

donde $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$ es la velocidad del punto \mathbf{r} , y $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}/\dot{t}$ es la velocidad angular en términos de la evolución temporal, frente a la $\boldsymbol{\omega}$ que representa la velocidad angular pero no con respecto al tiempo sino con respecto al parámetro de evolución arbitrario τ . El punto \mathbf{r} se mueve con velocidad constante y representa tanto la posición del centro de carga como la posición del centro de masa. El espín con respecto al centro de masa es el observable $\mathbf{S} \equiv \mathbf{W}$ que satisface la ecuación dinámica $d\mathbf{S}/dt = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S} = 0$, y por lo tanto, el sistema cartesiano local asociado al punto \mathbf{r} rota con velocidad angular constante $\boldsymbol{\Omega}$.

El espín toma el valor constante $\mathbf{S} = I\boldsymbol{\Omega}$, y cuyo valor absoluto es independiente del observador inercial. El parámetro I juega el papel de momento principal de inercia, lo que sugiere una proporcionalidad directa entre el espín y la velocidad angular, lo que corresponde a un sistema mecánico con simetría esférica. Podríamos asociar un cierto tamaño a la partícula ya que sugiere que posee un radio de giro R_0 , relacionado con los otros parámetros por $I = mR_0^2$.

Este modelo correspondería clásicamente a un sólido rígido con simetría esférica (los tres momentos principales de inercia iguales) de tal manera que las variables de orientación $\boldsymbol{\rho}$ describen la orientación de sus ejes principales de inercia. Es una partícula de seis grados de libertad.

Tres representan la posición del centro de carga \mathbf{r} y los otros tres $\boldsymbol{\rho}$, la orientación de un sistema cartesiano, comóvil, ligado al punto \mathbf{r} . Como no hay dependencia de la Lagrangiana de la aceleración los centros de carga y masa, son el mismo punto.

Para el observador del centro de masa no existe corriente asociada al movimiento del centro de carga, por lo que no es posible asociarle ni momento magnético ni momento dipolar eléctrico. Por lo visto en los ejemplos anteriores, las propiedades magnéticas de la partícula están asociadas con la parte del espín relacionada con el zitterbewegung, y están ausentes en este modelo de tipo sólido rígido.

PARTÍCULAS RELATIVISTAS

2.3. Partícula puntual relativista

El grupo cinemático asociado al Principio de Relatividad Restringido es el grupo de Poincaré. Ver el Apéndice al final del capítulo sobre el grupo de Poincaré para la notación y propiedades que vamos a usar en este capítulo.

Consideremos un espacio cinemático caracterizado por las variables $(t, \mathbf{r}) \equiv x$, con dominios $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, similares a los parámetros del grupo b y \mathbf{a} , respectivamente. Este espacio cinemático es la estructura cociente $X = \mathcal{P}/\mathcal{L}$, donde \mathcal{P} es el grupo de Poincaré y el subgrupo \mathcal{L} es el grupo de Lorentz. Supondremos que son funciones de un cierto parámetro de evolución τ y que en cualquier instante τ de la evolución dos observadores inerciales cualesquiera relacionan sus medidas espacio-temporales mediante la acción del elemento del grupo $g \equiv (b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{P}$, dada por:

$$t'(\tau) = \gamma t(\tau) + \gamma(\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{r}(\tau))/c^2 + b, \quad (2.107)$$

$$\mathbf{r}'(\tau) = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{r}(\tau) + \gamma\mathbf{v}t(\tau) + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)c^2}(\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{r}(\tau))\mathbf{v} + \mathbf{a}, \quad (2.108)$$

Estas variables se interpretan como el tiempo y la posición de la partícula. Si el parámetro de evolución τ es invariante bajo el grupo tomando las derivadas con respecto a τ de (2.107) y (2.108) obtenemos la ley de transformación de las derivadas de las variables cinemáticas

$$\dot{t}'(\tau) = \gamma\dot{t}(\tau) + \gamma(\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\dot{\mathbf{r}}(\tau))/c^2, \quad (2.109)$$

$$\dot{\mathbf{r}}'(\tau) = R(\boldsymbol{\mu})\dot{\mathbf{r}}(\tau) + \gamma\mathbf{v}\dot{t}(\tau) + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)c^2}(\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\dot{\mathbf{r}}(\tau))\mathbf{v}. \quad (2.110)$$

No existen ligaduras entre estas variables y solamente la homogeneidad de la Lagrangiana en términos de las derivadas de las variables cinemáticas nos reducen de cuatro a tres el número de grados de libertad de la partícula. Esta homogeneidad nos lleva a la forma general:

$$\tilde{L} = T\dot{t} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}}, \quad (2.111)$$

donde $T = \partial\tilde{L}/\partial\dot{t}$ y $R_i = \partial\tilde{L}/\partial\dot{r}_i$ son todavía funciones desconocidas de las variables cinemáticas y de sus derivadas. Además, son funciones homogéneas de grado cero de las derivadas de las variables cinemáticas.

Si la partícula es libre, las ecuaciones dinámicas son invariantes bajo \mathcal{P} , y también la Lagrangiana porque el grupo de Poincaré no posee exponentes no triviales y las posibles funciones gauge asociadas a su transformación son nulas.

Desde el punto de vista de las transformaciones infinitesimales, como $\tilde{L}_0(t, \mathbf{r}, \dot{t}, \dot{\mathbf{r}})$ depende de estas variables que transforman según (2.107-2.110), los diferentes generadores del grupo de Poincaré al actuar sobre funciones de estas variables son:

$$H = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{P} = \nabla, \quad \mathbf{J} = \mathbf{r} \times \nabla + \dot{\mathbf{r}} \times \nabla_{\dot{\mathbf{r}}}, \quad \mathbf{K} = \frac{\mathbf{r}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} + t\nabla + \frac{\dot{\mathbf{r}}}{c^2} \frac{\partial}{\partial \dot{t}} + \dot{t}\nabla_{\dot{\mathbf{r}}},$$

como en el caso Galileano, salvo el generador de los boosts \mathbf{K} , que tiene una estructura diferente porque la transformación de velocidad \mathbf{v} afecta no solo a las variables espaciales \mathbf{r} y $\dot{\mathbf{r}}$ como en el caso Galileano, sino que también a las variables temporales t y \dot{t} .

Si $H\tilde{L}_0 = 0$ y $\mathbf{P}\tilde{L}_0 = 0$, implica que \tilde{L}_0 no es función de t ni de \mathbf{r} . Además $\mathbf{J}\tilde{L}_0 = 0$ implica que es función de $\dot{\mathbf{r}}^2$ y también de \dot{t} para ser homogénea de grado 1. Finalmente, si es invariante bajo los boosts Lorentzianos $\mathbf{K}\tilde{L}_0 = 0$, lo que implica que

$$\left(\frac{\dot{\mathbf{r}}}{c^2} \frac{\partial}{\partial \dot{t}} + t \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} \right) \tilde{L}_0 = 0,$$

que nos lleva a que \tilde{L}_0 es una función arbitraria de $c^2 \dot{t}^2 - \dot{\mathbf{r}}^2$. Además hay que exigirle que sea homogénea de grado 1 en estas derivadas y que tenga dimensiones de acción. Una posibilidad es que sea de la forma $s\sqrt{c^2 \dot{t}^2 - \dot{\mathbf{r}}^2}$, con s un parámetro de dimensiones de masa×velocidad, por ejemplo mc .

Como la Lagrangiana es invariante bajo \mathcal{P} , desde el punto de vista de transformaciones finitas, las funciones T y \mathbf{R} transforman bajo \mathcal{P} en la forma:

$$T' = \gamma T - \gamma(\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}(\boldsymbol{\mu})\mathbf{R}), \quad (2.112)$$

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R}(\boldsymbol{\mu})\mathbf{R} - \gamma \mathbf{v} T / c^2 + \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}(\boldsymbol{\mu})\mathbf{R}) \mathbf{v} / c^2. \quad (2.113)$$

Donde vemos que, al no depender estas ecuaciones de b y \mathbf{a} , las funciones T y \mathbf{R} son invariantes bajo traslaciones y, por lo tanto, independientes de t y de \mathbf{r} .

Los momentos conjugados de las variables generalizadas $q_i = r_i$ son $p_i = \partial \tilde{L} / \partial \dot{r}_i$, y las constantes del movimiento Noetherianas se calculan de forma similar al caso Galileano. La única diferencia es que ahora la función gauge es nula, y para el cálculo del momento cinemático tenemos que las transformaciones infinitesimales son $\delta t = \mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{v} / c^2$, $M_i = r_i / c^2$ and $\delta \mathbf{r} = t \delta \mathbf{v}$, $M_{ij} = t \delta_{ij}$ por lo que obtenemos:

$$\text{Momento temporal } H = -T, \quad (2.114)$$

$$\text{Momento lineal } \mathbf{P} = \mathbf{R} = \mathbf{p}, \quad (2.115)$$

$$\text{Momento cinemático } \mathbf{K} = H\mathbf{r}/c^2 - \mathbf{P}t, \quad (2.116)$$

$$\text{Momento angular } \mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}. \quad (2.117)$$

La energía (momento temporal) y el momento lineal transforman como:

$$H'(\tau) = \gamma H(\tau) + \gamma(\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}(\boldsymbol{\mu})\mathbf{P}(\tau)), \quad (2.118)$$

$$\mathbf{P}'(\tau) = \mathbf{R}(\boldsymbol{\mu})\mathbf{P}(\tau) + \frac{\gamma \mathbf{v}}{c^2} H(\tau) + \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}(\boldsymbol{\mu})\mathbf{P}(\tau)) \mathbf{v}. \quad (2.119)$$

Es decir, como las componentes de un tetravector contravariante $P^\mu \equiv (H/c, \mathbf{P})$. Los observables $c\mathbf{K}$ y \mathbf{J} son las componentes esenciales del tensor antisimétrico $J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu} = x^\mu P^\nu - x^\nu P^\mu$, $cK_i = J^{i0}$ y $J_k = \epsilon_{kil} J^{il} / 2$.

Tomando la derivada τ del momento cinemático, $\dot{\mathbf{K}} = 0$, obtenemos que $\mathbf{P} = H\dot{\mathbf{r}}/c^2 \dot{t} = H\mathbf{u}/c^2$, donde $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{r}}/\dot{t}$ es la velocidad de la partícula y el punto \mathbf{r} representa tanto la posición de la carga como el centro de masa.

Las seis condiciones $\mathbf{P} = 0$ y $\mathbf{K} = 0$, implican $\mathbf{u} = 0$ y $\mathbf{r} = 0$, de manera que la partícula está en reposo y localizada en el origen del sistema de referencia, como en el caso no relativista. Denominamos a estos observadores la clase de observadores del centro de masa.

De (2.118) y (2.119) vemos que la magnitud $(H'/c)^2 - \mathbf{P}'^2 = (H/c)^2 - \mathbf{P}^2$ es invariante Poincaré y además una constante del movimiento. Como $\mathbf{P}^2 = (H/c)^2 u^2 / c^2$, con $u < c$, esto implica que este invariante sea definido positivo, de dimensiones masa×velocidad al cuadrado,

y lo escribamos como el cuadrado $(mc)^2$ en términos de una magnitud constante, la masa de la partícula que la tomamos como el número positivo m . Despejando H , obtenemos dos posibilidades

$$H = \pm mc^2(1 - u^2/c^2)^{-1/2} = \pm\gamma(u)mc^2.$$

De aquí que $\mathbf{P} = \pm\gamma(u)m\mathbf{u}$. Vamos a ver que el signo de H , que puede ser positivo o negativo, es otra propiedad invariante Poincaré.

Para el observador del centro de masa, $\mathbf{P} = 0$, por lo que $H = \pm mc^2$. Si $H > 0$ para el observador del centro de masa, entonces de (2.118) se tiene que para cualquier otro observador, $H' = \gamma H \geq H > 0$, pues $\gamma \geq 1$. Si $H < 0$, entonces también $H' = \gamma H \leq H < 0$. El signo de H es otra propiedad invariante entre observadores.

La velocidad $u < c$, porque en caso contrario H sería imaginario. Si $u > c$ el invariante $(H/c)^2 - P^2 < 0$ y no es posible definir la masa en reposo de la partícula. Si sustituímos las expresiones de T y \mathbf{R} en (2.111), obtenemos dos posibles Lagrangianas para una partícula puntual de masa m , caracterizadas además, por el signo de H

$$\tilde{L} = \mp mc\sqrt{c^2\dot{t}^2 - \dot{\mathbf{r}}^2}. \quad (2.120)$$

La partícula que describe la Lagrangiana (2.120) con el signo $+$, posee un momento temporal $H < 0$, y la de signo $-$, $H > 0$. Partículas y antipartículas aparecen de forma más simétrica en la formulación relativista. Si desarrollamos la Lagrangiana al orden más bajo en u/c , en el caso $H > 0$, obtenemos

$$\tilde{L} = -mc^2\dot{t} + \frac{m}{2} \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{\dot{t}},$$

por lo que el primer término $-mc^2\dot{t}$ es equivalente al término Galileano $-H_0\dot{t}$ de (2.17). La Lagrangiana con $H < 0$ posee como límite de baja velocidad $-(m/2)\dot{\mathbf{r}}^2/\dot{t}$ que no aparece descrita como un posible ejemplo en el caso Galileano.

El espín se define similarmente al caso no relativista

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{J} - \mathbf{q} \times \mathbf{P} = \mathbf{J} - \frac{c^2}{H} \mathbf{K} \times \mathbf{P} = 0, \quad (2.121)$$

es nulo, por lo que la partícula puntual relativista no posee espín.

2.4. Partículas relativistas con espín

Los espacios homogéneos de mayor dimensión de \mathcal{P} , pueden ser parametrizados por las variables $(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$, donde el parámetro velocidad \mathbf{u} puede ser $u < c$, $u = c$, o bien $u > c$, por lo que el grupo de Poincaré describe tres tipos maximales de partículas con espín. Las denominaremos, de acuerdo con el valor de este parámetro, por los nombres siguientes: al primer grupo, en el que la carga de la partícula se mueve con $u < c$, le llamaremos **bradión**, a partir del griego $\beta\rho\alpha\delta\nu\varsigma$ que significa lento. Los bradiones son por lo tanto aquellas partículas elementales cuya posición de la carga \mathbf{r} nunca alcanza la velocidad de la luz. A la segunda clase de partículas con $(u = c)$ las denominaremos **luxones** puesto que el punto \mathbf{r} se mueve siempre a la velocidad de la luz para todo observador, y finalmente, a las del tercer grupo que como $u > c$, las llamaremos **taquiones**, a partir del griego $\tau\alpha\chi\nu\varsigma$, rápido.

Para el segundo grupo hemos usado el nombre latino de luxones en vez del griego fotones, porque en este grupo, además de describir fotones clásicos con espín también vamos a encontrar la descripción clásica del electrón. Esta clase de partículas relativistas y los taquiones no poseen equivalentes no relativistas

La primera clase corresponde a partículas cuyo espacio cinemático es todo el grupo de Poincaré y produce modelos que van a tener correspondencia, en el caso de baja velocidad frente a c , con los modelos que se analizan en el caso Galileano. De acuerdo con el análisis hecho en el preámbulo sobre el movimiento del centro de carga, cuya velocidad debe ser inalcanzable para todo observador inercial, es precisamente al grupo de luxones al que vamos a dedicar el estudio que sigue. Quienes quieran analizar otros ejemplos relativistas, en particular los taquiones, pueden consultar el libro del autor. En el caso de los taquiones no es posible encontrar modelos que al ser cuantizados tengan espín $1/2$.

2.5. Luxones

Consideremos aquellas partículas elementales cuyo espacio cinemático está formado por las variables $(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ de dominios $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}_c^3$, y $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ pero con $u = c$. Como $u = c$ vamos a denominar a esta clase de partículas con el nombre de **Luxones**. Esta variedad es un espacio homogéneo del grupo de Poincaré \mathcal{P} . En efecto, consideremos el punto de esta variedad $x \equiv (0, 0, \mathbf{u}, 0)$. El grupo que lo deja invariante (the little group) es el subgrupo uniparamétrico \mathcal{V}_u de transformaciones de Lorentz puras en la dirección del vector \mathbf{u} . Entonces $X \sim \mathcal{P}/\mathcal{V}_u$, resulta ser un espacio homogéneo de dimensión nueve.

Para estas partículas, las variables t, \mathbf{r} transforman de acuerdo con (2.107) y (2.108), respectivamente. Sus derivadas como en (2.109) y (2.110). Para la velocidad \mathbf{u} la forma de transformar se obtiene de su cociente y resulta ser

$$\mathbf{u}'(\tau) = \frac{R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{u}(\tau) + \gamma\mathbf{v} + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)c^2}(\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{u}(\tau))\mathbf{v}}{\gamma(1 + \mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{u}(\tau)/c^2)}. \quad (2.122)$$

De aquí obtenemos que

$$u'^2 = \frac{u^2 - c^2}{\gamma^2(1 + \mathbf{v} \cdot R\mathbf{u}/c^2)^2} + c^2,$$

por lo que si $u = c$ para un observador, esto implica $u' = c$, para todos por lo que la variedad dada es un espacio homogéneo de \mathcal{P} .

La forma general de transformación de las variables de orientación $\boldsymbol{\rho}$, se obtiene de (2.232) pero ahora las funciones \mathbf{F} y G , que involucran factores $\gamma(u)$, se hacen infinitas en el límite $u \rightarrow c$, pero se cancelan en ambos miembros y nos llevan finalmente a

$$\boldsymbol{\rho}'(\tau) = \frac{\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\rho}(\tau) - \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\rho}(\tau) + \mathbf{F}_c(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}; \mathbf{u}(\tau), \boldsymbol{\rho}(\tau))}{1 - \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\rho}(\tau) + G_c(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}; \mathbf{u}(\tau), \boldsymbol{\rho}(\tau))}, \quad (2.123)$$

donde las funciones \mathbf{F}_c y G_c vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_c(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}; \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) &= \frac{\gamma(v)}{(1 + \gamma(v))c^2} [\mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\mu}) + \mathbf{v}(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\rho}) \\ &+ \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu}) + (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\rho}) \times \mathbf{v} + (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\rho})(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu}) \\ &+ (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\rho})(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\mu}) + (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\rho}) \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu})], \end{aligned} \quad (2.124)$$

$$\begin{aligned} G_c(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}; \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) &= \frac{\gamma(v)}{(1 + \gamma(v))c^2} [\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu}) + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\rho}) \\ &- (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\rho})(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\mu}) + (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\rho}) \cdot (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu})]. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Como $u' = u = c$, el valor absoluto de la velocidad es invariante lo cual significa que \mathbf{u}' puede ser obtenido a partir de \mathbf{u} mediante una rotación:

$$\mathbf{u}' = R(\boldsymbol{\phi})\mathbf{u}, \quad (2.126)$$

donde el parámetro que caracteriza a esta rotación ϕ es

$$\phi = \frac{\boldsymbol{\mu} + \mathbf{F}_c(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}; \mathbf{u}(\tau), 0)}{1 + G_c(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}; \mathbf{u}(\tau), 0)}. \quad (2.127)$$

Entre las variables cinemáticas existen las ligaduras $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{r}}/\dot{t}$.

La ecuación (2.123) corresponde a

$$R(\boldsymbol{\rho}') = R(\phi)R(\boldsymbol{\rho}), \quad (2.128)$$

con la misma ϕ en ambos casos, como en (2.127).

Puesto que la variable $u(\tau) = c$, durante toda la evolución y para cualquier observador, podemos encontrar dos tipos distintos de partículas. En efecto, si derivamos con respecto a τ la expresión de $u^2 = c^2$, obtenemos que $\dot{\mathbf{u}}(\tau) \cdot \mathbf{u}(\tau) = 0$, es decir, partículas para las cuales siempre $\dot{\mathbf{u}}(\tau) = 0$ que como veremos son partículas sin masa, y partículas para las que $\dot{\mathbf{u}}(\tau) \neq 0$ pero es siempre ortogonal a \mathbf{u} . Estas partículas corresponden a objetos con masa cuya carga se está moviendo siempre a la velocidad constante c , y cuyo centro de masa se va a mover con velocidad inferior a c . Este tipo de partículas son consistentes con lo analizado en el preámbulo, para objetos elementales cuyo centro de carga y centro de masa son puntos diferentes.

2.5.1. Partículas sin masa. (El fotón)

Si $\dot{\mathbf{u}} = 0$, \mathbf{u} es constante y la partícula sigue una trayectoria rectilínea con velocidad constante. Por lo tanto las variables cinemáticas se reducen a $(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})$ con los mismos dominios y significados habituales de tiempo, posición y orientación, respectivamente. Las derivadas \dot{t} y $\dot{\mathbf{r}}$ transforman como (2.109) y (2.110) y, en vez de la variable $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ vamos a utilizar la variable $\boldsymbol{\omega}$ definida en (2.34) y que transforma bajo \mathcal{P} :

$$\boldsymbol{\omega}'(\tau) = R(\phi)\boldsymbol{\omega}(\tau), \quad (2.129)$$

donde de nuevo, ϕ viene dada en (2.127).

En efecto, a partir de (2.128), como $\dot{\mathbf{u}} = 0$, si tomamos la derivada τ de ambos miembros,

$$\dot{R}(\boldsymbol{\rho}') = R(\phi)\dot{R}(\boldsymbol{\rho}),$$

y la matriz antisimétrica $\Omega = \dot{R}(\boldsymbol{\rho})R^T(\boldsymbol{\rho})$ posee por componentes esenciales las componentes del vector velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$,

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.130)$$

Podemos ver que transforma

$$\Omega' = \dot{R}(\boldsymbol{\rho}')R^T(\boldsymbol{\rho}') = R(\phi)\dot{R}(\boldsymbol{\rho})R^T(\boldsymbol{\rho})R^T(\phi) = R(\phi)\Omega R^T(\phi),$$

y esta transformación de la matriz conduce a que sus componentes esenciales transformen de acuerdo con (2.129).

Para esta partícula no existen ligaduras entre sus variables cinemáticas, y como $\dot{\mathbf{u}} = 0$, la forma más general de su Lagrangiana utilizando la homogeneidad, es

$$\tilde{L} = T\dot{t} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (2.131)$$

Las funciones $T = \partial\tilde{L}/\partial\dot{t}$, $R_i = \partial\tilde{L}/\partial\dot{r}^i$, $W_i = \partial\tilde{L}/\partial\dot{\omega}^i$, serán funciones de $(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})$ y funciones homogéneas de grado cero de las derivadas de las variables cinemáticas $(\dot{t}, \dot{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\omega})$. Como $\dot{t} \neq 0$ las podremos expresar en términos de $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{r}}/\dot{t}$ y de $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}/\dot{t}$, que son efectivamente la velocidad y velocidad angular de la partícula, respectivamente.

Debido a la invariancia de la Lagrangiana bajo \mathcal{P} , nos lleva a que estas funciones transformen bajo \mathcal{P} :

$$T' = \gamma T - \gamma(\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{R}), \quad (2.132)$$

$$\mathbf{R}' = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{R} - \gamma\mathbf{v}T/c^2 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)c^2}(\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{R})\mathbf{v}, \quad (2.133)$$

$$\mathbf{W}' = R(\phi)\mathbf{W}. \quad (2.134)$$

Son invariantes por traslación y por lo tanto independientes de t and \mathbf{r} . Son por lo tanto únicamente funciones de $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\Omega})$, con la ligadura $u = c$. La invariancia bajo rotación nos prohíbe la dependencia explícita de $\boldsymbol{\rho}$, de tal manera que la dependencia en las variables $\boldsymbol{\rho}$ y $\dot{\boldsymbol{\rho}}$, lo es a través de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, como hemos comentado en la sección 2.2.

El teorema de Noether nos da lugar, como anteriormente, a las siguientes constantes del movimiento:

$$\text{Momento temporal } H = -T, \quad (2.135)$$

$$\text{Momento lineal } \mathbf{P} = \mathbf{R}, \quad (2.136)$$

$$\text{Momento cinemático } \mathbf{K} = H\mathbf{r}/c^2 - \mathbf{P}t - \mathbf{W} \times \mathbf{u}/c^2, \quad (2.137)$$

$$\text{Momento angular } \mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{W}. \quad (2.138)$$

En este caso no existe el zitterbewegung, porque la Lagrangiana no depende de la $\dot{\mathbf{u}}$. La partícula, localizada en el punto \mathbf{r} , se mueve en línea recta a la velocidad de la luz, por lo que no es posible encontrar un observador inercial que la vea en reposo. Para cualquier observador inercial $\mathbf{P} \neq 0$. A pesar de no existir el observador del centro de masa, definimos el espín como el momento angular de la partícula con respecto al punto \mathbf{r} , mediante la misma expresión: $\mathbf{S} = \mathbf{J} - \mathbf{r} \times \mathbf{P} = \mathbf{W}$.

Si tomamos en (2.138) la derivada con respecto a τ , obtenemos $d\mathbf{S}/d\tau = \mathbf{P} \times \mathbf{u}$. Como \mathbf{P} y \mathbf{u} son dos constantes del movimiento, entonces el espín tiene una derivada temporal constante. Representa a un sistema mecánico con un espín que crece continuamente. Esto no es lo que entendemos por un sistema elemental salvo que esa constante sea cero y $d\mathbf{S}/d\tau = 0$. Entonces el espín es constante y como \mathbf{P} y \mathbf{u} son vectores no nulos, deben ser necesariamente vectores colineales, aunque no sabemos todavía su orientación relativa, ni la expresión de \mathbf{P} en términos de \mathbf{u} .

El momento temporal y el momento lineal son las componentes de un tetravector y juntamente con el espín transforman como

$$H' = \gamma H + \gamma(\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{P}), \quad (2.139)$$

$$\mathbf{P}' = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{P} + \gamma\mathbf{v}H/c^2 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)c^2}(\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{P})\mathbf{v}, \quad (2.140)$$

$$\mathbf{S}' = R(\phi)\mathbf{S}. \quad (2.141)$$

La relación entre \mathbf{P} y \mathbf{u} se obtiene a partir de (2.137), tomando la derivada con respecto a τ y con la condición de que el espín, que se reduce a \mathbf{W} , es constante, $\dot{\mathbf{K}} = 0 = H\dot{\mathbf{r}}/c^2 - \dot{\mathbf{P}}t$, es decir, $\mathbf{P} = H\mathbf{u}/c^2$. Tomando ahora el producto escalar de esta expresión con \mathbf{u} obtenemos que $H = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}$.

A partir de (2.139) y (2.140), la magnitud $(H/c)^2 - \mathbf{P}^2$ es una propiedad invariante y constante del movimiento, que debido a la relación entre sus términos, es idénticamente nula. La partícula es de masa nula. Para esta partícula, ambos observables H y \mathbf{P} son siempre no nulos para todo observador inercial. En caso contrario, si se anulan para un observador se anulan para todos. Por (2.141), S^2 es otro invariante y constante del movimiento, por lo que juntamente con la masa nula es otra propiedad intrínseca de la partícula.

La primera parte de la Lagrangiana $T\dot{t} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -H\dot{t} + \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{r}}$, puede ponerse como $-(H - \mathbf{P} \cdot \mathbf{u})\dot{t} = 0$, por lo que es idénticamente nula. La Lagrangiana se reduce solamente al tercer término que es de la forma $\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega}$. Una partícula de masa nula que se mueve en línea recta a la velocidad de la luz, necesariamente tiene que venir caracterizada por variables de orientación, pues en caso contrario $\tilde{L} = 0$, es decir, **los fotones necesariamente van rotando**.

Vemos a partir de (2.126) y (2.141) que la magnitud adimensional $\epsilon = \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}/Sc$, es otro invariante y constante del movimiento, y lo que esperamos es que la Lagrangiana sea una función explícita de él y de S . Teniendo en cuenta la forma de transformar bajo \mathcal{P} de \mathbf{u} , $\boldsymbol{\omega}$ y \mathbf{S} , dadas en (2.126), (2.129) y (2.141) respectivamente, resulta que el espín debe ser necesariamente función vectorial de \mathbf{u} y $\boldsymbol{\omega}$.

Si el espín no es transversal, como ocurre con los fotones reales, entonces $\mathbf{S} = \epsilon S\mathbf{u}/c$ con $\epsilon = \pm 1$, por lo que la Lagrangiana queda finalmente:

$$\tilde{L} = \left(\frac{\epsilon S}{c} \right) \frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\omega}}{\dot{t}}. \quad (2.142)$$

Para esta Lagrangiana, el momento temporal es $H = -\partial\tilde{L}/\partial\dot{t} = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Omega}$, donde $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}/\dot{t}$ es la velocidad angular de la partícula. El momento lineal es $\mathbf{P} = \partial\tilde{L}/\partial\dot{\mathbf{r}} = \epsilon S\boldsymbol{\Omega}/c$, y como \mathbf{P} y \mathbf{u} son paralelos, $\boldsymbol{\Omega}$ y \mathbf{u} deben ser también paralelos. Si H es positivo, entonces $\boldsymbol{\Omega} = \epsilon\boldsymbol{\omega}/c$.

Esto significa que la energía $H = S\Omega$. Para fotones sabemos que $S = \hbar$, y por lo tanto $H = \hbar\Omega = h\nu$. De esta forma la frecuencia de un fotón es la frecuencia de su movimiento de rotación alrededor de la dirección de su movimiento, en el mismo sentido si $\epsilon = 1$ y en sentido contrario si $\epsilon = -1$. Vemos que el espín no es finalmente función de la velocidad angular, aunque para partículas con $H > 0$ tiene la misma dirección que ésta. Conviene observar que no hay dependencia entre ellos, porque S es invariante bajo \mathcal{P} mientras que Ω no lo es. Al cambiar de observador el espín permanece el mismo, pero la frecuencia sufre el denominado *efecto Doppler*.

Decimos que la Lagrangiana (2.142) representa a un fotón de espín S y polarización ϵ . Un conjunto de fotones de esta clase, todos de la misma polarización, corresponden a luz polarizada circular, como se ha comprobado midiendo el momento angular que llevan estos fotones⁵. Fotones polarizados a izquierda o derecha corresponden a $\epsilon = -1$ y $\epsilon = 1$, respectivamente. La energía está relacionada con la frecuencia angular $H = \hbar\Omega$, y el momento lineal con el número de onda $\mathbf{P} = \hbar\mathbf{k}$, que resulta estar relacionado con la velocidad angular por $\mathbf{k} = \epsilon\boldsymbol{\Omega}/c$. Si pudiéramos hablar de la *longitud de onda* de un solo fotón, ésta sería la distancia recorrida en el tiempo en que tarda en dar una vuelta.

Los antifotones, es decir partículas para las que $H < 0$, se corresponden con las que cumplen $H = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} < 0$ y por lo tanto el espín y la velocidad angular tienen sentidos opuestos y lo mismo la velocidad y el momento lineal. En cualquier caso poseen la misma energía que los fotones con $H > 0$. Para saber si un sistema material absorbe un fotón o un antifotón, habría que medir por separado el espín del fotón absorbido, que es una medida mecánica, y por otra la velocidad angular del fotón, de la cual solamente se conoce su valor absoluto, la frecuencia. Pero también midiendo la dirección del momento lineal que debe ser opuesta a la velocidad. Lo que parece es que las partículas producidas por radiación son fotones, ya que la presión de radiación, y por lo tanto la dirección del momento lineal coinciden. Por eso resulta difícil de determinar de forma experimental si lo que se absorbe es un fotón a un antifotón. En la interacción electrón-positrón, para que las partículas se aproximen intercambiando una partícula fotónica, ésta tiene que ser un antifotón. En cambio, en la interacción electrón-electrón, las partículas se separan, por lo que lo que intercambian es un fotón. ¿Se podría interpretar que para que se produzcan nuevas formas materiales es necesaria la colisión fotón-antifotón para producir un par partícula-antipartícula?

⁵ R. A. Beth, *Phys. Rev.* **50**, 115 (1936).

La relación entre los diversos observables para el fotón ($H > 0$) y el antifotón ($H < 0$) viene representada en la figura 2.5

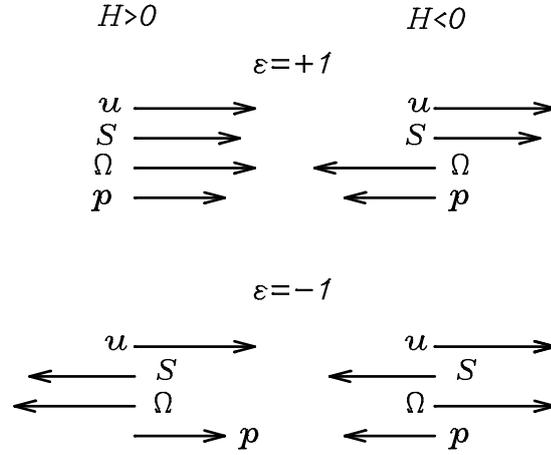


Figura 2.5: Relación entre los diferentes observables u , S , Ω y p , para el fotón $H > 0$ en la columna izquierda y para el antifotón $H < 0$ en la columna derecha para las dos helicidades $\epsilon = \pm 1$. $S = \epsilon S u/c$, $p = H u/c^2 = \epsilon S \Omega/c$.

Si los posibles estados del fotón los representamos de forma vectorial como $|\text{sign}(H), \epsilon \rangle$, los estados de la izquierda de la figura son los $|+, + \rangle$ y $|+, - \rangle$, y los de la derecha $|-, + \rangle$ y $|-, - \rangle$, respectivamente. Son estados independientes y ortogonales. Si el campo de radiación solamente está compuesto de fotones ($H > 0$), es por lo que la descripción clásica de los estados vectoriales de la luz monocromática, aparece descrita por vectores complejos del espacio de Hilbert \mathbb{C}^2 y los estados de polarización por la esfera de Poincaré, como la combinación lineal convexa de estados puros (Ver apéndice 2.10).

2.5.2. Partículas con masa. (el electrón)

Si consideramos ahora la otra posibilidad, $\dot{\mathbf{u}} \neq 0$ pero ortogonal a \mathbf{u} , entonces las variables \dot{t} y $\dot{\mathbf{r}}$ transforman como en el caso anterior (2.109) y (2.110), pero para $\dot{\mathbf{u}}$ y $\boldsymbol{\omega}$ tenemos que:

$$\dot{\mathbf{u}}' = R(\phi)\dot{\mathbf{u}} + \dot{R}(\phi)\mathbf{u}, \quad (2.143)$$

$$\boldsymbol{\omega}' = R(\phi)\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_\phi, \quad (2.144)$$

donde el parámetro de rotación ϕ es el mismo de (2.127) y el vector $\boldsymbol{\omega}_\phi$ es:

$$\boldsymbol{\omega}_\phi = \frac{\gamma R\mathbf{u} \times \mathbf{v} - (\gamma - 1)R(\mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}}) + 2\gamma^2(\mathbf{v} \cdot R(\mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}}))\mathbf{v}/(1 + \gamma)c^2}{\gamma(c^2 + \mathbf{v} \cdot R\mathbf{u})}. \quad (2.145)$$

La expresión (2.143) es la derivada τ de (2.126) y se puede escribir en la forma:

$$\dot{\mathbf{u}}' = \frac{R(\phi)\dot{\mathbf{u}}}{\gamma(1 + \mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{u}/c^2)}. \quad (2.146)$$

la expresión (2.144) viene de $R(\boldsymbol{\rho}') = R(\phi)R(\boldsymbol{\rho})$, que tomando la derivada con respecto a τ , $\dot{R}(\boldsymbol{\rho}') = \dot{R}(\phi)R(\boldsymbol{\rho}) + R(\phi)\dot{R}(\boldsymbol{\rho})$, debido a que el parámetro ϕ depende de τ a través de la velocidad $\mathbf{u}(\tau)$, y por lo tanto

$$\Omega' = \dot{R}(\boldsymbol{\rho}')R^T(\boldsymbol{\rho}') = R(\phi)\Omega R^T(\phi) + \dot{R}(\phi)R^T(\phi).$$

$R(\phi)\Omega R^T(\phi)$ corresponde a $R(\phi)\boldsymbol{\omega}$ y la matriz antisimétrica $\Omega_\phi = \dot{R}(\phi)R^T(\phi)$ tiene por componentes esenciales el vector $\boldsymbol{\omega}_\phi$, es decir, la ecuación (2.145).

La condición de homogeneidad de la Lagrangiana conduce a la forma general

$$\tilde{L} = T\dot{t} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (2.147)$$

donde $T = \partial\tilde{L}/\partial\dot{t}$, $R_i = \partial\tilde{L}/\partial\dot{r}^i$, $U_i = \partial\tilde{L}/\partial\dot{u}^i$ y $W_i = \partial\tilde{L}/\partial\omega^i$, y el teorema de Noether nos produce las siguientes constantes del movimiento:

$$\text{Momento temporal } H = -T - (d\mathbf{U}/dt) \cdot \mathbf{u}, \quad (2.148)$$

$$\text{Momento lineal } \mathbf{P} = \mathbf{R} - (d\mathbf{U}/dt), \quad (2.149)$$

$$\text{Momento cinemático } \mathbf{K} = H\mathbf{r}/c^2 - \mathbf{P}t - \mathbf{S} \times \mathbf{u}/c^2, \quad (2.150)$$

$$\text{Momento angular } \mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{S}. \quad (2.151)$$

En este caso el espín \mathbf{S} , es decir el momento angular con respecto al punto \mathbf{r} , se define como en el caso Galileano, por

$$\mathbf{S} = \mathbf{u} \times \mathbf{U} + \mathbf{W} = \mathbf{Z} + \mathbf{W}. \quad (2.152)$$

Las expresiones (2.148, 2.149) implican que H/c y \mathbf{P} transforman como las componentes de un tetravector, como en (2.118-2.119), y definen un invariante y constante del movimiento $(H/c)^2 - \mathbf{P}^2 = m^2c^2$, que lo expresamos en función de un parámetro positivo m , que se interpreta como la masa de la partícula.

El observable \mathbf{S} transforma como:

$$\mathbf{S}'(\tau) = \gamma R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{S}(\tau) - \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)c^2}(\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{S}(\tau))\mathbf{v} + \frac{\gamma}{c^2}(\mathbf{v} \times R(\boldsymbol{\mu})(\mathbf{S}(\tau) \times \mathbf{u})), \quad (2.153)$$

una expresión que corresponde a la transformación de un tensor antisimétrico $S^{\mu\nu}$ con componentes estrictas $S^{0i} = (\mathbf{S} \times \mathbf{u})^i/c$, y $S^{ij} = \epsilon^{ijk}S_k$, bajo el grupo de Poincaré.

Si definimos el vector, con dimensiones de longitud, $\mathbf{k} = \mathbf{S} \times \mathbf{u}/H$, el momento cinemático (2.150) se puede reescribir como

$$\mathbf{K} = H\mathbf{q}/c^2 - \mathbf{P}t,$$

donde $\mathbf{q} = \mathbf{r} - \mathbf{k}$, representa la posición del centro de masa de la partícula.

El espín con respecto al centro de masa se define como es habitual mediante

$$\mathbf{S}_{CM} = \mathbf{J} - \mathbf{q} \times \mathbf{P} = \mathbf{J} - \frac{c^2}{H}\mathbf{K} \times \mathbf{P}, \quad (2.154)$$

y es una constante del movimiento. Toma la forma

$$\mathbf{S}_{CM} = \mathbf{S} + \mathbf{k} \times \mathbf{P} = \mathbf{S} + \frac{1}{H}(\mathbf{S} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{P}. \quad (2.155)$$

La helicidad $\mathbf{S}_{CM} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{P}$, es también una constante del movimiento para la partícula libre. Podemos construir el tetravector constante de Pauli-Lubanski

$$w^\mu \equiv (\mathbf{P} \cdot \mathbf{S}_{CM}, H\mathbf{S}_{CM}/c) = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{S}, H\mathbf{S}/c + (\mathbf{S} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{P}/c), \quad (2.156)$$

con $-w^\mu w_\mu = m^2c^2S^2$, en términos de las propiedades invariantes m y S de la partícula, siendo S el módulo de \mathbf{S}_{CM} o bien el módulo del momento angular \mathbf{S} medido por el observador del centro de masa.

Si tomamos en (2.150) la derivada con respecto a τ y el producto escalar con la velocidad \mathbf{u} obtenemos la expresión invariante Poincaré:

$$H = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{c^2}\mathbf{S} \cdot \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{u} \right). \quad (2.157)$$

De esta forma, el momento temporal o Hamiltoniano de Dirac, se escribe como la suma de dos términos, uno de tipo traslacional asociado con \mathbf{P} y que es nulo para el observador del centro de masa, y otro rotacional relacionado con \mathbf{S} y que no se anula nunca. En el caso cuántico va a dar lugar a $H = c\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \beta mc^2$, en términos de las matrices hermiticas de Dirac, $\boldsymbol{\alpha}$ y β . Puesto que para Dirac $c\boldsymbol{\alpha}$ se interpreta como el operador velocidad local \mathbf{u} del electrón ⁶, tenemos $H = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} + \beta mc^2$ y esta relación sugiere que

$$\beta = \frac{1}{mc^4} \mathbf{S} \cdot \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{u} \right).$$

Volveremos a esta relación cuando cuanticemos el sistema.

El observador del centro de masa se define por las condiciones $\mathbf{P} = \mathbf{K} = 0$. Para este observador $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{CM}$ es constante, $H = \pm mc^2$ y de (2.150) obtenemos

$$\mathbf{r} = \pm \frac{1}{mc^2} \mathbf{S} \times \mathbf{u}. \quad (2.158)$$

Esta ecuación es la dinámica del punto \mathbf{r} y este movimiento interno tiene lugar en un plano ortogonal al espín constante \mathbf{S} . El producto escalar con \mathbf{u} nos lleva a $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}/dt = 0$, por lo que el radio del zitterbewegung es constante. Tomando la derivada temporal de ambos miembros de (2.158), obtenemos $mc^2 \mathbf{u} = \pm (\mathbf{S} \times d\mathbf{u}/dt)$, debido a que el espín es constante en este referencial, con lo que \mathbf{u} y \mathbf{S} son ortogonales. Si volvemos a derivar esta expresión concluimos que $d\mathbf{u}/dt$ y \mathbf{S} son también ortogonales. Si introducimos en (2.158) la expresión de \mathbf{u} y tenemos presente la ortogonalidad entre el espín y la aceleración, tanto para la partícula como la antipartícula, se llega a

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \omega^2 \mathbf{r} = 0, \quad \omega = \frac{mc^2}{S}. \quad (2.159)$$

que es exactamente la misma ecuación del preámbulo (2) y de la partícula no relativista (2.70) cuando el centro de masa está en reposo. Haciendo en (2.158) el producto vectorial con \mathbf{u} y usando la ortogonalidad del espín con la velocidad a

$$\mathbf{S} = \pm m\mathbf{u} \times \mathbf{r}. \quad (2.160)$$

Como S y $u = c$ son constantes, el movimiento armónico es un círculo de radio $R_0 = S/mc$. Para el electrón tomaremos al cuantizarlo $S = \hbar/2$, y el radio resulta ser $\hbar/2m_e c = 1,93 \times 10^{-13}$ m, la mitad de la longitud de onda Compton del electrón. La frecuencia de este movimiento en el sistema de referencia del C.M. es $\nu = 2m_e c^2/h = 2,47 \times 10^{20}$ s⁻¹, y $\omega = 2\pi\nu = 1,55 \times 10^{21}$ rad s⁻¹. La relación de este radio con el denominado radio clásico del electrón $R_{cl} = e^2/8\pi\epsilon_0 m_e c^2 = 1,409 \times 10^{-15}$ m, es precisamente $R_{cl}/R_0 = e^2/2\epsilon_0 \hbar c = 1/136,97 = \alpha$, la constante de estructura fina. El radio del electrón, estimado a partir de la colisión $e-e$ a alta energía en los experimentos desarrollados en el LEP del CERN, arrojan un valor $R_e < 10^{-19}$ m.

Lo que vemos es que hay dos tipos diferentes de partículas en cuanto al signo de H . En ambos, la energía es mc^2 . A la partícula con $H > 0$ se le denomina materia y antimateria a la de $H < 0$. Ésta tiene una cinemática opuesta a la otra. Movimientos de este tipo de partículas que se mueven a la velocidad de la luz, ya han sido considerados en la literatura posterior a la publicación de la ecuación de Dirac, cuyo análisis de la cinemática del electrón sugería que éste se movía precisamente a la velocidad de la luz. Sin embargo, en estos trabajos, la distinción entre el movimiento del centro de carga y del centro de masa, no está suficientemente clara ^{7, 8}. Parte

⁶ J.J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Addison-Wesley Reading, MA (1967).

⁷ M. Mathisson, *Acta Phys. Pol.* **6**, 163 (1937); **6**, 218 (1937)

⁸ M.H.L. Weyssenhof, *Acta Phys. Pol.* **9**, 46 (1947). M.H.L. Weyssenhof and A. Raabe, *Acta Phys. Pol.* **9**, 7 (1947); **9**, 19 (1947).

de la dificultad estriba en que cuando un punto se mueve a la velocidad de la luz, a la partícula se le asocia una masa nula. Esto es correcto si el punto representa lo que denominaríamos el centro de masa, pero no es el caso cuando el punto representa al centro de carga.

En el modelo que estamos analizando, parece que el electrón tiene un tamaño del orden del radio del zitterbewegung, o que la carga se mueve en una región del tamaño de la longitud de onda Compton de la partícula. Sin embargo la idea de tamaño no es necesaria desde el punto de vista dinámico ya que todo el interés se centra en describir la trayectoria de un punto, el centro de carga, a partir de la cual determinaremos el resto de las propiedades del electrón. La ecuación dinámica (2.158) para el caso de la partícula ($H > 0$), se representa en la figura 2.6, que es la figura de la portada, donde hemos separado las dos contribuciones al espín $\mathbf{S} = \mathbf{Z} + \mathbf{W}$, que están relacionadas con el movimiento orbital \mathbf{Z} y el movimiento de rotación \mathbf{W} .

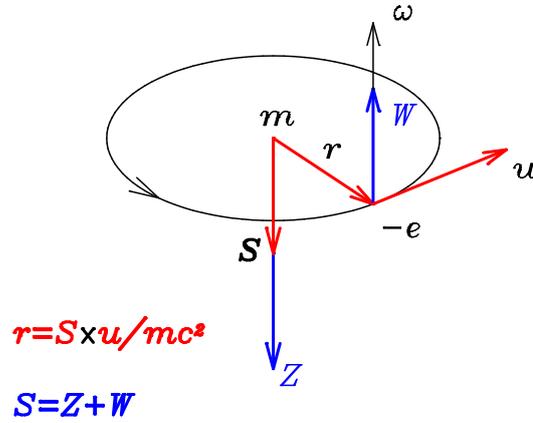


Figura 2.6: Movimiento del centro de carga del electrón en el sistema de referencia del centro de masa.

Vamos a encontrar la expresión general del espín y de la posición del centro de masa, en términos de la cinemática del centro de carga. La ecuación de transformación del espín \mathbf{S} , (2.153) se puede escribir también

$$\mathbf{S}' = \gamma(1 + \mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{u}/c^2)R(\phi)\mathbf{S}, \quad (2.161)$$

y teniendo presente cómo transforma $\dot{\mathbf{u}}$ dado en (2.146), se tiene que $\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{S}' \cdot \dot{\mathbf{u}}'$ y de (2.126) $\mathbf{S}' \cdot \dot{\mathbf{u}}' = \gamma(1 + \mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{u}/c^2)\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}$. Puesto que el espín es ortogonal a \mathbf{u} y $\dot{\mathbf{u}}$, para el observador del centro de masa, resulta ser siempre ortogonal a \mathbf{u} y $\dot{\mathbf{u}}$ para cualquier otro observador inercial.

Un método alternativo para ver esto es tomar la derivada temporal en (2.150) y (2.151), y de aquí

$$H\mathbf{u} - c^2\mathbf{P} - \frac{d\mathbf{S}}{dt} \times \mathbf{u} - \mathbf{S} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0,$$

como

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{P} \times \mathbf{u},$$

es decir,

$$\mathbf{S} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} = (H - \mathbf{u} \cdot \mathbf{P})\mathbf{u}.$$

y un producto escalar con \mathbf{S} , conduce a $(H - \mathbf{u} \cdot \mathbf{P})\mathbf{u} \cdot \mathbf{S} = 0$. El factor entre paréntesis no se anula puesto que el invariante $H^2/c^2 - P^2 = m^2c^2$ es definido positivo y si resultase que $H = \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}$,

entonces $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{P})^2/c^2 - P^2$ con $u \leq c$ sería negativo, lo que es una contradicción. Por lo tanto $\mathbf{S} \cdot \mathbf{u} = 0$. Si ahora tomamos la derivada temporal de esta expresión, sabiendo que $d\mathbf{S}/dt$ es ortogonal a \mathbf{u} , obtenemos $\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0$. El observable \mathbf{S} tiene siempre la dirección del vector no nulo $\dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{u}$ para las partículas ($H > 0$) y en sentido contrario para las antipartículas ($H < 0$).

Si tomamos la derivada temporal del momento cinemático de la partícula libre (2.150), obtenemos

$$H\mathbf{u} - c^2\mathbf{P} - \frac{d\mathbf{S}}{dt} \times \mathbf{u} - \mathbf{S} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0.$$

Teniendo presente que $d\mathbf{S}/dt = \mathbf{P} \times \mathbf{u}$ y haciendo el producto vectorial con $d\mathbf{u}/dt$, obtenemos

$$\mathbf{S} = \left(\frac{H - \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}}{(d\mathbf{u}/dt)^2} \right) \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{u}, \quad (2.162)$$

y $\mathbf{q} = \mathbf{r} - \mathbf{S} \times \mathbf{u}/H$ conduce a que la posición del centro de masa se escribe

$$\mathbf{q} = \mathbf{r} + \frac{c^2}{H} \left(\frac{H - \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}}{(d\mathbf{u}/dt)^2} \right) \frac{d\mathbf{u}}{dt}. \quad (2.163)$$

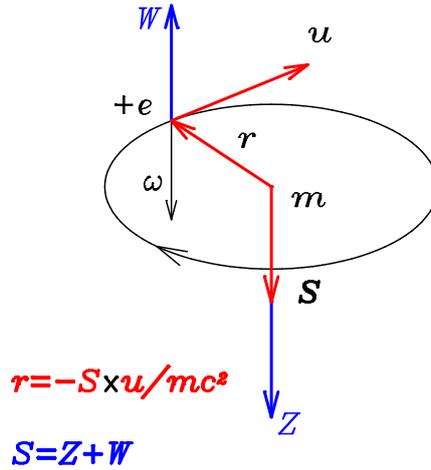


Figura 2.7: Movimiento del centro de carga del positrón en el sistema de referencia del centro de masa. La parte \mathbf{W} de su espín tiene sentido contrario a la velocidad angular de rotación del sistema cartesiano ligado al punto y que aquí no se ha dibujado.

El centro de masa, con respecto al centro de carga, está en la dirección de la aceleración tanto para la partícula como para la antipartícula. El punto \mathbf{r} , como en el caso no relativista, efectúa un movimiento central alrededor del centro de masa. El espín con respecto al punto \mathbf{r} también puede ponerse como:

$$\mathbf{S} = -\frac{H}{c^2}(\mathbf{r} - \mathbf{q}) \times \mathbf{u},$$

que refuerza la idea de su carácter antiorbital con respecto al centro de masa para la partícula ($H > 0$) y orbital para la antipartícula ($H < 0$). Como en cualquier caso se compone de dos términos $\mathbf{S} = \mathbf{Z} + \mathbf{W}$, esto quiere decir que para la antipartícula \mathbf{Z} tiene la dirección de \mathbf{S} y por lo tanto la parte \mathbf{W} en sentido contrario, con lo que esta parte \mathbf{W} tiene sentido opuesto a la velocidad angular. En esto coincide con los fotones, en los que el espín que es únicamente

rotativo tiene la dirección de la velocidad angular para la partícula y sentido contrario a la velocidad angular para la antipartícula.

Vemos que la partícula tiene masa y espín, el centro de carga se mueve en círculos a la velocidad de la luz en un plano perpendicular al espín. Todas estas propiedades son independientes del tipo de Lagrangiana de la forma (2.147) que consideremos.

2.5.3. Análisis de Dirac

Para terminar esta sección, y teniendo en mente este modelo de electrón, vamos a repasar los aspectos más salientes del análisis que hace Dirac ⁹, cuando trata de determinar la cinemática del electrón libre en su formulación cuántica. Para Dirac, si el punto \mathbf{r} representa a las variables espaciales de las que depende el espinor $\psi(t, \mathbf{r})$, entonces cuando calcula la velocidad de este punto \mathbf{r} , Dirac llega a:

a) La velocidad $\mathbf{u} = i/\hbar[H, \mathbf{r}] = c\boldsymbol{\alpha}$, queda expresada en términos de las matrices $\boldsymbol{\alpha}$, cuyos valores propios son ± 1 y escribe ‘... una medida de cualquier componente de la velocidad de un electrón libre debe conducir de forma precisa al valor $\pm c$ ’.

b) El momento lineal no tiene la misma dirección que la velocidad de este punto \mathbf{u} , sino que está relacionado con un cierto valor medio de la misma: ... ‘la componente x_1 de la velocidad, $c\alpha_1$, tiene dos partes, una parte constante de valor $c^2 p_1 \hbar^{-1}$, y ligada con el momento lineal por la expresión relativista habitual, y una parte oscilante, cuya frecuencia es por lo menos $2mc^2/\hbar$, ...’.

c) Acerca de las componentes del vector de posición \mathbf{r} : ‘La parte oscilante de x_1 es pequeña, ... , es del orden de magnitud de \hbar/mc , ...’.

d) En el artículo original de 1928, ¹⁰ cuando analiza la interacción del electrón con un campo electromagnético externo, después de hacer el cuadrado del operador de Dirac, obtiene dos nuevos términos en el Hamiltoniano de interacción:

$$\frac{e\hbar}{2mc}\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B} + \frac{ie\hbar}{2mc}\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E}, \quad (2.164)$$

y donde el espín del electrón aparece escrito como $\mathbf{S} = \hbar\boldsymbol{\Sigma}/2$, siendo

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix},$$

una matriz 4×4 expresada por bloques en términos de las matrices σ de Pauli. Los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} son los campos eléctrico y magnético externos, respectivamente. Entonces dice, ‘El electrón se va a comportar como si tuviera un momento magnético $(e\hbar/2mc)\boldsymbol{\Sigma}$ y un momento dipolar eléctrico $(ie\hbar/2mc)\boldsymbol{\alpha}$. El momento magnético es el mismo que el del modelo de electrón con espín’ (modelo de Pauli). ‘El momento dipolar eléctrico, como es imaginario puro, podemos esperar que no aparezca en el modelo.’

Sin embargo, en nuestro modelo clásico, y para el observador del centro de masa, existe un momento dipolar eléctrico instantáneo y un momento magnético, dados por

$$\mathbf{d} = e\mathbf{k} = \frac{e}{mc^2}\mathbf{S} \times \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2}\mathbf{k} \times \frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\frac{e}{2m}\mathbf{Z}, \quad (2.165)$$

donde \mathbf{S} es el espín total y $\mathbf{Z} = -m\mathbf{k} \times d\mathbf{k}/dt$, la parte del espín que proviene del zitterbewegung, o movimiento orbital de la carga. El valor medio de \mathbf{d} es cero, y el valor medio de $\boldsymbol{\mu}$ es el vector constante $\boldsymbol{\mu}$.

⁹ P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum mechanics*, Oxford Univ. Press, 4th ed. Oxford (1967).

¹⁰ P.A.M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. Lon.* **A117**, 610 (1928). La traducción que ofrecemos en las notas es del autor.

Este modelo clásico produce una predicción cinemática que es la misma que la del modelo no relativista descrito en la Sec.2.2.6. Si la carga de la partícula es negativa, la corriente de la misma Fig.2.6 produce un momento magnético que tiene la misma dirección que el espín. Todos los experimentos realizados para medir de forma precisa la relación giromagnética, están basados en la determinación de frecuencias de precesión del espín, las cuales son independientes de la orientación del mismo. El hecho de que sea difícil separar a los electrones en dos haces en un experimento de tipo Stern-Gerlach, está sugiriendo realizar experimentos de polarización a la hora de determinar la orientación relativa entre el espín y el momento magnético. Hemos sugerido recientemente, un par de experimentos para encontrar cómo es esta orientación relativa¹¹, y que es analizado en la sección 4.2.5.

Otra consecuencia del modelo clásico es que refuerza el que la interacción con un campo externo sea del tipo del denominado **acoplamiento mínimo**, de la forma $j_\mu A^\mu$, entre la corriente asociada al movimiento de la carga y los potenciales externos. Las propiedades magnéticas del electrón provienen de esta corriente y no de ninguna distribución de momentos dipolares magnéticos, de tal manera que la única interacción posible entre un punto cargado \mathbf{r} , y un campo externo, es el de la corriente j^μ , asociada al movimiento del punto \mathbf{r} , con los potenciales externos.

2.6. La ecuación dinámica del electrón con espín

Hemos visto que las partículas relativistas que satisfacen $u = c$ y \mathbf{u} perpendicular a $\dot{\mathbf{u}}$, el vector de posición \mathbf{r} se mueve en círculos de acuerdo con la ecuación dinámica (2.158) y para el observador del centro de masa el movimiento armónico (2.159), como vemos dibujado en la figura 2.6. Pero esta solución es independiente del tipo de la Lagrangiana particular que escojamos, como función invariante Poincaré de las variables cinemáticas y sus derivadas, y que satisfaga la condición de ortogonalidad $\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0$. En esta sección vamos a ver en qué se transforma esta ecuación dinámica de la evolución de la carga, para un observador arbitrario.¹²

Como se menciona en el Preámbulo, sea $\mathbf{r}(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ la trayectoria que sigue el punto para un observador arbitrario. Cualquier otro observador O' , la describe mediante el correspondiente cambio del grupo cinemático

$$t' = T(t, \mathbf{r}(t); g_1, \dots, g_r), \quad \mathbf{r}' = \mathbf{R}(t, \mathbf{r}(t); g_1, \dots, g_r),$$

donde las funciones T y \mathbf{R} definen la acción sobre el espacio-tiempo del grupo cinemático G , de parámetros (g_1, \dots, g_r) . Entonces, eliminando t como función de t' de la primera y sustituyendo en la segunda, obtenemos

$$\mathbf{r}'(t') = \mathbf{r}'(t'; g_1, \dots, g_r). \quad (2.166)$$

Como O' puede ser cualquier observador, la ecuación (2.166) representa a la familia completa de todas las trayectorias del punto para todos los observadores inerciales. Esta familia está parametrizada por los parámetros del grupo g_i . Si eliminamos los parámetros g_i entre la función $\mathbf{r}'(t')$ y sus sucesivas derivadas temporales, obtendremos la ecuación diferencial invariante que satisface la trayectoria del punto, para cualquier observador inercial. Que es invariante se ve por construcción ya que es independiente de los parámetros del grupo. Vamos a considerar a continuación que G sea el grupo de Poincaré y obtendremos la ecuación diferencial invariante relativista.

¹¹M. Rivas, *Are the electron spin and magnetic moment parallel or antiparallel vectors?*, ArXiv:physics/0112057.

¹²M. Rivas, *The dynamical equation of the spinning electron*, J. Phys. A, **36**, 4703, (2003), ArXiv:physics/0112005.

2.6.1. El electrón relativista con espín

Supongamos el modelo relativista de electrón. Para el observador O^* del centro de masa, la trayectoria del centro de carga del electrón está contenida en el plano XOY y expresada en forma vectorial, y con unidades $R_0 = \hbar/2mc$, $\omega_0 = 2mc^2/\hbar$

$$\mathbf{r}^*(t^*) = R_0 \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t^* \\ \sin \omega_0 t^* \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{r}^*}{dt^*} = c \begin{pmatrix} -\sin \omega_0 t^* \\ \cos \omega_0 t^* \\ 0 \end{pmatrix},$$

Para el observador del centro de masa O^* el punto satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 \mathbf{r}^*(t^*)}{dt^{*2}} = -\omega_0^2 \mathbf{r}^*(t^*). \quad (2.167)$$

Como la carga se mueve con la velocidad c para el observador del centro de masa O^* , se mueve también con c para cualquier otro observador O . La relación de sus medidas viene dada por

$$\begin{aligned} t(t^*; g) &= \gamma (t^* + \mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{r}^*(t^*)) + b, \\ \mathbf{r}(t^*; g) &= R(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{r}^*(t^*) + \gamma \mathbf{v} t^* + \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} (\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{r}^*(t^*)) \mathbf{v} + \mathbf{a}. \end{aligned}$$

La velocidad del punto para el observador O

$$\mathbf{r}^{(1)} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}/dt^*}{dt/dt^*},$$

y lo mismo para sus sucesivas derivadas.

Si usamos las siguientes abreviaturas para las diversas expresiones, funciones de t^* :

$$\mathbf{K}(t^*) = R(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{r}^*(t^*), \quad \mathbf{V}(t^*) = R(\boldsymbol{\alpha}) \frac{d\mathbf{r}^*(t^*)}{dt^*} = \frac{d\mathbf{K}}{dt^*}, \quad \frac{d\mathbf{V}}{dt^*} = -\omega_0^2 \mathbf{K},$$

$$B(t^*) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{K}/c^2, \quad A(t^*) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{V}/c^2 = \frac{dB}{dt^*}, \quad \frac{dA}{dt^*} = -\omega_0^2 B,$$

con A adimensional y B con dimensiones de tiempo. \mathbf{K} tiene dimensiones de longitud y \mathbf{V} de velocidad. En particular

$$\frac{dt}{dt^*} = \gamma(1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{V}/c^2) = \gamma(1 + A),$$

Por otra parte

$$\mathbf{K}^2 = R_0^2, \quad \mathbf{V}^2 = c^2, \quad \mathbf{K} \cdot \mathbf{V} = 0, \quad \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} = c^2 B, \quad \mathbf{V} \cdot \mathbf{v} = c^2 A.$$

Haciendo uso de la relación (2.167) y sus derivadas, obtenemos mediante derivación las siguientes expresiones para las derivadas temporales del punto \mathbf{r} en el sistema de referencia arbitrario O :

$$\mathbf{r}^{(1)} = \frac{1}{\gamma(1 + A)} \left(\mathbf{V} + \frac{\gamma}{1 + \gamma} (1 + \gamma + \gamma A) \mathbf{v} \right) \quad (2.168)$$

$$\mathbf{r}^{(2)} = \frac{\omega_0^2}{\gamma^2(1 + A)^3} \left(-(1 + A) \mathbf{K} + B \mathbf{V} + \frac{\gamma}{1 + \gamma} B \mathbf{v} \right), \quad (2.169)$$

$$\mathbf{r}^{(3)} = \frac{\omega_0^2}{\gamma^3(1 + A)^5} \left(-3\omega_0^2 B(1 + A) \mathbf{K} - (1 + A - 3\omega_0^2 B^2) \mathbf{V} + \right.$$

$$\frac{\gamma}{1+\gamma} (A(1+A) + 3\omega_0^2 B^2) \mathbf{v} \quad (2.170)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{(4)} = & \frac{\omega_0^4}{\gamma^4(1+A)^7} ((1+A)(1-2A-3A^2-15\omega_0^2 B^2) \mathbf{K} - \\ & (7+4A-3A^2-15\omega_0^2 B^2) B \mathbf{V} - \\ & \frac{\gamma}{1+\gamma} (1-8A-9A^2-15\omega_0^2 B^2) B \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (2.171)$$

De éstas se obtiene

$$\left(\mathbf{r}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(1)} \right) = c^2, \quad \left(\mathbf{r}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(2)} \right) = 0, \quad (2.172)$$

$$\left(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)} \right) = - \left(\mathbf{r}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(3)} \right) = \frac{\omega_0^2 c^2}{\gamma^4(1+A)^4}, \quad (2.173)$$

$$\left(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(3)} \right) = -\frac{1}{3} \left(\mathbf{r}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(4)} \right) = \frac{2\omega_0^4 c^2 B}{\gamma^5(1+A)^6}, \quad (2.174)$$

$$\left(\mathbf{r}^{(3)} \cdot \mathbf{r}^{(3)} \right) = \frac{\omega_0^4 c^2}{\gamma^6(1+A)^8} (1 - A^2 + 3\omega_0^2 B^2), \quad (2.175)$$

$$\left(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(4)} \right) = \frac{\omega_0^4 c^2}{\gamma^6(1+A)^8} (-1 + 2A + 3A^2 + 9\omega_0^2 B^2), \quad (2.176)$$

$$\left(\mathbf{r}^{(3)} \cdot \mathbf{r}^{(4)} \right) = \frac{4\omega_0^4 c^2}{\gamma^7(1+A)^{10}} (1 + A + 3\omega_0^2 B^2) \omega_0^2 B. \quad (2.177)$$

A partir de las ecuaciones (2.173)-(2.175) podemos expresar las magnitudes A , B y γ en términos de los productos escalares entre las diferentes derivadas temporales $(\mathbf{r}^{(i)} \cdot \mathbf{r}^{(j)})$, $i, j = 2, 3$. La ligadura de que la velocidad es c , implica que estos productos escalares y los sucesivos para derivadas de orden superior, se pueden expresar solamente en términos de tres de ellos, ya que todos se expresan como funciones de γ , A y B .

Por inspección de (2.168-2.171) vemos que las cuatro derivadas temporales de la posición del centro de carga se expresan como combinación lineal de los tres vectores \mathbf{V} , \mathbf{K} y \mathbf{v} , donde los dos primeros son ortogonales y el tercero es un vector constante que, en general, no es combinación lineal de los otros dos. Está claro que las tres derivadas $\mathbf{r}^{(i)}$, $i = 2, 3, 4$ se podrán expresar como una combinación lineal. Si definimos

$$\mathbf{d}_1 = \gamma(1+A)\mathbf{r}^{(1)}, \quad \mathbf{d}_2 = \frac{\gamma^2(1+A)^3}{\omega_0^2} \mathbf{r}^{(2)}, \quad \mathbf{d}_3 = \frac{\gamma^3(1+A)^5}{\omega_0^2} \mathbf{r}^{(3)}, \quad \mathbf{d}_4 = \frac{\gamma^4(1+A)^7}{\omega_0^4} \mathbf{r}^{(4)},$$

obtenemos la relación:

$$(1 - 2A - 3A^2 + 3\omega_0^2 B^2) \mathbf{d}_2 - 6B \mathbf{d}_3 + \mathbf{d}_4 = 0$$

que representa la ecuación diferencial invariante que satisface la posición del centro de carga, en cualquier sistema de referencia inercial. Solamente nos queda reemplazar las tres magnitudes A , B y γ , a partir de (2.173)-(2.175) en términos de los productos escalares de estas derivadas temporales.

$$\mathbf{r}^{(4)} - \frac{3(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(3)})}{(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})} \mathbf{r}^{(3)} + \left(\frac{2(\mathbf{r}^{(3)} \cdot \mathbf{r}^{(3)})}{(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})} - \frac{3(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(3)})^2}{4(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})^2} - (\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})^{1/2} \right) \mathbf{r}^{(2)} = 0. \quad (2.178)$$

Es una ecuación diferencial de cuarto orden que contiene como soluciones trayectorias descritas a la velocidad de la luz. En efecto, si $(\mathbf{r}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(1)}) = c^2$, entonces por derivaciones sucesivas

obtenemos que $(\mathbf{r}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(2)}) = 0$ y volviendo a derivar $(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)}) + (\mathbf{r}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(3)}) = 0$. Teniendo esto presente y haciendo el producto escalar de (2.178) con $\mathbf{r}^{(1)}$, obtenemos $(\mathbf{r}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(4)}) + 3(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(3)}) = 0$, que es otra de las relaciones entre las derivadas como consecuencia de que $|\mathbf{r}^{(1)}| = c$. Esta ecuación diferencial describe un movimiento helicoidal ya que carece del término en la primera derivada $\mathbf{r}^{(1)}$, que implica, de acuerdo con lo expresado en el preámbulo en (6), que existe una relación constante entre curvatura y torsión. En efecto, si el término en $\mathbf{r}^{(1)}$ es cero, esto implica de (6) que $\dot{\kappa}/\kappa = \dot{\tau}/\tau$, y por lo tanto el coeficiente de $\mathbf{r}^{(3)}$ resulta ser $-3\dot{\kappa}/\kappa$. En efecto como la curvatura $\kappa = (\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})^{1/2}$ y derivando se deduce que

$$\dot{\kappa} = \frac{(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(3)})}{(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})^{1/2}}, \quad \frac{3\dot{\kappa}}{\kappa} = \frac{3(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(3)})}{(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})},$$

que es efectivamente el coeficiente de $\mathbf{r}^{(3)}$ en (2.178). El coeficiente de $\mathbf{r}^{(2)}$, teniendo presente la relación entre curvatura y torsión es

$$\kappa^2 + \tau^2 + 3 \left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa} \right)^2 - \frac{\ddot{\kappa}}{\kappa}$$

y como

$$\ddot{\kappa} = \frac{(\mathbf{r}^{(3)} \cdot \mathbf{r}^{(3)}) + (\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(4)})}{(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})^{1/2}} - \frac{(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(3)})^2}{(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})^{3/2}},$$

y donde el producto escalar $(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(4)})$ se podrá expresar en términos de los otros 3.

Por supuesto, si escogemos como condiciones de contorno para resolver esta ecuación una con la condición $|\mathbf{r}^{(1)}(0)| \neq c$, esta ecuación diferencial contiene soluciones en las que el punto \mathbf{r} no se mueve con velocidad de valor absoluto constante. Pero si $|\mathbf{r}^{(1)}(0)| = c$, entonces la solución satisface $|\mathbf{r}^{(1)}(t)| = c$, para todo t .

Los resultados intermedios mencionados son:

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}^{(1)} - 3B\gamma(1+A)\mathbf{r}^{(2)} + \frac{\gamma^2(1+A)^3}{\omega_0^2}\mathbf{r}^{(3)}, \quad (2.179)$$

$$\mathbf{V} = \frac{\gamma A}{1+\gamma}\mathbf{r}^{(1)} + \frac{3\gamma^2 B}{1+\gamma}(1+\gamma+\gamma A)(1+A)\mathbf{r}^{(2)} - \frac{\gamma^3(1+A)^3}{(1+\gamma)\omega_0^2}(1+\gamma+\gamma A)\mathbf{r}^{(3)} \quad (2.180)$$

$$\mathbf{K} = \frac{\gamma B}{1+\gamma}\mathbf{r}^{(1)} + \frac{\gamma^2(1+A)}{(1+\gamma)\omega_0^2}[3\omega_0^2 B^2 \gamma - (1+\gamma)(1+A)]\mathbf{r}^{(2)} - \frac{\gamma^4 B(1+A)^3}{(1+\gamma)\omega_0^2}\mathbf{r}^{(3)}. \quad (2.181)$$

y

$$1+A = \frac{8(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})^{5/2}/R_0}{4(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})^{5/2}/R_0 + 4(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})(\mathbf{r}^{(3)} \cdot \mathbf{r}^{(3)}) - 3(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(3)})^2}, \quad (2.182)$$

$$\omega_0 B = \frac{4(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})^{5/4}(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(3)})/R_0^{1/2}}{4(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})^{5/2}/R_0 + 4(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})(\mathbf{r}^{(3)} \cdot \mathbf{r}^{(3)}) - 3(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(3)})^2}, \quad (2.183)$$

$$\gamma = \frac{4(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})^{5/2}/R_0 + 4(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})(\mathbf{r}^{(3)} \cdot \mathbf{r}^{(3)}) - 3(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(3)})^2}{8(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})^{11/4}/(cR_0^{1/2})}. \quad (2.184)$$

con $R_0 = c/\omega_0$ y así todos los términos en numerador y denominador tienen las mismas dimensiones espacio-temporales.

2.6.2. El centro de masa

La posición del centro de masa se define por

$$\mathbf{q} = \mathbf{r} + \frac{1}{\omega_0^2}\gamma^2(1+A)^3\mathbf{r}^{(2)} = \mathbf{r} + \frac{2(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})\mathbf{r}^{(2)}}{(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})^{3/2}/R_0 + (\mathbf{r}^{(3)} \cdot \mathbf{r}^{(3)}) - \frac{3(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(3)})^2}{4(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})}}. \quad (2.185)$$

ya que si \mathbf{v} representa la velocidad del origen de O^* con respecto a O , podemos ver que la derivada temporal de

$$\mathbf{q} = \mathbf{r} + \frac{1}{\omega_0^2} \gamma^2 (1+A)^3 \mathbf{r}^{(2)}, \quad \mathbf{q}^{(1)} = \mathbf{r}^{(1)} + \frac{1}{\omega_0^2} \gamma^2 (1+A)^3 \mathbf{r}^{(3)} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{3\gamma^2 (1+A)^2 (-\omega_0^2 B)}{\gamma(1+A)} \mathbf{r}^{(2)} = \mathbf{v},$$

es decir (2.179) pues $dA/dt^* = -\omega_0^2 B$ y hay que dividir por $dt/dt^* = \gamma(1+A)$. Podemos verificar que tanto \mathbf{q} como $\mathbf{q}^{(1)}$ se anulan para el observador del centro de masa.

Como

$$(\mathbf{q} - \mathbf{r})^2 = \frac{1}{\omega_0^4} \gamma^4 (1+A)^6 (\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)}),$$

$$\mathbf{q}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(1)} = c^2 + \frac{1}{\omega_0^2} \gamma^2 (1+A)^3 (\mathbf{r}^{(3)} \cdot \mathbf{r}^{(1)}) = c^2 - \frac{1}{\omega_0^2} \gamma^2 (1+A)^3 (\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})$$

por (2.173) con lo que

$$\frac{c^2 - \mathbf{q}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(1)}}{(\mathbf{q} - \mathbf{r})^2} = \frac{\omega_0^2}{\gamma^2 (1+A)^3}.$$

De esta forma, la ecuación de cuarto orden para la posición del centro de carga se puede reescribir como un sistema acoplado de ecuaciones de segundo orden para las dos posiciones \mathbf{q} y \mathbf{r} ,

$$\frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{c^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{(\mathbf{q} - \mathbf{r})^2} (\mathbf{q} - \mathbf{r}), \quad (2.186)$$

with $\mathbf{v} = \mathbf{q}^{(1)}$ y $\mathbf{u} = \mathbf{r}^{(1)}$, un movimiento libre para el centro de masa y una especie de movimiento central alrededor del centro de masa para el centro de carga.

Si consideramos la expresión general para el centro de masa in (2.163), como $\mathbf{P} = H\mathbf{v}/c^2$, se puede reescribir como

$$\mathbf{q} = \mathbf{r} + \left(\frac{c^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{(d\mathbf{u}/dt)^2} \right) \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{(d\mathbf{u}/dt)^2}{c^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}} (\mathbf{q} - \mathbf{r})$$

que si la comparamos con (2.186) obtenemos la relación

$$c^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \left| \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right| |\mathbf{q} - \mathbf{r}|, \quad \text{or} \quad \left| \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right| = \frac{c^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{q} - \mathbf{r}|} = \frac{c^2}{R},$$

ya que la aceleración es siempre normal y donde R es el radio de curvatura de la trayectoria del centro de carga. Por lo tanto, la separación entre el centro de masa y el centro de carga y la curvatura de la trayectoria satisface:

$$|\mathbf{q} - \mathbf{r}| = R \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \right).$$

Esta separación no es constante. Si partimos de un electrón en reposo en el observador del centro de masa y lo lanzamos perpendicularmente al plano del zitterbewegung, entonces $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = v^2$ y en este caso la trayectoria es una hélice de curvatura y torsión constante y la separación es constante, R_0 , que está relacionada con el radio de curvatura de la trayectoria por

$$R = R_0 \gamma(v)^2.$$

Corresponde con la trayectoria de la derecha de la figura 2.8. Si en otra situación $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ no es constante, entonces la separación oscila. Por ejemplo, si lanzamos al electrón con una velocidad \mathbf{v} contenida en el plano del zitterbewegung, la trayectoria del centro de carga es plana y en unidades de $R_0 = 1$, y $v/c = 0,2$, obtenemos la descripción de la izquierda de la figura 2.8.

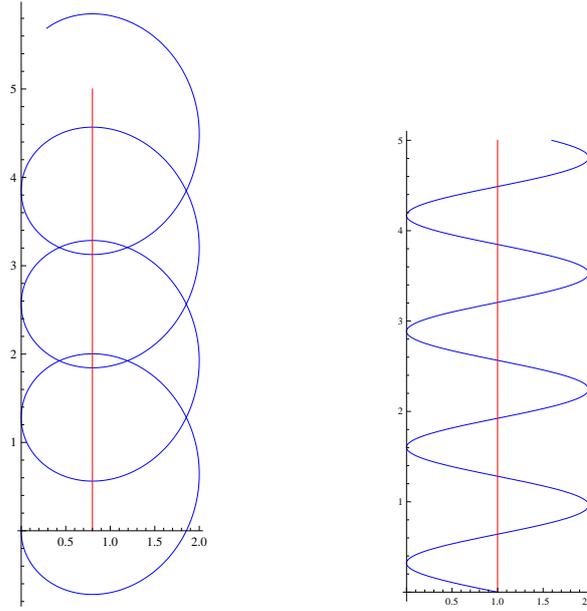


Figura 2.8: **Proyección en el plano XOY del movimiento del centro de carga (azul) y centro de masa (rojo) de un electrón libre, que se ha lanzado con $v/c=0.2$** La trayectoria de la izquierda, el electron es lanzado en el plano del zitterbewegung, el espín es perpendicular a este plano y la separación entre CC y CM no es constante. La trayectoria de la derecha corresponde a lanzar al electrón en una dirección perpendicular al plano del zitterbewegung, con el espín en la dirección del movimiento. Aquí, la separación entre ambos puntos es constante.

Vemos que la separación oscila entre $|\mathbf{q} - \mathbf{r}| = 0.8R_0$ y $|\mathbf{q} - \mathbf{r}| = 1.2R_0$. De hecho, en estas unidades, el período del movimiento interno es $T_0 = 2\pi R_0/c = 2\pi$, para el observador del centro de masa. Para el observador del laboratorio, este período es $T = \gamma(v)T_0$, y durante este tiempo el centro de masa recorre una distancia $d = v\gamma(v)T_0 = 1.28255$ en estas unidades. Vemos que es esta separación el período espacial de la figura mencionada en ambas trayectorias.

Para el caso del electrón no relativista, en el caso de bajas velocidades, $v/c \rightarrow 0$, $|\mathbf{q} - \mathbf{r}| = R_0$, y obtenemos las ecuaciones del caso Galileano

$$\frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \omega_0^2(\mathbf{q} - \mathbf{r}). \quad (2.187)$$

un movimiento libre para el centro de masa y un movimiento armónico isótropo alrededor de \mathbf{q} para el centro de carga, de pulsación constante $\omega_0 = c/R_0$.

2.6.3. Interacción con un campo externo

La ecuación libre para el centro de masa $\mathbf{q}^{(2)} = 0$, representa la conservación del momento lineal $d\mathbf{P}/dt = 0$. Pero el momento lineal se escribe en términos de la velocidad del centro de masa como $\mathbf{P} = m\gamma(q^{(1)})\mathbf{q}^{(1)}$, de manera que la ecuación libre (2.186) en presencia de un campo externo debe ser reemplazada por

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{c^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{(\mathbf{q} - \mathbf{r})^2} (\mathbf{q} - \mathbf{r}), \quad (2.188)$$

donde \mathbf{F} es la fuerza de Lorentz externa y la segunda ecuación permanece inalterada, ya que la estructura interna de una partícula elemental no es modificada por la interacción.

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = m\gamma(v)\frac{d\mathbf{v}}{dt} + m\frac{\gamma(v)^3}{c^2} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \mathbf{v}$$

y obtenemos

$$m\gamma(v)^3 \left(\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

por lo que despejando la derivada de orden superior $\mathbf{q}^{(2)}$ en el primer miembro, obtenemos las ecuaciones diferenciales que describen la evolución del centro de masa y del centro de carga de un electrón relativista con espín en presencia de un campo electromagnético externo, en cualquier sistema de referencia inercial:

$$\frac{d^2\mathbf{q}}{dt} = \frac{e}{m\gamma(v)} \left[\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} ([\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}] \cdot \mathbf{v}) \right], \quad (2.189)$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt} = \frac{c^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{(\mathbf{q} - \mathbf{r})^2} (\mathbf{q} - \mathbf{r}). \quad (2.190)$$

donde

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{q}}{dt}, \quad \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

con la ligadura $|\mathbf{u}| = c$.

2.7. Apéndice: Grupo de Rotaciones

Vamos a describir geoméricamente una rotación de valor α alrededor de un eje arbitrario, descrito por el vector unitario \mathbf{u} . Interpretamos que para $\alpha > 0$ el giro se realiza el sentido horario cuando miramos en la dirección del vector unitario \mathbf{u} . Si $\alpha < 0$, el sentido de giro es el antihorario. Por lo tanto, según la figura 2.9, un punto cualquiera caracterizado por el vector \mathbf{r} , pasará a la posición dada por el vector \mathbf{r}' ,

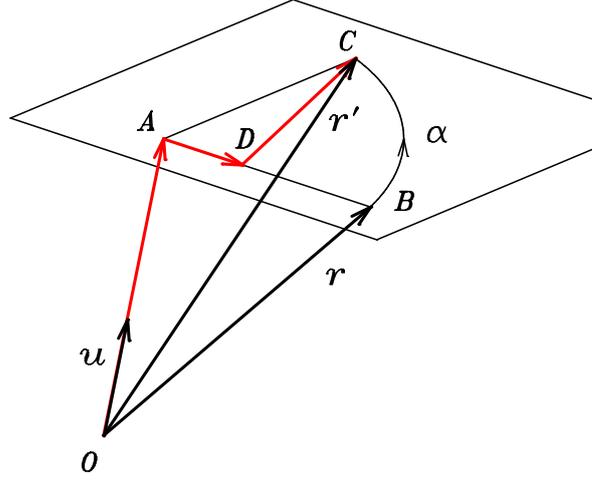


Figura 2.9: Rotación activa de valor α del vector \mathbf{r} , alrededor del eje OA

Vectorialmente, $\mathbf{r}' = \mathbf{OA} + \mathbf{AD} + \mathbf{DC}$, siendo \mathbf{DC} perpendicular al vector \mathbf{AB} .

$$\mathbf{OA} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}$$

$$\mathbf{AD} = \mathbf{AB} \cos \alpha = (\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}) \cos \alpha$$

$$\mathbf{DC} = |\mathbf{AC}| \sin \alpha \mathbf{n}$$

siendo \mathbf{n} un vector unitario perpendicular a \mathbf{u} y \mathbf{r} y por lo tanto

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{u} \times \mathbf{r}|}$$

pero $|\mathbf{u} \times \mathbf{r}| = |\mathbf{AC}| = |\mathbf{AB}|$, $|\mathbf{AD}| = |\mathbf{AC}| \cos \alpha$, $|\mathbf{DC}| = |\mathbf{AC}| \sin \alpha$, con lo que

$$\mathbf{DC} = \mathbf{u} \times \mathbf{r} \sin \alpha$$

De esta manera el vector \mathbf{r}' se expresa como:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \cos \alpha + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}(1 - \cos \alpha) + \mathbf{u} \times \mathbf{r} \sin \alpha, \quad (2.191)$$

que expresado por componentes:

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i \cos \alpha + (x_j u_j) u_i (1 - \cos \alpha) + \varepsilon_{ijk} u_j x_k \sin \alpha = \\ &= (\delta_{ik} \cos \alpha + u_i u_k (1 - \cos \alpha) + \varepsilon_{ijk} u_j \sin \alpha) x_k = \mathcal{R}(\alpha, \mathbf{u})_{ik} x_k. \end{aligned}$$

Si definimos el vector $\boldsymbol{\alpha} = \alpha \mathbf{u}$, entonces toda rotación queda parametrizada por un vector de \mathbb{R}^3 ,

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha})_{ik} = \delta_{ik} \cos \alpha + \frac{\alpha_i \alpha_k}{\alpha^2} (1 - \cos \alpha) + \varepsilon_{ijk} \frac{\alpha_j}{\alpha} \sin \alpha \quad (2.192)$$

donde el primer índice i es un índice de fila y el segundo k de columna de la matriz que caracteriza a esta rotación. Si fijamos el vector \mathbf{u} , entonces una rotación en el sentido positivo alrededor de un eje de valor α produce el mismo efecto que una rotación de valor $2\pi - \alpha$ tomada en sentido contrario. Entonces, a la hora de singularizar cada rotación por un vector $\boldsymbol{\alpha}$, la variedad que caracteriza al grupo se reduce al conjunto de puntos contenidos dentro y sobre la superficie de una esfera de radio π , (ver figura 2.10) pero donde los puntos opuestos de la superficie de la esfera, que representan rotaciones de valor π , corresponden a una misma rotación y por lo tanto están identificados.

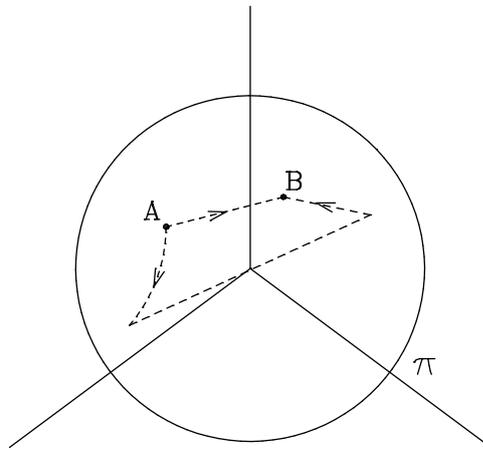


Figura 2.10: Variedad doblemente conexa del grupo $SO(3)$

Esta particularidad hace que si tratamos de unir dos puntos de la variedad mediante una curva de puntos de la variedad, hay dos tipos de curvas que nos unen dichos puntos. Estos tipos de curvas no pueden reducirse, por deformación, el uno al otro, ya que o pasan por la superficie de la esfera y saltan a su punto opuesto, o bien unen directamente ambos puntos. La variedad es un conjunto cerrado y acotado, es decir compacto. Y como la conexión mediante arcos de dos puntos cualesquiera tiene dos posibilidades, pasando por el borde o sin pasar, resulta que el grupo de rotaciones es también doblemente conexo. El $\det(\mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha})) = 1$, con lo que el grupo de rotaciones se identifica con $SO(3)$, el grupo de matrices 3×3 ortogonales de determinante unidad (Special Orthogonal group).

Otras parametrizaciones alternativas se obtienen definiendo el vector $\boldsymbol{\phi} = \sin(\alpha/2)\mathbf{u}$ y la matriz de rotación se representa por:

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{\phi})_{ik} = (1 - 2\phi^2) \delta_{ik} + 2\phi_i \phi_k + 2\sqrt{1 - \phi^2} \varepsilon_{ijk} \phi_j \quad (2.193)$$

y la variedad es una esfera de radio unidad con identificación de puntos opuestos sobre la superficie.

Si definimos el vector $\boldsymbol{\rho} = \tan(\alpha/2)\mathbf{u}$ en esta parametrización una rotación se expresa mediante:

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{\rho})_{ik} = \frac{1}{1 + \rho^2} [(1 - \rho^2) \delta_{ik} + 2\rho_i \rho_k + 2\varepsilon_{ijk} \rho_j] \quad (2.194)$$

y la variedad es el espacio \mathbb{R}^3 compacto, donde la compactificación se ha obtenido añadiendo los puntos del infinito en cada dirección, y que además cada par de puntos opuestos se han identificado. Denotaremos esta variedad por \mathbb{R}_c^3 .

Ejercicio: Dada la matriz ortogonal siguiente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

determinar qué tipo de transformación de coordenadas genera.

Solucion: Como el determinante es -1 resulta ser una rotación seguida de una inversión con respecto al origen. La traza es cero, luego la rotación es de $0 = 1 + 2 \cos \alpha$, $\alpha = 2\pi/3$, alrededor de un eje de cosenos directores proporcionales a $\mathbf{u} \sim (1, -1, 1)$.

Ejercicio: Calcular, utilizando dos parametrizaciones distintas del grupo de rotaciones, la matriz que representa una rotación, en el sentido pasivo, de valor $\alpha = 30^\circ$ alrededor de un eje cuyos cosenos directores son proporcionales a los números $(-1, 2, 2)$.

2.7.1. Parametrización normal o canónica del grupo $SO(3)$

A partir de la relación $\mathcal{R}^T \mathcal{R} = \mathbb{1}$, obtenemos nueve ecuaciones entre las nueve componentes de la matriz de rotación \mathcal{R} . Sin embargo sólo son en realidad seis ecuaciones independientes, ya que considerada cada matriz como tres vectores fila o columna, dichas relaciones lo que establecen es que dichos vectores son ortogonales dos a dos y de norma unidad. El que el determinante sea $+1$ representa que tomados consecutivamente, dichos vectores forman un triedro ortonormal directo (antihorario), siendo un triedro inverso (horario) en el caso de que el determinante valga -1 . Quedan por lo tanto tres parámetros libres de ahí que la variedad que caracteriza al grupo sea de dimensión 3. La parte conectada continuamente con la unidad $SO(3)$ como grupo de Lie, tendrá un álgebra de Lie de dimensión 3. Sea $\mathcal{R} = \mathbb{1} + \epsilon M$ una rotación próxima a la unidad, con ϵ infinitesimal y M una matriz a determinar. Como $\mathcal{R}^T = \mathcal{R}^{-1} = \mathbb{1} + \epsilon M^T = \mathbb{1} - \epsilon M$, resulta que $M^T = -M$ por lo que M es una matriz antisimétrica arbitraria 3×3 , que se denomina generador de la rotación.

El álgebra de Lie de los generadores de $SO(3)$, que se suele representar por $so(3)$, es el espacio vectorial real de las matrices reales antisimétricas 3×3 . Una base de dicho espacio viene dada por las tres matrices linealmente independientes:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con lo que comprobamos que generan un espacio vectorial de dimensión 3. Un álgebra de Lie, además de ser espacio vectorial posee una ley de composición interna, que es distributiva respecto de la suma vectorial, pero que no es en general conmutativa ni asociativa. Basta para caracterizarla, el conocer dicha ley para los vectores de la base. Para matrices la ley $[\cdot, \cdot]$ se reduce a su conmutador. Los tres J_i cumplen las reglas de conmutación:

$$[J_i, J_k] = \varepsilon_{ikl} J_l, \quad i, k, l = 1, 2, 3, \quad (2.195)$$

es decir la tabla que define la operación $[\cdot, \cdot]$ del álgebra de Lie $so(3)$ es la

$so(3)$	J_1	J_2	J_3
J_1	0	J_3	$-J_2$
J_2	$-J_3$	0	J_1
J_3	J_2	$-J_1$	0

Sea $M = \sum \alpha_i J_i$ una combinación lineal arbitraria de los elementos de la base J_i , con tres números reales arbitrarios α_i . Esa suma la vamos a escribir formalmente como $\sum \alpha_i J_i = \alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{J}$, siendo $\alpha_i = \alpha u_i$ en términos de las tres componentes de un vector unidad \mathbf{u} y donde mediante el ‘producto escalar’ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{J} \equiv U$ lo que queremos expresar es el sumatorio $\sum u_i J_i$ en forma compacta. Calculemos la matriz

$$\begin{aligned} \exp(M) &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mathbb{I} + \frac{M}{n} \right)^n \equiv \exp(\alpha U) = \exp \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\alpha}{1!} \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\alpha^2}{2!} \begin{pmatrix} -(u_2^2 + u_3^2) & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_1 u_2 & -(u_1^2 + u_3^2) & u_2 u_3 \\ u_1 u_3 & u_2 u_3 & -(u_1^2 + u_2^2) \end{pmatrix} + \\ &\quad + \frac{\alpha^3}{3!} \begin{pmatrix} 0 & u_3 & -u_2 \\ -u_3 & 0 & u_1 \\ u_2 & -u_1 & 0 \end{pmatrix} + \dots \end{aligned}$$

de tal manera que habiendo llamado

$$U = \mathbf{u} \cdot \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U^2 = \begin{pmatrix} -(u_2^2 + u_3^2) & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_1 u_2 & -(u_1^2 + u_3^2) & u_2 u_3 \\ u_1 u_3 & u_2 u_3 & -(u_1^2 + u_2^2) \end{pmatrix},$$

entonces U verifica $U^3 = -U$, $U^4 = -U^2$ y así sucesivamente para todas sus potencias, con lo que el desarrollo anterior se expresa en términos únicamente de las matrices \mathbb{I} , U y U^2 , en la forma

$$\exp(\alpha U) \equiv \exp(\alpha \cdot \mathbf{J}) = \mathbb{I} + U \left(\frac{\alpha}{1!} - \frac{\alpha^3}{3!} + \dots \right) + U^2 \left(\frac{\alpha^2}{2!} - \frac{\alpha^4}{4!} + \dots \right),$$

es decir la expresión obtenida anteriormente (2.192).

Si consideramos que dos de los parámetros α_i son nulos y analizamos el subgrupo uniparamétrico que genera el parámetro no nulo, por ejemplo α_1 , entonces

$$\begin{aligned} \exp(\alpha J_1) \exp(\beta J_1) &= (\mathbb{I} + \sin \alpha J_1 + (1 - \cos \alpha) J_1^2) (\mathbb{I} + \sin \beta J_1 + (1 - \cos \beta) J_1^2) = \\ &\mathbb{I} + \sin(\alpha + \beta) J_1 + (1 - \cos(\alpha + \beta)) J_1^2 = \exp((\alpha + \beta) J_1), \end{aligned}$$

con lo que en esta parametrización la ley de composición de cada subgrupo uniparamétrico es la suma de los parámetros de los elementos del grupo que intervienen en la operación. Al parámetro que define la aplicación exponencial se le denomina **parámetro normal o canónico**.

La parametrización normal del grupo de rotaciones, corresponde por lo tanto a aquella en la que la variedad es la esfera de radio π , con lo que en la parametrización normal una rotación se representa por:

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha})_{ik} = (\exp(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{J}))^i_k = \delta_{ik} \cos \alpha + \frac{\alpha_i \alpha_k}{\alpha^2} (1 - \cos \alpha) + \varepsilon_{ijk} \frac{\alpha_j}{\alpha} \sin \alpha,$$

que es la expresión (2.192).

De forma desarrollada $\mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha})$ resulta ser:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha + u_1^2 (1 - \cos \alpha) & -u_3 \sin \alpha + u_1 u_2 (1 - \cos \alpha) & u_2 \sin \alpha + u_1 u_3 (1 - \cos \alpha) \\ u_3 \sin \alpha + u_2 u_1 (1 - \cos \alpha) & \cos \alpha + u_2^2 (1 - \cos \alpha) & -u_1 \sin \alpha + u_2 u_3 (1 - \cos \alpha) \\ -u_2 \sin \alpha + u_3 u_1 (1 - \cos \alpha) & u_1 \sin \alpha + u_3 u_2 (1 - \cos \alpha) & \cos \alpha + u_3^2 (1 - \cos \alpha) \end{pmatrix}$$

Podemos ver que $\mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha})^{-1} = \mathcal{R}^T(\boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{R}(-\boldsymbol{\alpha})$ y que la suma de los elementos diagonales vale $1 + 2 \cos \alpha$, en tanto que los cosenos directores del vector unitario \mathbf{u} que define el eje de giro

son proporcionales a los números $(\mathcal{R}_{32} - \mathcal{R}_{23}, \mathcal{R}_{13} - \mathcal{R}_{31}, \mathcal{R}_{21} - \mathcal{R}_{12})$, salvo en el caso de que la rotación sea de valor $\alpha = \pi$, que al ser \mathcal{R} simétrica, se obtendrán a partir de los elementos diagonales que valen, respectivamente $-1+2u_1^2$, $-1+2u_2^2$ y $-1+2u_3^2$ y las dos posibles soluciones para cada u_i deben ser compatibles con el resto de los elementos \mathcal{R}_{ij} .

$$1 + 2 \cos \alpha = \mathcal{R}_{ii}, \quad u_i = \frac{1}{2 \sin \alpha} \epsilon_{ijk} \mathcal{R}_{kj}, \quad \alpha \neq 0, \pi.$$

Si $\alpha = 0$, los \mathcal{R}_{kj} , $k \neq j$ son nulos y la anterior relación es indeterminada, como corresponde al eje de una rotación nula.

Si calculamos los valores propios de toda matriz ortogonal que representa una rotación, vemos que se reducen al valor real 1 con vectores propios en el subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 de dimensión 1 en la dirección del eje de giro, y otros dos valores propios en general complejos conjugados, de la forma $e^{i\alpha}$ y $e^{-i\alpha}$, sin vectores propios reales, que en el caso particular $\alpha = \pi$ se reducen a -1 que es doble y los correspondientes vectores propios constituyen el espacio vectorial bidimensional ortogonal al eje de giro.

Ejercicio: Las dos matrices siguientes representan sendas rotaciones. Determinarlas.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{10}}{5} & \frac{-\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{5} & \frac{1+2\sqrt{2}}{5} & \frac{\sqrt{2}-2}{5} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{\sqrt{2}-2}{5} & \frac{8+\sqrt{2}}{10} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{-4+\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}-1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}-4}{6} & \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}+1}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}+1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

Solucion: $\alpha_A = \pi/4$, $\mathbf{n}_A \sim (0, -1, 2)$. $\alpha_B = 2\pi/3$, $\mathbf{n}_B \sim (-2, 2, 1)$.

El tratamiento que hemos hecho de las rotaciones se denomina representación activa, en el sentido de que expresamos cómo cambian las coordenadas de un punto sometido a una rotación, respecto de unos ejes coordenados que permanecen fijos en el espacio. La interpretación pasiva consiste en representar las coordenadas de un mismo punto del espacio referido a dos sistemas de coordenadas, uno de los cuales ha sido girado respecto del otro. Pero al girar un sistema de coordenadas mediante α las nuevas coordenadas del punto corresponde a una rotación activa en la que hubiéramos girado al punto con la rotación inversa $-\alpha$. De ahí que basta sustituir α por $-\alpha$ para obtener la expresión de un cambio de coordenadas cuando cambiamos de sistema de referencia. En este caso, las reglas de conmutación aparecen en la interpretación pasiva como:

$$[J_i, J_k] = -\epsilon_{ikl} J_l, \quad i, k, l = 1, 2, 3$$

2.7.2. Ley de composición de las rotaciones

Si cada rotación viene dada por un vector $\alpha \in SO(3)$ entonces es posible obtener el vector resultante de la composición de dos rotaciones arbitrarias. Sea $\mathcal{R}(\gamma) = \mathcal{R}(\alpha)\mathcal{R}(\beta)$. Si los vectores $\alpha = \alpha\mathbf{u}$, $\beta = \beta\mathbf{v}$ y $\gamma = \gamma\mathbf{w}$, entonces haciendo el producto matricial e identificando término a término obtenemos:

$$\mathbf{w} \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{\mathbf{u} \tan \alpha/2 + \mathbf{v} \tan \beta/2 + \tan \alpha/2 \tan \beta/2 (\mathbf{u} \times \mathbf{v})}{1 - \tan \alpha/2 \tan \beta/2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})} \quad (2.196)$$

Si en vez de utilizar la parametrización normal definimos los vectores

$$\boldsymbol{\rho} = \tan \frac{\alpha}{2} \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\mu} = \tan \frac{\beta}{2} \mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\nu} = \tan \frac{\gamma}{2} \mathbf{w}$$

entonces $\mathcal{R}(\boldsymbol{\nu}) = \mathcal{R}(\boldsymbol{\rho})\mathcal{R}(\boldsymbol{\mu})$ resulta:

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\mu}}{1 - \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\mu}} \quad (2.197)$$

Podemos ver de la anterior relación, que si $\alpha = \beta = \pi$, $\tan(\alpha/2) = \tan(\beta/2) = \infty$ y por lo tanto en este límite:

$$\mathbf{w} \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}$$

con lo que la rotación resultante es alrededor de un eje ortogonal a los dos anteriores en el sentido del producto vectorial del segundo al primero, que si están separados un ángulo ϕ se tiene que $\tan(\gamma/2) = \sin \phi / \cos \phi = \tan \phi$, y el valor del ángulo es $\gamma = 2\phi$, doble del que forman \mathbf{u} y \mathbf{v} . Recíprocamente, toda rotación puede por lo tanto escribirse como producto de dos rotaciones de valor π , alrededor de dos ejes ortogonales al primero y separados por un ángulo de valor mitad al de la rotación a efectuar.

Si tenemos una pequeña tapa cilíndrica y la damos la vuelta, esto es la giramos π radianes alrededor de uno de sus diámetros, y a continuación la volvemos a girar otros π radianes alrededor de otro diámetro, vuelve a quedar boca arriba, y sus puntos han girado un ángulo doble del que forman estos dos ejes, y en el sentido en que se han tomado estos ejes.

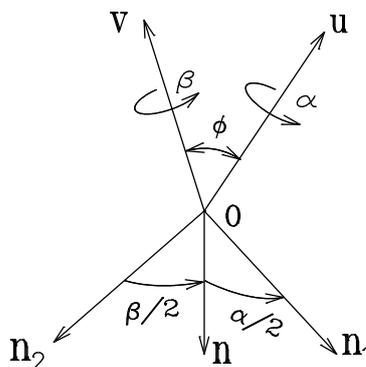


Figura 2.11: Composición de rotaciones mediante giros de valor π

Esto nos da pie para representar geoméricamente la composición de dos rotaciones ¹³ a base de descomponer cada una de ellas en dos de valor π . Sean en la figura 2.11, \mathbf{u} y \mathbf{v} los dos vectores unitarios alrededor de los cuales vamos a girar sendos ángulos α y β . Si por O trazamos los planos perpendiculares a ambos vectores, éstos se cortan según la recta caracterizada por el vector unitario \mathbf{n} . En el plano perpendicular a \mathbf{u} , y en el sentido antihorario, colocamos el vector unitario \mathbf{n}_1 , separado del \mathbf{n} un ángulo $\alpha/2$. Asimismo, en el plano perpendicular a \mathbf{v} , y en sentido contrario al anterior, definimos el vector unitario \mathbf{n}_2 separado $\beta/2$ del \mathbf{n} . Por lo tanto:

$$\mathcal{R}(\beta, \mathbf{v})\mathcal{R}(\alpha, \mathbf{u}) = \mathcal{R}(\pi, \mathbf{n}_2)\mathcal{R}(\pi, \mathbf{n})\mathcal{R}(\pi, \mathbf{n})\mathcal{R}(\pi, \mathbf{n}_1) = \mathcal{R}(\pi, \mathbf{n}_2)\mathcal{R}(\pi, \mathbf{n}_1), \quad (2.198)$$

por lo que la rotación compuesta lo es alrededor de un eje perpendicular a \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 en el sentido $\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_1$ y de valor un ángulo igual al doble del que forman estos vectores.

El análisis anterior se presta a otra interpretación gráfica de la ley de composición de dos rotaciones. Supongamos que tenemos dada una esfera de radio unidad. Como una rotación viene

¹³J.M. Aguirregabiria, A. Hernández, M. Rivas, *Eur. J. Phys.*, **13**, 139-141 (1992).

caracterizada por el ángulo α y el vector unitario \mathbf{u} que define el eje de rotación, vamos a tratar de representar ambos elementos sobre esta esfera. El vector \mathbf{u} lo podemos definir por un punto sobre ella que representa a su extremo o bien mediante un plano, ortogonal a \mathbf{u} que pasando por el centro corta a la esfera según un círculo máximo. Adoptaremos este segundo punto de vista. En cuanto al ángulo α , asociado a este eje, definiremos sobre el círculo máximo anterior un segmento orientado de longitud $\alpha/2$.

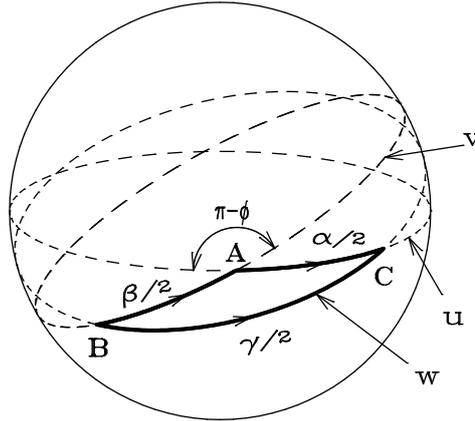


Figura 2.12: **Composición de rotaciones sobre la esfera unidad**

La ley de composición esquematizada en la figura anterior nos lleva en la figura 2.12, a definir dos círculos máximos asociados respectivamente a \mathbf{u} y \mathbf{v} que se cortan en el punto A , el cual representaría el extremo del vector unitario \mathbf{n} . Llevando sobre ellos en el sentido indicado sendos segmentos circulares de valores $\alpha/2$ y $\beta/2$ respectivamente se nos definen los puntos B y C que se corresponden con los extremos de los dos vectores unitarios \mathbf{n}_2 y \mathbf{n}_1 . Como la rotación resultante es ortogonal a éstos, entonces su eje queda definido por el círculo máximo que pasa por B y C . Como la rotación compuesta lo es de valor doble a la separación angular entre \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 , entonces el segmento circular BC resulta ser de valor $\gamma/2$ y por lo tanto caracteriza a la rotación compuesta.

Como la separación angular entre ambos planos es $\pi - \phi$, siendo ϕ el ángulo que forman \mathbf{u} y \mathbf{v} , sabemos por trigonometría esférica que en el triángulo esférico ABC se cumple:

$$\begin{aligned} \cos \gamma/2 &= \cos \alpha/2 \cos \beta/2 + \sin \alpha/2 \sin \beta/2 \cos(\pi - \phi) = \\ &= \cos \alpha/2 \cos \beta/2 - \sin \alpha/2 \sin \beta/2 \cos \phi \end{aligned}$$

relación que podemos obtener directamente a partir de la composición de las dos matrices que representan dichas rotaciones.

2.7.3. Cinemática de la rotación

La descripción de un objeto con orientación, como por ejemplo un sólido rígido o una partícula elemental se va a hacer describiendo la evolución de los tres vectores unidad $\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3$, de los ejes ortogonales ligados al punto que evoluciona. En el caso del sólido rígido pueden ser las tres direcciones principales de inercia alrededor del centro de masa y en el caso de una partícula elemental el sistema cartesiano instantáneo ligado al centro de carga.

Si esos tres vectores los escribimos como vectores columna, uno a continuación del otro, formarán una matriz ortogonal de determinante unidad, esto es, una matriz de rotación, y por lo tanto, solamente tres parámetros $\alpha_i, i = 1, 2, 3$, la caracterizarán, como variables esenciales para su descripción, que serán los tres grados de libertad asociados a la evolución de la orientación.

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha}) = ((\mathbf{e}_1), (\mathbf{e}_2), (\mathbf{e}_3))$$

Si inicialmente en $t = 0$, escogemos los ejes del laboratorio en coincidencia con los tres ejes del cuerpo, entonces en el instante t , la matriz $\mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha}(t))$ representa la rotación activa que debo someter a los ejes del laboratorio para llevarlos a coincidencia con los ejes del cuerpo.

Si ahora consideramos otro observador inercial Galileano O' que está relacionado con O mediante una transformación Galileana, esto es que nuestras medidas de acontecimientos espacio temporales están relacionadas mediante

$$t' = t + b, \quad \mathbf{r}' = \mathcal{R}(\boldsymbol{\mu})\mathbf{r} + \mathbf{v}t + \mathbf{a},$$

significa que la información sobre cualquier otra magnitud de tipo vectorial la relacionamos con la matriz Jacobiana del cambio de coordenadas espaciales, esto es $\mathcal{R}_{ij}(\boldsymbol{\mu})$, siendo $\boldsymbol{\mu}$ los tres parámetros que caracterizan a nuestra orientación relativa. En particular, los tres vectores unidad ligados al cuerpo transformarán con

$$\mathbf{e}'_i = \mathcal{R}(\boldsymbol{\mu})\mathbf{e}_i,$$

y si en ambos miembros los agrupamos formando la correspondiente matriz ortogonal, resulta para todo instante t :

$$((\mathbf{e}'_1), (\mathbf{e}'_2), (\mathbf{e}'_3)) \equiv \mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha}'(t')) = (\mathcal{R}(\boldsymbol{\mu})(\mathbf{e}_1), \mathcal{R}(\boldsymbol{\mu})(\mathbf{e}_2), \mathcal{R}(\boldsymbol{\mu})(\mathbf{e}_3)) = \mathcal{R}(\boldsymbol{\mu})\mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha}(t)) \quad (2.199)$$

Para el observador O , $\mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha}(t))$ es la orientación del cuerpo en el instante t y $\mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha}(t + dt))$ su orientación en el instante $t + dt$. Ésta se podrá poner como la rotación $\mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha}(t))$ seguida de una rotación infinitesimal $\mathbb{I} + \Omega dt$, esto es

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha}(t + dt)) = (\mathbb{I} + \Omega dt)\mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha}(t)) = \mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha}(t)) + \Omega\mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha}(t))dt = \mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha}(t)) + \dot{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\alpha}(t))dt,$$

por lo que la matriz Ω , resulta ser

$$\Omega(t)\mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha}(t)) = \dot{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\alpha}(t)), \quad \rightarrow \quad \Omega(t) = \dot{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\alpha}(t))\mathcal{R}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}(t)) = \dot{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\alpha}(t))\mathcal{R}^T(\boldsymbol{\alpha}(t))$$

y Ω es una matriz antisimétrica cuyas tres componentes esenciales definen el vector velocidad angular instantánea $\boldsymbol{\omega}(t)$, $\omega_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Omega_{jk}$.

En efecto, para toda matriz de rotación $\mathcal{R}\mathcal{R}^T = \mathbb{I}$, para todo instante t , $\mathcal{R}(t)\mathcal{R}^T(t) = \mathbb{I}$, luego derivando con respecto al tiempo

$$\dot{\mathcal{R}}\mathcal{R}^T + \mathcal{R}\dot{\mathcal{R}}^T = 0, \quad \Omega + \Omega^T = 0.$$

Además, la relación $\dot{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\alpha}(t)) = \Omega(t)\mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha}(t))$, si lo analizamos por columnas equivale a

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \Omega\mathbf{e}_i \equiv \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i.$$

La cinemática se corresponde con una rotación instantánea alrededor de un eje en la dirección de $\boldsymbol{\omega}$.

Si expresamos las rotaciones en términos del vector $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{u}$, que representa el ángulo total girado por el sistema, entonces la velocidad angular se expresa:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{u}\frac{d\alpha}{dt} + \sin\alpha\frac{d\mathbf{u}}{dt} + (1 - \cos\alpha)\mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt}. \quad (2.200)$$

Ejercicio. Demostrar que si utilizamos como parametrización de la orientación el vector $\boldsymbol{\rho} = \tan(\alpha/2)\mathbf{n}$, siendo \mathbf{n} el vector unidad a lo largo del eje de giro y α el ángulo girado resulta que

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{2}{1+\rho^2}(\dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\rho} \times \dot{\boldsymbol{\rho}}), \quad \boldsymbol{w} = R^T(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\omega} = \frac{2}{1+\rho^2}(\dot{\boldsymbol{\rho}} - \boldsymbol{\rho} \times \dot{\boldsymbol{\rho}}).$$

siendo \boldsymbol{w} el vector velocidad angular referido a los ejes del cuerpo.

Si en (2.199) derivamos ambos miembros con respecto a t' , sabiendo que $\partial t/\partial t' = 1$, resulta

$$\dot{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\alpha}'(t')) = \mathcal{R}(\boldsymbol{\mu})\dot{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\alpha}(t))$$

y tomando la traspuesta de (2.199)

$$\mathcal{R}^T(\boldsymbol{\alpha}'(t')) = \mathcal{R}^T(\boldsymbol{\alpha}(t))\mathcal{R}^T(\boldsymbol{\mu})$$

por lo que entre observadores las matrices Ω transforman

$$\Omega'(t') = \dot{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\alpha}'(t'))\mathcal{R}^T(\boldsymbol{\alpha}'(t')) = \mathcal{R}(\boldsymbol{\mu})\dot{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\alpha}(t))\mathcal{R}^T(\boldsymbol{\alpha}(t))\mathcal{R}^T(\boldsymbol{\mu}) = \mathcal{R}(\boldsymbol{\mu})\Omega(t)\mathcal{R}^T(\boldsymbol{\mu})$$

que corresponde a la forma de transformar de un tensor con dos índices, y que para sus componentes esenciales se reduce a

$$\boldsymbol{\omega}'(t') = \mathcal{R}(\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\omega}(t).$$

De la expresión (2.194) obtenemos que en la representación de las rotaciones en términos del parámetro $\boldsymbol{\rho}$, los ejes ligados al cuerpo \mathbf{e}_k poseen por componentes

$$(\mathbf{e}_k)_i = \frac{1}{1+\rho^2}[(1-\rho^2)\delta_{ik} + 2\rho_i\rho_k + 2\varepsilon_{ijk}\rho_j]. \quad (2.201)$$

2.7.4. Dinámica de la rotación

Si quiero hacer una descripción Lagrangiana de un cuerpo con orientación $\boldsymbol{\alpha}$, como el grupo de rotaciones no posee extensiones centrales, y las ecuaciones de la dinámica deben ser independientes de los observadores inerciales, es decir deben ser invariantes bajo los cambios de sistemas de referencia Galileanos, entonces la Lagrangiana debe ser una función invariante $L(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}})$, de las variables que utilicemos para describir su orientación $\boldsymbol{\alpha}$ y de sus derivadas temporales $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$, lo que nos lleva a que su expresión general es una función arbitraria de las componentes de la velocidad angular ω_i , $L(\omega_i)$. De esta forma, las ecuaciones de Euler-Lagrange que se deducen de ella son

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial \omega_j} \frac{\partial \omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \omega_j} \frac{\partial \omega_j}{\partial \dot{\alpha}_i} \right) = 0,$$

Si llamamos $W_j = \partial L/\partial \omega_j$, se propone al lector (es relativamente más sencillo en la parametrización $\boldsymbol{\rho}$) que demuestre que las anteriores ecuaciones conducen a

$$\frac{d\mathbf{W}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{W}, \quad W_i = \frac{\partial L}{\partial \omega_i}.$$

Las componentes del momento angular con respecto a los ejes del cuerpo son constantes del movimiento. En efecto, llamemos $T_i = \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_i$. Su derivada temporal

$$\frac{dT_i}{dt} = \frac{d\mathbf{W}}{dt} \cdot \mathbf{e}_i + \mathbf{W} \cdot \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{W}) \cdot \mathbf{e}_i + \mathbf{W} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i) = 0.$$

En el caso de una partícula elemental, si fuese un sólido rígido y su espín es una constante del movimiento, entonces necesariamente $\mathbf{W} \sim \boldsymbol{\omega}$ y la expresión de la Lagrangiana debe ser una función arbitraria de la $\boldsymbol{\omega}^2$. Un caso simple corresponde a

$$L = \frac{1}{2}I\boldsymbol{\omega}^2$$

que corresponde a un objeto con simetría de inercia esférica, es decir con los tres momentos principales de inercia iguales y cuyo momento angular $\mathbf{S} = \mathbf{W} = I\boldsymbol{\omega}$. Como observación, un objeto con los tres momentos principales de inercia iguales, no es necesariamente de forma esférica, como sucede, por ejemplo, con un cubo. En el caso de que los momentos principales fueran diferentes

$$L = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2),$$

las ecuaciones de Euler-Lagrange se escriben, con $S_i = I_i\omega_i$, (sin sumar sobre i)

$$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3, \quad I_2 \frac{d\omega_2}{dt} = (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1, \quad I_3 \frac{d\omega_3}{dt} = (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2.$$

La componente ω_1 será una constante del movimiento si $I_3 = I_2$, y el mismo tipo de criterio para las demás.

2.8. Apéndice: Grupo de Galileo

El grupo de Galileo es el grupo de transformaciones del espacio-tiempo caracterizadas por los diez parámetros $g \equiv (b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha})$. La acción de g sobre un punto del espacio-tiempo $x \equiv (t, \mathbf{r})$ viene dada por $x' = gx$, y la vamos a considerar hecha de la siguiente forma:

$$x' = \exp(bH) \exp(\mathbf{a} \cdot \mathbf{P}) \exp(\mathbf{v} \cdot \mathbf{K}) \exp(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{J}) x$$

como la acción de una rotación, seguida de una transformación Galileana pura y finalmente una traslación espacial y temporal. De esta forma, todos los parámetros que definen cada subgrupo uniparamétrico son parámetros normales, y se puede utilizar la aplicación exponencial. Explícitamente,

$$t' = t + b, \quad (2.202)$$

$$\mathbf{r}' = R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{r} + \mathbf{v}t + \mathbf{a}, \quad (2.203)$$

y la ley de composición del grupo $g'' = g'g$ es:

$$b'' = b' + b, \quad (2.204)$$

$$\mathbf{a}'' = R(\boldsymbol{\alpha}')\mathbf{a} + \mathbf{v}'b + \mathbf{a}', \quad (2.205)$$

$$\mathbf{v}'' = R(\boldsymbol{\alpha}')\mathbf{v} + \mathbf{v}', \quad (2.206)$$

$$R(\boldsymbol{\alpha}'') = R(\boldsymbol{\alpha}')R(\boldsymbol{\alpha}). \quad (2.207)$$

Para las rotaciones vamos a usar dos parametrizaciones diferentes. Una es la normal o canónica en términos del vector $\boldsymbol{\alpha} = \alpha \mathbf{n}$, donde \mathbf{n} es un vector unidad a lo largo del eje de rotación, y el ángulo girado $\alpha \in [0, \pi]$ en radianes, se interpreta como positivo si tiene la orientación de las agujas de un reloj, cuando miramos en la dirección que marca el vector \mathbf{n} . Otra parametrización, que tiene ventajas algebraicas, es expresar cada rotación por el vector $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{n} \tan(\alpha/2)$, con α y \mathbf{n} como en el caso anterior.

La matriz de rotación $R(\boldsymbol{\alpha}) = \exp(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{J})$ se expresa en términos de los parámetros normales α_i y de la representación matricial de los generadores J_i , que aparecen como

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y satisfacen las reglas de conmutación $[J_i, J_k] = \epsilon_{ikl} J_l$, de tal manera que si definimos el vector $\boldsymbol{\alpha} = \alpha \mathbf{n}$, se puede poner, en la representación activa,

$$R(\boldsymbol{\alpha})_{ij} = \delta_{ij} \cos \alpha + n_i n_j (1 - \cos \alpha) - \epsilon_{ijk} n_k \sin \alpha, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (2.208)$$

En la parametrización $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{n} \tan(\alpha/2)$, la matriz de rotación es

$$R(\boldsymbol{\mu})_{ij} = \frac{1}{1 + \mu^2} ((1 - \mu^2)\delta_{ij} + 2\mu_i \mu_j - 2\epsilon_{ijk} \mu_k), \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (2.209)$$

En esta parametrización es especialmente sencilla la ley de composición de rotaciones, y la rotación compuesta $R(\boldsymbol{\mu}'') = R(\boldsymbol{\mu}')R(\boldsymbol{\mu})$ es equivalente a

$$\boldsymbol{\mu}'' = \frac{\boldsymbol{\mu}' + \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}' \times \boldsymbol{\mu}}{1 - \boldsymbol{\mu}' \cdot \boldsymbol{\mu}}. \quad (\text{activa}) \quad (2.210)$$

Esto se puede ver de forma sencilla usando el homomorfismo entre el grupo de rotaciones y el grupo unitario $SU(2)$. Los generadores matriciales de $SU(2)$ son $\mathbf{J} = -i\boldsymbol{\sigma}/2$ en términos de las

matrices de Pauli $\boldsymbol{\sigma}$, y en la representación activa verifican las mismas reglas de conmutación $[J_i, J_k] = \epsilon_{ikl} J_l$. En la parametrización normal una matriz de $SU(2)$, se puede poner en la forma $\exp(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{J}) = \exp(-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}/2)$,

$$R(\boldsymbol{\alpha}) = \cos(\alpha/2)\mathbb{I} - i(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \sin(\alpha/2).$$

Si definimos $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{n} \tan(\alpha/2)$, en esta parametrización la matriz anterior queda

$$R(\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{\sqrt{1 + \boldsymbol{\mu}^2}} (\mathbb{I} - i\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad (2.211)$$

donde \mathbb{I} es la matriz unidad 2×2 , y a partir de esta representación, multiplicando matrices, podemos encontrar la ley de composición (2.210) ¹⁴.

Si la rotación es de valor π , entonces las ecuaciones (2.208) o (2.209) conducen a

$$R(\mathbf{n}, \pi)_{ij} = -\delta_{ij} + 2n_i n_j.$$

Si las dos rotaciones $R(\boldsymbol{\mu})$ y $R(\boldsymbol{\mu}')$ que aparecen en (2.210) fueran de valor π , aunque $\tan(\pi/2) = \infty$, esta expresión no es singular sino que posee como límite:

$$\mathbf{n}'' \tan(\alpha''/2) = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{n}'}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'}$$

El valor absoluto de esta relación implica que $\tan(\alpha''/2) = \tan \theta$, es decir, $\alpha'' = 2\theta$, donde θ es el ángulo entre los dos vectores unidad \mathbf{n} y \mathbf{n}' . Obtenemos el resultado conocido de que cualquier rotación de valor α alrededor de un eje caracterizado por el vector unidad \mathbf{n} puede obtenerse por la composición de dos rotaciones de valor π alrededor de dos ejes perpendiculares a \mathbf{n} y separados por un ángulo $\alpha/2$.

Como toda transformación Galileana la vamos a considerar un cambio de sistema de referencia, es necesario que para las rotaciones utilicemos la representación pasiva, tanto para la modificación de las variables \mathbf{r} y \mathbf{u} como de las variables de orientación $\boldsymbol{\rho}$. La diferencia entre la representación activa y la pasiva corresponde a un simple cambio de signo en el parámetro, o bien cambiar los generadores por sus opuestos. De esta forma, las reglas de conmutación de los generadores son las opuestas y la ley de composición de las rotaciones en la representación pasiva queda:

$$\boldsymbol{\mu}'' = \frac{\boldsymbol{\mu}' + \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}' \times \boldsymbol{\mu}}{1 - \boldsymbol{\mu}' \cdot \boldsymbol{\mu}}. \quad (\text{pasiva}) \quad (2.212)$$

Vamos a usar como notación para las variables de orientación las primeras letras griegas, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \dots$ cuando utilicemos la parametrización normal, mientras que en la parametrización $\tan(\alpha/2)$ usaremos letras griegas intermedias $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\rho}, \dots$. En esta notación, las ecuaciones de transformación (2.204-2.207) deben ser reemplazadas por

$$b'' = b' + b, \quad (2.213)$$

$$\mathbf{a}'' = R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{a} + \mathbf{v}'b + \mathbf{a}', \quad (2.214)$$

$$\mathbf{v}'' = R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{v} + \mathbf{v}', \quad (2.215)$$

$$\boldsymbol{\mu}'' = \frac{\boldsymbol{\mu}' + \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}' \times \boldsymbol{\mu}}{1 - \boldsymbol{\mu}' \cdot \boldsymbol{\mu}}. \quad (2.216)$$

El elemento neutro del grupo de Galileo es el $(0, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ y el inverso de todo elemento es

$$(b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha})^{-1} = (-b, -R(-\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{a} - b\mathbf{v}), -R(-\boldsymbol{\alpha})\mathbf{v}, -\boldsymbol{\alpha}).$$

¹⁴ D. Hestenes, *Space-time algebra*, Gordon and Breach, NY (1966).

Los generadores del grupo en la realización (2.202, 2.203) son los operadores diferenciales

$$H = \partial/\partial t, \quad P_i = \partial/\partial r_i, \quad K_i = t\partial/\partial r_i, \quad J_k = \varepsilon_{kli}r_l\partial/\partial r_i \quad (2.217)$$

y las reglas de conmutación del álgebra de Lie del grupo de Galileo en la representación pasiva son

$$[\mathbf{J}, \mathbf{J}] = -\mathbf{J}, \quad [\mathbf{J}, \mathbf{P}] = -\mathbf{P}, \quad [\mathbf{J}, \mathbf{K}] = -\mathbf{K}, \quad [\mathbf{J}, H] = 0, \quad (2.218)$$

$$[H, \mathbf{P}] = 0, \quad [H, \mathbf{K}] = \mathbf{P}, \quad [\mathbf{P}, \mathbf{P}] = 0, \quad [\mathbf{K}, \mathbf{K}] = 0, \quad [\mathbf{K}, \mathbf{P}] = 0. \quad (2.219)$$

Salvo que se indique de forma expresa, vamos a utilizar en estas notas, una notación abreviada para los conmutadores de los diferentes operadores, considerados como escalares y trivectores, que los representaremos en caracteres en negrita:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{C}, \quad \implies \quad [A_i, B_j] = \varepsilon_{ijk}C_k,$$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = C, \quad \implies \quad [A_i, B_j] = \delta_{ij}C,$$

$$[\mathbf{A}, B] = \mathbf{C}, \quad \implies \quad [A_i, B] = C_i,$$

$$[B, \mathbf{A}] = \mathbf{C}, \quad \implies \quad [B, A_i] = C_i,$$

donde $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ es la delta de Kronecker y ε_{ijk} es el tensor completamente antisimétrico, de tal forma que los índices latinos casen a ambos lados de los conmutadores.

La acción del grupo (2.202)-(2.203) representa la relación que existe entre las medidas de las coordenadas (t, \mathbf{r}) de un cierto acontecimiento espacio-temporal medido por un observador inercial O y las correspondientes coordenadas (t', \mathbf{r}') del mismo acontecimiento medidas por otro observador inercial O' . Los diez parámetros del grupo tienen el siguiente significado: Si consideramos el acontecimiento de coordenadas $(0, \mathbf{0})$ medidas por O , por ejemplo la emisión de un haz de fotones desde su origen cuando su reloj marca $t = 0$, para O' valen (b, \mathbf{a}) , donde b es el parámetro que representa la traslación temporal y \mathbf{a} la traslación espacial. El parámetro \mathbf{v} , con dimensiones de velocidad, representa la velocidad del origen del sistema cartesiano de O medido por O' , y finalmente los parámetros $\boldsymbol{\alpha}$, o $R(\boldsymbol{\alpha})$, representan la orientación del sistema cartesiano de O medido por O' . Los diez parámetros $(b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha})$ representan la descripción del sistema cartesiano de O , medido por O' .

El grupo de Galileo posee exponentes no triviales dados por ¹⁵

$$\xi(g, g') = m \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 b' + \mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{a}' \right). \quad (2.220)$$

Están caracterizados por el parámetro no nulo m .

La extensión central del grupo de Galileo ¹⁶ es un grupo de 11 parámetros con un generador adicional I que conmuta con todos los otros diez

$$[I, H] = [I, \mathbf{P}] = [I, \mathbf{K}] = [I, \mathbf{J}] = 0, \quad (2.221)$$

y el resto de las reglas de conmutación son las mismas del propio grupo de Galileo (2.218, 2.219), salvo la última que queda

$$[K_i, P_j] = -m\delta_{ij}I, \quad \text{o} \quad [\mathbf{K}, \mathbf{P}] = -mI, \quad (2.222)$$

habiendo usado nuestra notación abreviada, y en términos del parámetro no nulo m . Si definimos los siguientes operadores, funciones polinómicas de los generadores del álgebra de Lie,

$$\mathbf{W} = I\mathbf{J} - \frac{1}{m}\mathbf{K} \times \mathbf{P}, \quad U = IH - \frac{1}{2m}\mathbf{P}^2, \quad (2.223)$$

¹⁵ V. Bargmann, *Ann. Math.* **5**, 1 (1954).

¹⁶ J.M. Levy-Leblond, *Galilei Group and Galilean Invariance*, in E.M. Loeb, *Group Theory and its applications*, Acad. Press, NY (1971), vol. 2, p. 221.

vemos que U conmuta con todos los generadores del grupo de Galileo extendido, y el \mathbf{W} satisface las reglas de conmutación:

$$[\mathbf{W}, \mathbf{W}] = -I\mathbf{W}, \quad [\mathbf{J}, \mathbf{W}] = -\mathbf{W}, \quad [\mathbf{W}, \mathbf{P}] = [\mathbf{W}, \mathbf{K}] = [\mathbf{W}, H] = 0.$$

De esta forma, \mathbf{W}^2 también conmuta con todos los generadores. Resulta que el grupo de Galileo extendido posee tres operadores de Casimir funcionalmente independientes. En aquellas representaciones en las que el operador I resulte ser un múltiplo del operador unidad, por ejemplo en las representaciones irreducibles, esos tres invariantes se interpretan como la masa, $M = mI$, la energía interna $H_0 = H - P^2/2m$, y el valor absoluto del espín.

$$S^2 = \left(\mathbf{J} - \frac{1}{m} \mathbf{K} \times \mathbf{P} \right)^2. \quad (2.224)$$

El operador espín \mathbf{S} en aquellas representaciones en las que $I = \mathbb{I}$, satisface las reglas de conmutación:

$$[\mathbf{S}, \mathbf{S}] = -\mathbf{S}, \quad [\mathbf{J}, \mathbf{S}] = -\mathbf{S}, \quad [\mathbf{S}, \mathbf{P}] = [\mathbf{S}, H] = [\mathbf{S}, \mathbf{K}] = 0,$$

es decir, es un operador momento angular, transforma como un vector bajo rotaciones y es invariante bajo traslaciones y transformaciones de Galileo puras, respectivamente. Queda reducido al operador momento angular total \mathbf{J} en aquellos sistemas de referencia en los que $\mathbf{P} = \mathbf{K} = 0$, es decir, para los observadores del centro de masa.

2.9. Apéndice: Grupo de Poincaré

El grupo de Poincaré es el grupo de transformaciones del espacio-tiempo de Minkowski, que dejan invariante a la separación espacio-temporal entre dos acontecimientos próximos $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2$. Consideremos un punto del espacio tiempo de componentes contravariantes $x^\mu \equiv (ct, \mathbf{r})$, y $x' = gx$ se expresa como $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$, en términos de una matriz constante 4×4 , Λ y de un tetravector constante de traslación $a^\mu \equiv (cb, \mathbf{a})$. Las componentes covariantes del tensor métrico del espacio de Minkowski son $\eta_{\mu\nu} \equiv \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Entonces $dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu$ y $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\sigma\rho} dx^\sigma dx^\rho$ implica que la matriz constante Λ , debe satisfacer

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\rho = \eta_{\sigma\rho}. \quad (2.225)$$

Las relaciones (2.225) representan diez condiciones entre las 16 componentes de la matriz Λ , de tal manera que de las 16 componentes solamente seis son parámetros esenciales. En estas notas, tres de esos parámetros representan la velocidad relativa \mathbf{v} entre observadores inerciales y las otras tres la orientación relativa $\boldsymbol{\alpha}$ de sus ejes espaciales cartesianos, que lo expresaremos en cualquiera de las parametrizaciones del grupo de rotaciones, como en el caso Galileano.

Entonces, todo elemento del grupo de Poincaré \mathcal{P} , se representará, como en el caso Galileano, por los diez parámetros $g \equiv (b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha})$ y la acción del grupo sobre un punto del espacio-tiempo $x \equiv (t, \mathbf{r})$ se va a interpretar de la misma manera, es decir, $x' = gx$:

$$x' = \exp(bH) \exp(\mathbf{a} \cdot \mathbf{P}) \exp(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{K}) \exp(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{J})x, \quad (2.226)$$

como la acción de una rotación $\exp(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{J})$, seguida de un boost Lorentziano $\exp(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{K})$, o transformación de Lorentz pura, y finalmente una traslación espacial $\exp(\mathbf{a} \cdot \mathbf{P})$ y temporal $\exp(bH)$. Viene explícitamente dado por:

$$t' = \gamma t + \gamma(\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{r})/c^2 + b, \quad (2.227)$$

$$\mathbf{r}' = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{r} + \gamma \mathbf{v} t + \gamma^2(\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{r})\mathbf{v}/(1 + \gamma)c^2 + \mathbf{a}. \quad (2.228)$$

El parámetro $\boldsymbol{\beta}$ en (2.226) es el parámetro normal de las transformaciones de Lorentz puras (boosts), el cual se expresa en términos de la velocidad relativa entre observadores \mathbf{v} como $\boldsymbol{\beta}/\beta \tanh \beta = \mathbf{v}/c$, como veremos. Las dimensiones y dominios de los parámetros b , \mathbf{a} y $\boldsymbol{\mu}$ son las mismas que en el caso del grupo de Galileo, y el parámetro $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, posee por límite superior $v < c$, tiene también dimensiones de velocidad. El significado físico de estos diez parámetros, es exactamente el mismo que en el caso Galileano. El parámetro \mathbf{v} es la velocidad del observador O , medida por O' , y $R(\boldsymbol{\mu})$ representa la orientación del sistema cartesiano de O relativa a O' , una vez que O' ha sido lanzado con velocidad \mathbf{v} . El factor $\gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

La ley de composición del grupo de Poincaré se obtiene a partir de la composición $x'' = \Lambda'x' + a' = \Lambda'(\Lambda x + a) + a'$ que identificando con $x'' = \Lambda''x + a''$ se reduce a $\Lambda'' = \Lambda'\Lambda$ y $a'' = \Lambda'a + a'$, es decir, la ley de composición de las transformaciones de Lorentz, que la veremos en la sección siguiente, 2.9.1, y una transformación Poincaré (Λ', a') del tetravector a^μ . En esta parametrización $g'' = g'g$, resulta ser:¹⁷

$$b'' = \gamma'b + \gamma'(\mathbf{v}' \cdot R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{a})/c^2 + b', \quad (2.229)$$

$$\mathbf{a}'' = R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{a} + \gamma'\mathbf{v}'b + \frac{\gamma'^2}{(1 + \gamma')c^2}(\mathbf{v}' \cdot R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{a})\mathbf{v}' + \mathbf{a}', \quad (2.230)$$

$$\mathbf{v}'' = \frac{R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{v} + \gamma'\mathbf{v}' + \frac{\gamma'^2}{(1 + \gamma')c^2}(\mathbf{v}' \cdot R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{v})\mathbf{v}'}{\gamma'(1 + \mathbf{v}' \cdot R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{v}/c^2)}, \quad (2.231)$$

$$\boldsymbol{\mu}'' = \frac{\boldsymbol{\mu}' + \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}' \times \boldsymbol{\mu} + \mathbf{F}(\mathbf{v}', \boldsymbol{\mu}', \mathbf{v}, \boldsymbol{\mu})}{1 - \boldsymbol{\mu}' \cdot \boldsymbol{\mu} + G(\mathbf{v}', \boldsymbol{\mu}', \mathbf{v}, \boldsymbol{\mu})}, \quad (2.232)$$

¹⁷ M.Rivas, M.Valle and J.M.Aguirregabiria, *Eur. J. Phys.* **6**, 128 (1986).

donde $\mathbf{F}(\mathbf{v}', \boldsymbol{\mu}', \mathbf{v}, \boldsymbol{\mu})$ y $G(\mathbf{v}', \boldsymbol{\mu}', \mathbf{v}, \boldsymbol{\mu})$ son las funciones reales:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{v}', \boldsymbol{\mu}', \mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) &= \frac{\gamma\gamma'}{(1+\gamma)(1+\gamma')c^2} [\mathbf{v} \times \mathbf{v}' + \mathbf{v}(\mathbf{v}' \cdot \boldsymbol{\mu}') + \mathbf{v}'(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\mu}) \\ &+ \mathbf{v} \times (\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\mu}') + (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu}) \times \mathbf{v}' + (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\mu})(\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\mu}') \\ &+ (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu})(\mathbf{v}' \cdot \boldsymbol{\mu}') + (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu}) \times (\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\mu}')], \end{aligned} \quad (2.233)$$

$$\begin{aligned} G(\mathbf{v}', \boldsymbol{\mu}', \mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) &= \frac{\gamma\gamma'}{(1+\gamma)(1+\gamma')c^2} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\mu}') + \mathbf{v}' \cdot (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu}) \\ &- (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\mu})(\mathbf{v}' \cdot \boldsymbol{\mu}') + (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu}) \cdot (\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\mu}')]. \end{aligned} \quad (2.234)$$

El elemento unidad del grupo es $(0, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ y el inverso de cualquier elemento $(b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\mu})$ es

$$(-\gamma b + \gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}/c^2, -R(-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{a} - \gamma \mathbf{v}b + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)c^2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})\mathbf{v}), -R(-\boldsymbol{\mu})\mathbf{v}, -\boldsymbol{\mu}).$$

Los generadores del grupo en la realización (2.227, 2.228), y en términos de los parámetros normales $(b, \mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$, son

$$H = \partial/\partial t, \quad P_i = \partial/\partial r_i, \quad K_i = ct\partial/\partial r_i + (r_i/c)\partial/\partial t, \quad J_k = \varepsilon_{kli}r_l\partial/\partial r_i.$$

Por lo tanto, \mathbf{K} y \mathbf{J} son adimensionales y las reglas de conmutación resultan

$$[\mathbf{J}, \mathbf{J}] = -\mathbf{J}, \quad [\mathbf{J}, \mathbf{P}] = -\mathbf{P}, \quad [\mathbf{J}, \mathbf{K}] = -\mathbf{K}, \quad [\mathbf{J}, H] = 0, \quad [H, \mathbf{P}] = 0, \quad (2.235)$$

$$[H, \mathbf{K}] = c\mathbf{P}, \quad [\mathbf{P}, \mathbf{P}] = 0, \quad [\mathbf{K}, \mathbf{K}] = \mathbf{J}, \quad [\mathbf{K}, \mathbf{P}] = -H/c. \quad (2.236)$$

Si, como es habitual, llamamos $x^0 = ct$, $p^0 = H/c$, $p^i = P_i$, $K_i = J_{0i} = -J_{i0}$ y $J_k = -\frac{1}{2}\varepsilon_{klr}J_{lr}$, $x_\mu = \eta_{\mu\nu}x^\nu$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ y $\partial_\nu \equiv \partial/\partial x^\nu$, $\partial_\sigma x_\nu = \eta_{\nu\sigma}$, entonces,

$$p_\mu = \partial_\mu, \quad J_{\mu\nu} = -J_{\nu\mu} = x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu.$$

En notación covariante las reglas de conmutación aparecen como:

$$\begin{aligned} [p_\mu, p_\nu] &= 0, \\ [J_{\mu\nu}, p_\sigma] &= -\eta_{\mu\sigma}p_\nu + \eta_{\nu\sigma}p_\mu, \\ [J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] &= -\eta_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}J_{\mu\rho} + \eta_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}J_{\nu\rho}. \end{aligned}$$

El grupo de Poincaré tiene dos operadores de Casimir funcionalmente independientes. Uno se interpreta como el cuadrado de la masa del sistema,

$$p^\mu p_\mu = (H/c)^2 - \mathbf{P}^2 = m^2 c^2, \quad (2.237)$$

y el otro es el cuadrado del tetravector de Pauli-Lubanski, w^μ , definido mediante

$$w^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} p_\nu J_{\sigma\lambda} \equiv (\mathbf{P} \cdot \mathbf{J}, H\mathbf{J}/c - \mathbf{K} \times \mathbf{P}) \equiv (\mathbf{P} \cdot \mathbf{S}_{CM}, H\mathbf{S}_{CM}/c), \quad (2.238)$$

en términos de generadores que para la partícula libre serán constantes del movimiento, y el cual es por construcción ortogonal a p_μ , es decir, $w^\mu p_\mu = 0$.

Se relaciona con el espín con respecto al centro de masa \mathbf{S}_{CM} , a través de la relación:

$$\mathbf{S}_{CM} = \mathbf{J} - \mathbf{q} \times \mathbf{P}, \quad H\mathbf{S}_{CM}/c = H\mathbf{J}/c - \mathbf{K} \times \mathbf{P}, \quad (2.239)$$

habiendo reescrito $\mathbf{K} = H\mathbf{q}/c - \mathbf{P}t$, de manera que su componente temporal $w^0 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S}_{CM}$, representará la helicidad de la partícula, y la parte espacial es el vector (2.239). De esta forma, el otro operador de Casimir es

$$w^\mu w_\mu = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{J})^2 - (HJ/c - \mathbf{K} \times \mathbf{P})^2 = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{S}_{CM})^2 - H^2 \mathbf{S}_{CM}^2 / c^2 = -m^2 c^2 S^2, \quad (2.240)$$

el cual depende del valor S^2 , el valor absoluto al cuadrado del espín con respecto al centro de masa, y de la masa de la partícula. Vemos que en el caso relativista, los dos parámetros m y S son las propiedades intrínsecas de toda partícula elemental. En el caso cuántico, las representaciones deben ser irreducibles, y $S^2 = s(s+1)\hbar^2$, para todo $s = 0, 1/2, 1, \dots$, dependiendo del valor cuántico del espín de la partícula, pero en el caso clásico, el valor S^2 puede tomar cualquier valor.

Los operadores w^μ satisfacen las reglas de conmutación:

$$[w^\mu, w^\nu] = \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} w_\sigma p_\rho, \quad (2.241)$$

habiendo tomado el tensor $\epsilon^{0123} = +1$, y

$$[p^\mu, w^\nu] = 0, \quad [J_{\mu\nu}, w_\sigma] = -\eta_{\mu\sigma} w_\nu + \eta_{\nu\sigma} w_\mu. \quad (2.242)$$

El grupo de Poincaré no posee exponentes, de tal manera que las funciones gauge sobre sus espacios homogéneos son nulas. Las Lagrangianas de los sistemas mecánicos cuyos espacios cinemáticos sean espacios homogéneos de \mathcal{P} , pueden tomarse estrictamente invariantes.

2.9.1. Grupo de Lorentz

El grupo de Lorentz \mathcal{L} es el subgrupo de transformaciones de la forma: $(0, \mathbf{0}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\mu})$, y toda transformación de Lorentz $\Lambda(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu})$ se va a interpretar siempre en la forma $\Lambda(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) = L(\mathbf{v})R(\boldsymbol{\mu})$, como se ha mencionado anteriormente, donde $L(\mathbf{v})$ es un boost o transformación de Lorentz pura y $R(\boldsymbol{\mu})$ una rotación espacial. Las expresiones (2.231, 2.232) vienen de $\Lambda(\mathbf{v}'', \boldsymbol{\mu}'') = \Lambda(\mathbf{v}', \boldsymbol{\mu}')\Lambda(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu})$. La expresión (2.231) es la composición relativista de velocidades, ya que

$$\begin{aligned} L(\mathbf{v}'')R(\boldsymbol{\mu}'') &= L(\mathbf{v}')R(\boldsymbol{\mu}')L(\mathbf{v})R(\boldsymbol{\mu}) \\ &= L(\mathbf{v}') \{ R(\boldsymbol{\mu}')L(\mathbf{v})R(-\boldsymbol{\mu}') \} R(\boldsymbol{\mu}')R(\boldsymbol{\mu}), \end{aligned}$$

pero el conjugado de un boost de velocidad \mathbf{v} mediante una rotación $R(\boldsymbol{\mu}')L(\mathbf{v})R(-\boldsymbol{\mu}')$ = $L(R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{v})$ es otro boost de velocidad rotada $R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{v}$

$$L(\mathbf{v}'')R(\boldsymbol{\mu}'') = L(\mathbf{v}')L(R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{v})R(\boldsymbol{\mu}')R(\boldsymbol{\mu}).$$

El producto $L(\mathbf{v}')L(R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{v}) = L(\mathbf{v}'')R(\boldsymbol{\mu}'')$ donde \mathbf{v}'' es la composición relativista de las velocidades \mathbf{v}' y $R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{v}$, y $R(\boldsymbol{\mu}'')$ es la rotación de Thomas-Wigner asociada a los boosts $L(\mathbf{v}')$ y $L(R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{v})$.

Por lo tanto, la expresión (2.231) es equivalente a

$$L(\mathbf{v}'') = L(\mathbf{v}')L(R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{v})R(-\boldsymbol{\mu}''), \quad (2.243)$$

y (2.232) es

$$R(\boldsymbol{\mu}'') = R(\boldsymbol{\mu}'')R(\boldsymbol{\mu}')R(\boldsymbol{\mu}) \equiv R(\boldsymbol{\phi})R(\boldsymbol{\mu}). \quad (2.244)$$

La matriz de rotación de Thomas-Wigner, $R(\boldsymbol{\mu}'')$ es:

$$\begin{aligned} R(\boldsymbol{\mu}'')_{ij} &= \delta_{ij} + \frac{1}{1 + \gamma''} \left(\frac{\gamma'^2}{c^2} \left(\frac{1 - \gamma'}{1 + \gamma'} \right) v'_i v'_j + \frac{\gamma^2}{c^2} \left(\frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \right) R'_{ik} v_k R'_{jl} v_l \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma' \gamma}{c^2} (v'_i R'_{jk} v_k - v'_j R'_{ik} v_k) + \frac{2\gamma'^2 \gamma^2 (v'_k R'_{kl} v_l)}{(1 + \gamma')(1 + \gamma)c^2} v'_i R'_{jk} v_k \right), \end{aligned}$$

y el factor

$$\gamma'' = \gamma' \gamma \left(1 + \frac{\mathbf{v}' \cdot R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{v}}{c^2} \right).$$

La matriz $R(\boldsymbol{\mu}'')$ se escribe en términos del parámetro vectorial $\boldsymbol{\mu}'$, el cual es función de \mathbf{v}' , $\boldsymbol{\mu}'$ y \mathbf{v} , dada por

$$\boldsymbol{\mu}' = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{v}', \mathbf{0}, R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{v}, \mathbf{0})}{1 + G(\mathbf{v}', \mathbf{0}, R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{v}, \mathbf{0})}, \quad (2.245)$$

y el parámetro $\boldsymbol{\phi}$, tal que $R(\boldsymbol{\phi}) = R(\boldsymbol{\mu}'')R(\boldsymbol{\mu}')$ es

$$\boldsymbol{\phi} = \frac{\boldsymbol{\mu}' + \mathbf{F}(\mathbf{v}', \boldsymbol{\mu}', \mathbf{v}, \mathbf{0})}{1 + G(\mathbf{v}', \boldsymbol{\mu}', \mathbf{v}, \mathbf{0})}. \quad (2.246)$$

Si cualquiera de las dos velocidades \mathbf{v} o \mathbf{v}' se anulara, $R(\boldsymbol{\mu}'')_{ij} = \delta_{ij}$.

La ley de composición del grupo de Lorentz se obtiene del homomorfismo entre el grupo de Lorentz \mathcal{L} y el grupo $SL(2, \mathbb{C})$ de matrices 2×2 complejas, de determinante +1. El álgebra de Lie del grupo, posee por generadores $\mathbf{J} = -i\boldsymbol{\sigma}/2$ and $\mathbf{K} = \boldsymbol{\sigma}/2$, donde σ_i son las matrices de Pauli, que satisfacen:

$$[\mathbf{J}, \mathbf{J}] = -\mathbf{J}, \quad [\mathbf{J}, \mathbf{K}] = -\mathbf{K}, \quad [\mathbf{K}, \mathbf{K}] = \mathbf{J}.$$

Una rotación de ángulo α alrededor de un eje caracterizado por el vector unidad \mathbf{n} está dada por la matriz unitaria 2×2 , $\exp(\alpha \cdot \mathbf{J})$,

$$R(\alpha) = \cos(\alpha/2)\sigma_0 - i\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin(\alpha/2). \quad (2.247)$$

En términos del vector $\boldsymbol{\mu} = \tan(\alpha/2)\mathbf{n}$,

$$R(\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{\sqrt{1 + \boldsymbol{\mu}^2}}(\sigma_0 - i\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad (2.248)$$

donde σ_0 es la matriz unidad 2×2 .

Una transformación de Lorentz pura de parámetros normales β_i , se representa por la matriz hermitica $\exp(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{K})$. Esta matriz es:

$$L(\boldsymbol{\beta}) = \cosh(\beta/2)\sigma_0 + \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\beta}}{\beta} \sinh(\beta/2). \quad (2.249)$$

En términos del parámetro velocidad, teniendo en cuenta las relaciones entre ambos $\cosh \beta = \gamma(v)$, $\sinh \beta = \gamma v/c$ y las relaciones trigonométricas $\cosh(\beta/2) = \sqrt{(\cosh \beta + 1)/2}$ y $\tanh(\beta/2) = \sinh \beta / (1 + \cosh \beta)$, la matriz se puede reescribir como

$$L(\mathbf{v}) = \sqrt{\frac{1 + \gamma}{2}} \left(\sigma_0 + \frac{\gamma}{1 + \gamma} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}}{c} \right). \quad (2.250)$$

Así, todo elemento de $SL(2, \mathbb{C})$ queda parametrizado por seis números reales $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu})$, y lo interpretamos en la forma

$$A(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) = L(\mathbf{v})R(\boldsymbol{\mu}). \quad (2.251)$$

Toda matriz compleja 2×2 de determinante unidad, $A \in SL(2, \mathbb{C})$ puede ser escrita en términos de un tetravector complejo a^μ y de las cuatro matrices de Pauli σ_μ . Si ponemos $A = a^\mu \sigma_\mu$, como $\det A = 1$ nos lleva a $a^\mu a_\mu = 1$ o $(a^0)^2 - \mathbf{a}^2 = 1$. La forma general de (2.251) es

$$A(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) = \sqrt{\frac{1 + \gamma}{2(1 + \boldsymbol{\mu}^2)}} \left[\sigma_0 \left(1 - i \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{u}}{1 + \gamma} \right) + \boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\frac{\mathbf{u} + \mathbf{u} \times \boldsymbol{\mu}}{1 + \gamma} - i\boldsymbol{\mu} \right) \right], \quad (2.252)$$

done el vector adimensional $\mathbf{u} = \gamma(v)\mathbf{v}/c$.

Recíprocamente, como $\text{Tr}(\sigma_\mu \sigma_\nu) = 2\delta_{\mu\nu}$, obtenemos $a^\mu = (1/2)\text{Tr}(A\sigma_\mu)$. Si expresamos (2.252) en la forma $A(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) = a^\mu \sigma_\mu$ podemos determinar $\boldsymbol{\mu}$ y \mathbf{v} , y por lo tanto \mathbf{u} , a partir de las componentes del tetravector complejo a^μ como:

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{\text{Im}(\mathbf{a})}{\text{Re}(a^0)}, \quad (2.253)$$

$$\mathbf{u} = 2 \left[\text{Re}(a^0)\text{Re}(\mathbf{a}) + \text{Im}(a^0)\text{Im}(\mathbf{a}) + \text{Re}(\mathbf{a}) \times \text{Im}(\mathbf{a}) \right], \quad (2.254)$$

done $\text{Re}(a^\mu)$ y $\text{Im}(a^\mu)$ son la parte real e imaginaria de las correspondientes componentes del tetravector a^μ . Cuando $\text{Re}(a^0) = 0$ la expresión (2.253) está definida y representa una rotación de valor π alrededor de un eje en la dirección del vector $\text{Im}(\mathbf{a})$.

Si representamos toda transformación de Lorentz en términos de un boost seguido de una rotación, es decir en la forma contraria, $\Lambda(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) = R(\boldsymbol{\mu})L(\mathbf{v})$, entonces la expresión general de A es la misma que en (2.252) pero con un cambio de signo en el producto vectorial $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\mu}$. Por lo tanto, la descomposición es también única. La rotación $R(\boldsymbol{\mu})$ es la misma que antes pero el boost viene expresado en términos de las variables a^μ por

$$\mathbf{u} = 2 \left[\text{Re}(a^0)\text{Re}(\mathbf{a}) + \text{Im}(a^0)\text{Im}(\mathbf{a}) + \text{Im}(\mathbf{a}) \times \text{Re}(\mathbf{a}) \right].$$

Obsérvese la diferencia en el tercer término el cual es el opuesto cuando se compara con (2.254).

En la representación matricial 4×4 del grupo de Lorentz sobre el espacio-tiempo de Minkowski, un boost se expresa como $L(\boldsymbol{\beta}) = \exp(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{K})$ en términos de los parámetros normales y adimensionales β_i y de los generadores de los boosts K_i , dados por las matrices 4×4 ,

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si llamamos $B = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{K} \equiv \sum_i \beta_i K_i$, tenemos

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} \beta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1\beta_1 & \beta_1\beta_2 & \beta_1\beta_3 \\ 0 & \beta_2\beta_1 & \beta_2\beta_2 & \beta_2\beta_3 \\ 0 & \beta_3\beta_1 & \beta_3\beta_2 & \beta_3\beta_3 \end{pmatrix},$$

con $\beta^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2$ y $B^3 = \beta^2 B$, de tal manera que las demás potencias de B se pueden expresar en términos de éstas, obtenemos que la expresión final de $L(\boldsymbol{\beta}) = \exp(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{K})$ es

$$\exp(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{K}) = \exp(B) = \mathbb{I} + \frac{1}{1!}B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \dots = \mathbb{I} + \frac{1}{1!}B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}\beta^2 B + \frac{1}{4!}\beta^2 B^2 + \dots$$

que sumando componente a componente, converge a

$$\begin{pmatrix} C & (\beta_1/\beta)S & (\beta_2/\beta)S & (\beta_3/\beta)S \\ (\beta_1/\beta)S & 1 + \frac{\beta_1\beta_1}{\beta^2}(C-1) & \frac{\beta_1\beta_2}{\beta^2}(C-1) & \frac{\beta_1\beta_3}{\beta^2}(C-1) \\ (\beta_2/\beta)S & \frac{\beta_2\beta_1}{\beta^2}(C-1) & 1 + \frac{\beta_2\beta_2}{\beta^2}(C-1) & \frac{\beta_2\beta_3}{\beta^2}(C-1) \\ (\beta_3/\beta)S & \frac{\beta_3\beta_1}{\beta^2}(C-1) & \frac{\beta_3\beta_2}{\beta^2}(C-1) & 1 + \frac{\beta_3\beta_3}{\beta^2}(C-1) \end{pmatrix}$$

donde se ha abreviado $S = \sinh \beta$ y $C = \cosh \beta$.

¿Cuál es el significado físico de los parámetros normales β_i ? Supongamos dos observadores O y O' que relacionan sus medidas espacios-temporales x y x' mediante $x'^{\mu} = L(\boldsymbol{\beta})^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$. El observador O emite en el instante t y en el instante posterior $t + dt$ dos señales luminosas desde el origen de su sistema cartesiano de referencia. Estas dos señales medidas por O' tienen lugar en los puntos \mathbf{r}' y $\mathbf{r}' + d\mathbf{r}'$ y en los instantes t' y $t' + dt'$, respectivamente. Están dadas por

$$cdt' = L^0_0 cdt, \quad dx'^i = L^i_0 cdt$$

ya que para O , $dx^i = 0$. El cociente dx'^i/dt' es precisamente la velocidad de la fuente emisora v^i , es decir la velocidad del origen del sistema de referencia de O medido por O' . Esta velocidad es $v^i = cL^i_0/L^0_0 = c(\beta_i/\beta)S/C$, de tal manera que la relación entre los parámetros normales y las componentes de la velocidad relativa entre observadores es

$$\frac{\mathbf{v}}{c} = \frac{\boldsymbol{\beta}}{\beta} \tanh \beta$$

por lo que $\tanh \beta = v/c$. La función $\cosh \beta \equiv \gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ y cuando la transformación la expresamos en términos del parámetro velocidad toma la forma de la matriz simétrica

$$L(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v_x/c & \gamma v_y/c & \gamma v_z/c \\ \gamma v_x/c & 1 + \frac{v_x^2}{c^2} \frac{\gamma^2}{\gamma+1} & \frac{v_x v_y}{c^2} \frac{\gamma^2}{\gamma+1} & \frac{v_x v_z}{c^2} \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \\ \gamma v_y/c & \frac{v_y v_x}{c^2} \frac{\gamma^2}{\gamma+1} & 1 + \frac{v_y^2}{c^2} \frac{\gamma^2}{\gamma+1} & \frac{v_y v_z}{c^2} \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \\ \gamma v_z/c & \frac{v_z v_x}{c^2} \frac{\gamma^2}{\gamma+1} & \frac{v_z v_y}{c^2} \frac{\gamma^2}{\gamma+1} & 1 + \frac{v_z^2}{c^2} \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \end{pmatrix}. \quad (2.255)$$

La transformación inversa es $L^{-1}(\mathbf{v}) = L(-\mathbf{v})$. Una matriz de rotación en la forma 4×4 aparece escrita por bloques como

$$R(\boldsymbol{\mu}) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{R}(\boldsymbol{\mu}) \end{pmatrix}, \quad (2.256)$$

donde $\tilde{R}(\boldsymbol{\mu})$ es la matriz ortogonal 3×3 dada en (2.208). Cuando la transformación general de Lorentz se expresa en la forma $\Lambda(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) = L(\mathbf{v})R(\boldsymbol{\mu})$, entonces por construcción, la primera columna de $\Lambda(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu})$ es precisamente la primera columna de (2.255) donde están definidos los parámetros de velocidad \mathbf{v} . Por lo tanto, a partir de una transformación de Lorentz general $\Lambda(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu})$, su primera columna nos suministra los valores de los parámetros \mathbf{v} y se puede construir la transformación $L(\mathbf{v})$. Para calcular la rotación que está contenida en ella, basta hacer $L(-\mathbf{v})\Lambda(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) = R(\boldsymbol{\mu})$. Si se expresase en sentido contrario $\Lambda(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) = R(\boldsymbol{\mu})L(\mathbf{v})$, entonces es la primera fila de Λ la que coincide con la primera fila de (2.255). En este caso cualquier transformación general de Lorentz $\Lambda(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu})$, se puede siempre escribir de forma única mediante las dos expresiones $\Lambda(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) = L(\mathbf{v})R(\boldsymbol{\mu}) = R(\boldsymbol{\mu})L(\mathbf{v}')$ donde la rotación es la misma en ambos términos (2.253) y $L(\mathbf{v}') = R(-\boldsymbol{\mu})L(\mathbf{v})R(\boldsymbol{\mu}) = L(R(-\boldsymbol{\mu})\mathbf{v})$, es decir, la velocidad $\mathbf{v}' = R(-\boldsymbol{\mu})\mathbf{v}$ es la rotada de la \mathbf{v} .

La matriz Λ puede ser considerada como una tetrada, es decir, un conjunto de cuatro travectores ortonormales, uno de ellos de carácter temporal (de norma +1) y los otros tres de carácter espacial (de norma -1) asociados al observador inercial O por el observador O' . De hecho, si la transformación la consideramos compuesta en la forma $\Lambda(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) = L(\mathbf{v})R(\boldsymbol{\mu})$, entonces la primera columna de Λ es precisamente la tetravelocidad del origen del sistema cartesiano de O y las otras tres columnas son los tres vectores unidad del sistema de referencia de O , rotados con la rotación $R(\boldsymbol{\mu})$ y luego 'boosteados' con la matriz $L(\mathbf{v})$.

2.10. Apéndice: Estados de polarización de la luz

Sea un sistema cuántico cuyo espacio de Hilbert de estados puros es el espacio bidimensional \mathbb{C}^2 . Por lo tanto cualquier estado puro viene descrito por el conocimiento de un vector $|\Phi\rangle \in \mathbb{C}^2$ de norma unidad, $\langle \Phi|\Phi\rangle = 1$. Los estados no puros, o mezclas estocásticas, vendrán caracterizados por operadores densidad ρ , es decir operadores autoadjuntos sobre \mathbb{C}^2 de traza uno y por lo tanto se caracterizarán mediante matrices hermiticas 2×2 de traza unidad.

El conjunto de matrices hermiticas 2×2 es un espacio vectorial real de cuatro dimensiones, una base del mismo puede venir dada por las cuatro matrices:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.257)$$

por lo que toda matriz hermitica se puede expresar en la forma $\rho = a^\mu \sigma_\mu$ con $a^\mu \in \mathbb{R}$, cuatro números reales. La condición de que ρ caracterice a un estado es que sea de traza uno, lo que nos lleva a que $a^0 = 1/2$. Si ρ es un estado puro, también denominado estado vectorial, entonces $\rho = |\Phi\rangle\langle\Phi|$ en términos del vector estado $|\Phi\rangle$, por lo que resulta ser un proyector. Los estados puros vienen caracterizados por la condición de que $\rho^2 = \rho$, de donde resulta que $\text{Tr}\rho^2 = \text{Tr}\rho = 1$, en tanto que en general para un estado arbitrario la $\text{Tr}\rho^2 \leq \text{Tr}\rho = 1$.

Esta condición, teniendo presente que $\text{Tr}\sigma_\mu\sigma_\nu = 2\delta_{\mu\nu}$, nos lleva a que $2(a^0)^2 + 2\mathbf{a}^2 \leq 1$, y como $a^0 = 1/2$, $\mathbf{a}^2 \leq 1/4$, por lo que podemos caracterizar todo estado cuántico de este sistema mediante un vector tridimensional real \mathbf{a} , de norma igual o menor que $1/2$, siendo igual a $1/2$ en el caso de que el estado sea puro. Los estados de este sistema vendrán dados por los puntos de una esfera en \mathbb{R}^3 de radio $1/2$, denominada esfera de Poincaré, siendo los puntos de la superficie los estados puros, en tanto que los del interior representan a los estados mezcla. Vemos que el conjunto de estados es un conjunto convexo, de tal manera que todo estado mezcla se puede construir como una combinación lineal convexa de estados puros.

Este tipo de descripción puede formar parte, por ejemplo de un sistema cuántico que describa fotones polarizados, cuyo espacio de Hilbert lo podemos realizar como $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$, donde los dos posibles estados de polarización vienen descritos por la parte \mathbb{C}^2 del espacio de Hilbert. Supongamos que en el instante t tenemos dado el vector $|\Psi\rangle$:

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \exp(i(kz - \omega t)) \quad (2.258)$$

donde α y β son dos complejos tales que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, el cual es vector propio del operador $H = i\hbar\partial/\partial t$ con valor propio $\hbar\omega$, y del operador $\mathbf{P} = -i\hbar\nabla$ con valor propio $(0, 0, \hbar k)$. Si escribimos $\alpha = a \exp(i\delta_a)$ y $\beta = b \exp(i\delta_b)$ y convenimos en representar el estado de tal manera que saquemos fuera la fase de la primera componente, para que ésta sea real, entonces,

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \exp(i(kz - \omega t)) = \begin{pmatrix} a \\ be^{i\delta} \end{pmatrix} \exp(i(kz - \omega t + \delta_a)) \quad (2.259)$$

siendo $\delta = \delta_b - \delta_a$.

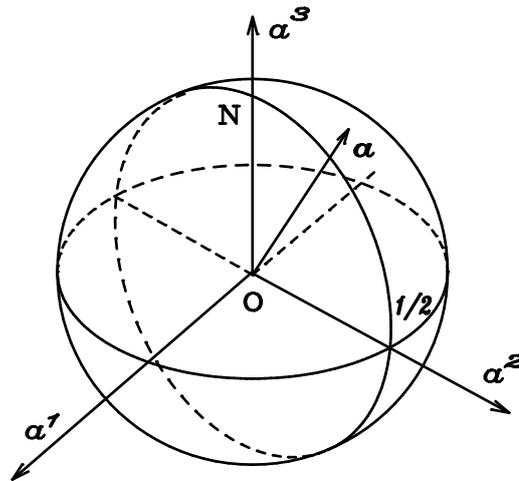
El proyector que caracteriza este estado es el $|\Psi\rangle\langle\Psi|$ que viene dado en la forma:

$$|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} a^2 & abe^{-i\delta} \\ abe^{i\delta} & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^0 + a^3 & a^1 - ia^2 \\ a^1 + ia^2 & a^0 - a^3 \end{pmatrix} \quad (2.260)$$

por lo que el tetravector a que da lugar es el:

$$[1/2, ab \cos \delta, ab \sin \delta, (a^2 - b^2)/2] \quad (2.261)$$

y en términos del vector \mathbf{a} , los diferentes estados puros vienen dados por la superficie de la esfera de radio $1/2$ de la figura, en tanto que los puntos del interior representan estados mezcla.



En particular los estados ortogonales $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan lugar a sendos operadores de proyección $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ los cuales vienen caracterizados por los vectores \mathbf{a} y $-\mathbf{a}$, siendo $\mathbf{a} \equiv (0, 0, 1/2)$, es decir por los dos polos de la esfera de Poincaré.

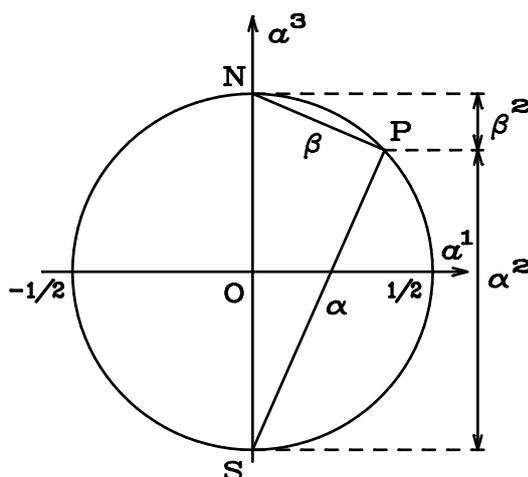
Si E_a y E_b son dos proyectores caracterizados por sendos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} y representan estados ortogonales, entonces $E_a E_b = 0$. En términos de las matrices de Pauli $E_a E_b = a^\mu b^\nu \sigma_\mu \sigma_\nu = 0$, y tomando trazas, sabiendo que $a^0 = b^0 = 1/2$, nos queda $(1/4 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = 0$, y que como \mathbf{a} y \mathbf{b} son a su vez de módulo $1/2$, la solución es $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$. Estados ortogonales vienen dados por puntos opuestos de la esfera de estados, y tomados por pares caracterizan por lo tanto a todas las posibles bases ortonormales de \mathbb{C}^2 . Significa esto que cualquier otro estado puro se obtendrá como superposición coherente de dos de estos estados ortogonales, y que cualquier otro estado no puro, mediante combinaciones lineales convexas de estados puros.

2.10.1. Superposición coherente

Si tenemos dos estados puros, y por lo tanto vectoriales, $|\Phi\rangle$ y $|\Psi\rangle$, el vector $\alpha|\Phi\rangle + \beta|\Psi\rangle$ una vez normalizado, representará otro estado puro y se dice que es la superposición coherente de ambos. En este caso lo que admitimos es que la fase relativa con que se superponen ambos estados es importante.

Supongamos por sencillez que nos estamos refiriendo básicamente a los dos estados polares $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(i(kz - \omega t))$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(i(kz - \omega t))$, y que α y β los tomamos en principio reales con $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Entonces el vector estado a que dan lugar es el $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \exp(i(kz - \omega t))$ y como proyector el $\begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{pmatrix}$ que viene representado en la esfera por el vector $[\alpha\beta, 0, (\alpha^2 - \beta^2)/2]$ y por lo tanto en el meridiano que está en el plano XOZ por el punto representado en la figura siendo $NP = \beta$ y $PS = \alpha$.

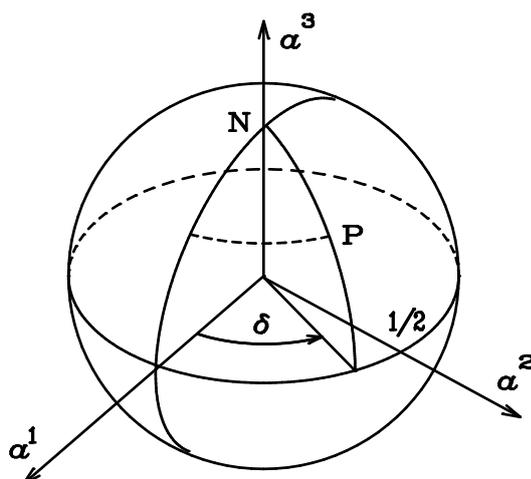
En efecto, $a^3 = (\alpha^2 - \beta^2)/2 = 1/2 - \beta^2 = \alpha^2 - 1/2$, y por lo tanto las distancias del punto P a los planos tangentes a los polos son iguales a β^2 y α^2 respectivamente. Si $\alpha = \beta$, el punto representativo estará sobre el ecuador. Estos valores α^2 y β^2 son las probabilidades de que el estado sea el N o el S , o bien las proporciones que de los estados N y S utilizamos para construir



su superposición.

Si α y β son en general complejos, una vez extraída la fase de α , que lo supondremos en adelante real, el estado se reduce a (2.260) y (2.261), con lo que aquella superposición coherente con los mismos a y b y diferentes δ , nos produce todos los puntos de un mismo paralelo. Además δ es el ángulo acimutal y el giro es en el sentido positivo (horario) alrededor de un eje que va del segundo estado al primero.

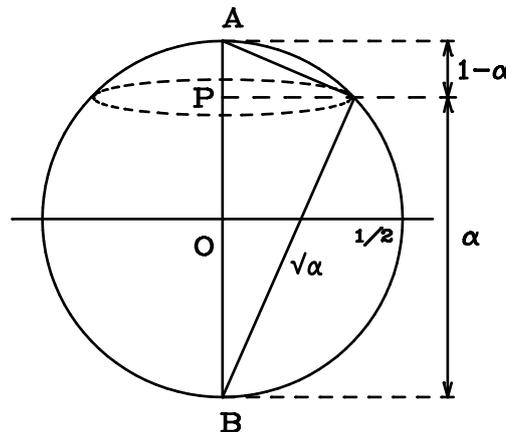
La situación es totalmente simétrica si la superposición la efectuamos a partir de dos estados arbitrarios ortogonales. Tenemos sobre la esfera dos puntos opuestos. A continuación determinamos la superposición con $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$, la cual nos determina la posición del meridiano cero. A partir de ahí giraremos en sentido positivo el ángulo δ , y el paralelo correspondiente dependerá de los valores a y b .



Por lo tanto la superposición coherente es una aplicación definida sobre la superficie de la esfera, tal que a cada par de puntos opuestos, y dados los correspondientes números a y $b e^{i\delta}$, les corresponde otro punto de la superficie, construido de la forma anteriormente señalada.

2.10.2. Superposición incoherente

Sean $|\Phi_1\rangle$ y $|\Phi_2\rangle$ dos estados puros ortogonales, caracterizados por los proyectores E_1 y E_2 , y por los vectores reales \mathbf{a} y $-\mathbf{a}$. Si definimos el estado $\rho = \alpha E_1 + (1 - \alpha)E_2$, con $0 < \alpha < 1$, representa una superposición que decimos es incoherente, de ambos estados en las proporciones α y $1 - \alpha$. En esta representación, el vector que lo caracteriza es el $\alpha\mathbf{a} - (1 - \alpha)\mathbf{a} = (2\alpha - 1)\mathbf{a}$. El punto característico está por lo tanto en la línea de unión de los dos estados puros, de tal forma que $PA = (1 - \alpha)$ y $PB = \alpha$. Es por lo tanto el centro de masa de dos masas α y $(1 - \alpha)$ situadas en A y B respectivamente.



Podemos interpretar la superposición incoherente como el centro de masa de todas las posibles superposiciones coherentes en las mismas proporciones de A y B , en las que la fase relativa δ se deja libre. En este caso obtendríamos todos los posibles estados del paralelo que dista de los planos polares $(1 - \alpha)$ y α respectivamente.

Si $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$ son k estados puros, y por lo tanto representados por sendos puntos de la superficie de la esfera de estados, y $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, $0 \leq \alpha_i \leq 1$ tal que $\sum \alpha_i = 1$, entonces $\rho = \sum \alpha_i \rho_i$ se dice que es la mezcla incoherente, con pesos α_i de los k estados puros ρ_i . Su punto representativo vendrá dado por el baricentro de los correspondientes puntos ρ_i en los que se ha supuesto colocado un peso de valor α_i . Los estados puros son los únicos que no pueden expresarse como combinación lineal convexa de otros estados puros.

La superposición incoherente se convierte así en la combinación lineal convexa de vectores de \mathbb{R}^3 , pertenecientes a la esfera de radio $1/2$.

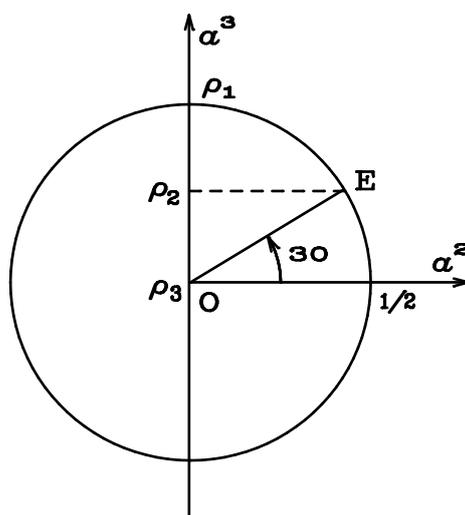
2.10.3. Filtros

Son observables tales que si el sistema está en un estado lo proyectan en uno posible de los estados puros correspondientes. En general vienen representados por proyectores y se caracterizarán por el proyector correspondiente sobre el estado que filtran. Si el estado inicial del sistema es ρ , entonces la medida de E sobre ρ viene dada por $\langle E \rangle = \text{Tr} \rho E$, en tanto que el nuevo estado que se produce después de la medida, es el $\rho' = E \rho E / \text{Tr}(\rho E)$. Por ejemplo supongamos que $\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y sea E el proyector sobre el estado dado por el vector \mathbf{a} de componentes $[0, \sqrt{3}/4, 1/4]$, es decir $E = \begin{pmatrix} 3/4 & -\sqrt{3}i/4 \\ \sqrt{3}i/4 & 1/4 \end{pmatrix}$. El valor esperado de E vale $3/4$,

que es precisamente la proporción en que el estado E se compone a partir de ρ_1 y de su estado ortogonal. Después de su medida, el estado en que queda el sistema es:

$$\rho' = E\rho_1 E / \text{Tr}(\rho_1 E) = (4/3)E\rho_1 E = \begin{pmatrix} 3/4 & -\sqrt{3}i/4 \\ \sqrt{3}i/4 & 1/4 \end{pmatrix} = E$$

es decir el propio E .



Desde el punto de vista vectorial por ser el estado puro, $|\rho_1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ por lo que el valor esperado $\langle E; \rho_1 \rangle = \langle \rho_1 | E \rho_1 \rangle = 3/4$ y el estado final del sistema será el $|\rho'_1\rangle = E|\rho_1\rangle / \|E|\rho_1\rangle\| = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ i/2 \end{pmatrix}$ que resulta ser precisamente el propio estado E , pues $|\rho'_1\rangle \langle \rho'_1| = E$.

Si el estado inicial no es puro, por ejemplo $\rho_2 = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$, que corresponde a una superposición incoherente de $3/4$ del ρ_1 anterior y $1/4$ de su complementario ortogonal, entonces $\langle E; \rho_2 \rangle = \text{Tr} \rho_2 E = 5/8$, es decir aquella parte de ρ_2 que se proyecta en E , y el estado final ρ'_2 resulta ser el propio estado E .

Si el estado inicial es un estado totalmente incoherente, como el dado por el operador densidad $\rho_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, entonces $\langle E; \rho_3 \rangle = 1/2$, ya que dicho estado incoherente también se puede formar a partir de E y de su complementario ortogonal al 50 %.

Capítulo 3

Cuantización de los modelos

La cuantización de los sistemas Lagrangianos generalizados conduce a que las funciones de onda que describen los estados cuánticos de cualquier sistema mecánico y en particular de las partículas elementales, deben ser funciones complejas, de cuadrado integrable, $\Phi(x)$, definidas sobre el espacio cinemático X .

Vamos a usar el método de Feynman de cuantización, para encontrar cómo es la función de onda de una partícula elemental y ver cómo transforma bajo el grupo cinemático. Una vez que hayamos encontrado cómo es el espacio de Hilbert de los estados puros, encontraremos cómo se representan los generadores de las transformaciones cinemáticas, como operadores autoadjuntos. El resto del análisis se realiza por los medios habituales de la mecánica cuántica, es decir, clasificando los estados mediante la correspondiente elección del adecuado conjunto completo de observables que conmutan. Haremos especial énfasis en la estructura del operador de espín, que aparece como un operador diferencial que deriva a la función de onda con respecto a las variables cinemáticas compactas. Su estructura cuántica nos recuerda a su estructura clásica, por lo que podremos plantear una especie de ‘receta’ de correspondencia, entre los observables clásicos y cuánticos.

La estructura del espín depende de las variables cinemáticas y de cómo éstas transforman bajo rotaciones. Puesto que estas variables son la velocidad \mathbf{u} y la orientación $\boldsymbol{\alpha}$, tanto en el caso relativista como en el no relativista, la estructura del operador espín es la misma en ambos formalismos. En realidad, el operador espín depende solamente de la parte compacta de la variable velocidad \mathbf{u} , que es su dirección, dada por los dos ángulos cenital θ y acimutal ϕ , y sobre las tres variables que caracterizan a la orientación del sistema cartesiano local asociado al punto, por lo que serán operadores diferenciales con respecto a estas cinco variables angulares.

La aparición de espines semienteros depende de que el operador espín contenga operadores de derivación con respecto a las variables de orientación. La razón es que cuando los operadores de momento angular actúan sobre una variedad de dimensión dos, como es la superficie de la esfera unidad, no obtenemos todas las representaciones del grupo de rotaciones sino solamente las correspondientes a los valores enteros. En este caso los vectores propios se reducen a los armónicos esféricos. Es necesario que el grupo de rotaciones actúe sobre sí mismo, como variedad tridimensional, para obtener todas las representaciones finitas, incluidas las de espín semientero.

Los modelos clásicos que poseen entre sus variables cinemáticas la velocidad \mathbf{u} y la orientación $\boldsymbol{\alpha}$, tienen la peculiaridad de que su centro de masa y su centro de carga son puntos diferentes. Las propiedades magnéticas están relacionadas con la corriente, es decir con el movimiento de la carga y por lo tanto con la parte del momento angular debido al *zitterbewegung*. Es la existencia de otro momento angular no ligado con el momento magnético, el que nos va a producir el concepto de relación giromagnética.

La ecuación de Dirac la vamos a obtener al cuantizar el sistema clásico relativista, en el que la carga se mueve en círculos a la velocidad de la luz alrededor de su centro de masa. En

este caso, los operadores que caracterizan a su orientación, completamente reproducen todo el álgebra de observables internos, todo el álgebra de Dirac.

3.1. Cuantización Feynman de los sistemas Lagrangianos

Consideremos un sistema Lagrangiano generalizado, del tipo de los descritos en los capítulos anteriores, cuya evolución tiene lugar entre los puntos x_1 y x_2 de su espacio cinemático.

La formulación variacional requiere que conozcamos con precisión estos valores extremos, y la solución particular de las ecuaciones de Euler-Lagrange que pasa por ellos nos singulariza la evolución del sistema. Pero si de forma experimental es imposible obtener la descripción precisa de estos estados, dado que medir significa interaccionar y cuando medimos alguna propiedad de un sistema algunas otras aumentan su incertidumbre, esto da lugar a que en realidad no conocemos con precisión x_1 , sino un conjunto de posibles estados iniciales, alrededor de x_1 , con una cierta probabilidad. Lo mismo con respecto a x_2 , por lo que intentar encontrar el camino que describe el sistema es equivalente a discernir de entre todos los caminos que unen los puntos de la región inicial \mathcal{R}_1 con la región final \mathcal{R}_2 . Lo que tenemos es una especie de tubo o camino *grueso* que une ambas regiones dentro del cual es imposible discernir un camino específico. La formulación variacional debe ser abandonada por una teoría que nos prediga con qué probabilidad, si el sistema se encuentra inicialmente en \mathcal{R}_1 , llegará a \mathcal{R}_2 .

Para cuantizar este tipo de sistemas Lagrangianos generalizados, seguiremos el método de cuantización de Feynman, de integrales sobre todos los caminos ¹. El principio de cuantización de Feynman consiste en que frente a la idea clásica de que dados los puntos extremos x_1 y x_2 , la trayectoria clásica entre ellos es el camino que hace extremal a la acción, como desde el punto de vista cuántico no es posible medir qué camino sigue realmente el sistema, entonces todas las trayectorias $x(\tau)$ entre ambos puntos, son posibles. Además van a ser todas ellas igualmente probables. Se trata por lo tanto de definir una probabilidad $P[x(\tau)]$, para cada posible camino. El principio variacional ya no funciona y es sustituido por un principio de cuantización que admite que todas las trayectorias son equiprobables.

Esta probabilidad se va a definir como el valor absoluto al cuadrado de un número complejo $\phi[x(\tau)]$ asociado a cada camino, llamado **amplitud de probabilidad**. De esta forma

$$P[x(\tau)] = |\phi[x(\tau)]|^2, \quad \forall x(\tau), \quad 0 \leq P[x(\tau)] \leq 1.$$

Si todos los caminos son igualmente probables, entonces estos complejos $\phi[x(\tau)]$, son todos del mismo valor absoluto distinguiéndose unos de otros solamente en su fase. La virtud de Feynman es cómo define esa fase. Esta fase va a ser el valor de la acción del sistema entre los puntos x_1 y x_2 , en unidades de \hbar , a lo largo del correspondiente camino $x(\tau)$, es decir,

$$\phi[x(\tau)] = N \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{L}(x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau \right\} = N \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} A_{[x]}(x_1, x_2) \right\}, \quad (3.1)$$

siendo N un factor constante de normalización, el mismo para todos los caminos. La fase es la acción a lo largo de ese camino, $A_{[x]}(x_1, x_2)$, dividida por \hbar . La amplitud de probabilidad $\phi[x(\tau)]$ es un funcional sobre todos los caminos posibles, y por eso, la representamos con paréntesis cuadrados, pero que una vez realizada la integral (3.1) en vez de ser un número complejo es una función compleja de las variables extremas x_1 y x_2 .

En este método estadístico de Feynman, la existencia de alternativas o caminos independientes no produce la suma de las correspondientes probabilidades. Este tipo de estadística la vamos a denominar **estadística interfiriente**. La probabilidad de un proceso completo en el que existen varias alternativas independientes, se determina calculando primero la amplitud de

¹ R.P. Feynman and A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, MacGraw Hill, NY (1965), p. 36.

probabilidad de todo el proceso sumando las amplitudes de probabilidad de las alternativas, y después tomando su valor absoluto al cuadrado. Esto produce el efecto de que el valor absoluto de una suma de números complejos puede ser menor que el valor absoluto de cualquiera de ellos, por lo que se puede dar la situación de que la suma de procesos alternativos puede producir una probabilidad nula para el proceso global. Se ha producido una *interferencia*. La mecánica cuántica, según Feynman, es una teoría estadística de tipo interfiriente.

La amplitud de probabilidad total de que el sistema llegue al punto x_2 saliendo de x_1 , lo que se denomina el Kernel de Feynman $K(x_1, x_2)$, se obtendrá como la suma, o más bien la integración sobre todos los caminos posibles, de términos de la forma (3.1). Feynman lo escribe como

$$K(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \phi[x(\tau)] \mathcal{D}(x(\tau)),$$

donde por $\mathcal{D}(x(\tau))$ quiere indicar una medida sobre la clase de caminos que unen x_1 con x_2 .

El kernel de Feynman $K(x_1, x_2)$, será en general una función compleja definida sobre la variedad $X \times X$. Más propiamente es una **función generalizada** o **distribución**, debido a la forma especial de construirla sumando o integrando sobre una infinidad de caminos. Si pudiéramos a su vez sumar (o integrar) diferentes kérneles $K(x_1, x)$, todos ellos con el mismo punto final x , pero diferentes puntos iniciales x_1 , lo que obtendríamos es la amplitud de probabilidad de que nuestro sistema mecánico estuviera en x , proveniente de algunos puntos iniciales, pero desconocidos, es decir, la interpretación habitual de la función de onda $\Phi(x)$ de dicho sistema al ser cuantizado. Las diferentes funciones de onda o **estados**, se obtendrían de las diferentes formas de sumar los kérneles de Feynman sobre todas las posibilidades de sus puntos iniciales y de los correspondientes caminos de llegada.

Por este razonamiento, llegamos a la conclusión de que al cuantizar por el método de Feynman cualquier sistema Lagrangiano, los estados cuánticos del mismo quedan descritos por funciones complejas de las variables cinemáticas, y de cuadrado integrable. Solamente funciones de las variables cinemáticas y no de otras variables ni siquiera del espacio de configuración, del espacio de fase o del espacio de configuración ampliado. El espacio de Hilbert de los estados es el espacio $\mathbb{L}^2(X)$. Lo que el formalismo no fija es cómo es la medida sobre X , para realizar las integraciones.

Vemos que el método de Feynman realiza el papel de las variables cinemáticas para caracterizar el estado cuántico del sistema, frente a otras variedades, como por ejemplo la de los grados de libertad independientes. Consideramos que es ésta una de las razones del por qué las variables cinemáticas debían jugar también un papel crucial en la formulación clásica. Queda así justificado el que la definición de partícula clásica se haya hecho dotando de propiedades exclusivas al espacio cinemático, haciendo que sea un espacio homogéneo del grupo cinemático.

En mecánica cuántica estamos acostumbrados a que la función de onda $\Phi(x)$, en vez de ser una sola función compleja, sea una función multicomponente, es decir un conjunto de n funciones complejas de las variables t y \mathbf{r} , $\psi_i(t, \mathbf{r})$, $i = 1, \dots, n$ formando una especie de vector columna, que puede ser considerado como un objeto de un espacio de Hilbert n -dimensional. En general, esta descomposición finita en componentes, transforma con una representación irreducible del grupo de rotaciones, con lo que cada una de las componentes ψ_i hace referencia a una posible orientación del espín. La cuantización a lo Feynman hace que nuestra función de onda $\Phi(x)$, sea solamente una función, pero del conjunto de variables cinemáticas, es decir de más variables que tiempo y posición. Una vez que definamos el conjunto completo de observables que conmutan, al encontrar una base del espacio de Hilbert de los estados, nos va a permitir buscar funciones en variables separadas, de tal manera que $\Phi(x)$ se va a poder escribir en términos de una parte espacio temporal $\phi(t, \mathbf{r})$, dependiente de las variables t y \mathbf{r} , y de otra parte χ , que va a depender del resto de las variables cinemáticas, invariantes por traslación. Diremos que la función de onda ha quedado descompuesta en su parte espacio-temporal ϕ y en su parte interna

χ . Es esta descomposición la que va a dar lugar a la aparición de las diferentes componentes de la función de onda. En el caso de las partículas elementales, las variables adicionales van a ser la velocidad \mathbf{u} y la orientación $\boldsymbol{\alpha}$, y los operadores de espín van a derivar con respecto a estas variables.

3.1.1. Transformación de la función de onda

Para calcular cómo transforma la función de onda entre observadores inerciales, sean éstos O y O' de tal manera que las variables cinemáticas transforman con un elemento $g \in G$, del grupo cinemático G , en la forma:

$$x'^i = f^i(x, g). \quad (3.2)$$

Si para el observador O la partícula sigue el camino $\bar{x}(\tau)$, entonces para O' sigue el camino $\bar{x}'(\tau) = f(\bar{x}(\tau), g)$. Como la Lagrangiana, si entre observadores transforman las variables cinemáticas $x' = gx$, transforma de acuerdo con,

$$\tilde{L}(x', \dot{x}') = \tilde{L}(x, \dot{x}) + \frac{d}{d\tau} \alpha(g; x),$$

la amplitud de probabilidad para el observador O' es

$$\begin{aligned} \phi'[\bar{x}'(\tau)] &= N \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{L}(\bar{x}'(\tau), \dot{\bar{x}}'(\tau)) d\tau \right\} \\ &= N \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{L}(\bar{x}(\tau), \dot{\bar{x}}(\tau)) d\tau \right\} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\alpha(g; \bar{x}(\tau))}{d\tau} d\tau \right\}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\phi'[\bar{x}'(\tau)] = \phi[\bar{x}(\tau)] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (\alpha(g; x_2) - \alpha(g; x_1)) \right\},$$

donde el último factor de fase es independiente del camino de integración $\bar{x}(\tau)$. Si ahora sumamos todas las amplitudes de probabilidad escritas en esta forma, para todos los posibles caminos, resulta que el kernel de Feynman transforma como:

$$K'(x'_1, x'_2) = K(x_1, x_2) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (\alpha(g; x_2) - \alpha(g; x_1)) \right\}. \quad (3.3)$$

Si la información relativa al punto inicial x_1 se pierde, por ejemplo si hacemos la correspondiente suma sobre diferentes puntos iniciales, entonces la función de onda transforma como la parte relacionada con las variables del punto x_2 , hasta tal vez una función arbitraria sobre G ,

$$\Phi'(x'(x)) = \Phi'(gx) = \Phi(x) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (\alpha(g; x) + \theta(g)) \right\}, \quad (3.4)$$

o en términos de las variables sin primar x ,

$$\Phi'(x) = \Phi(g^{-1}x) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (\alpha(g; g^{-1}x) + \theta(g)) \right\}, \quad (3.5)$$

donde $\theta(g)$ es una función arbitraria definida sobre G pero independiente de x .

Como nuestra partícula se encuentra en alguna parte del espacio cinemático X , la probabilidad de encontrarla en alguna parte debe ser 1. Tenemos que definir la forma de sumar probabilidades en puntos $x \in X$. Si definimos una medida sobre X , $\mu(x)$, tal que $d\mu(x)$ es el elemento de volumen en el espacio X y $|\Phi(x)|^2 d\mu(x)$ se interpreta como la probabilidad de encontrar a la partícula dentro del volumen $d\mu(x)$ alrededor del punto x , entonces la probabilidad

de encontrarla en alguna parte, en cualquier instante t y para cada observador inercial, debe ser uno, es decir

$$\int_X |\Phi(x)|^2 d\mu(x) = 1, \quad (3.6)$$

donde la integral está tomada a $t = \text{constante}$. Como a partir de (3.5)

$$|\Phi'(x')|^2 = |\Phi(x)|^2, \quad (3.7)$$

entonces para que la probabilidad se conserve entre observadores inerciales, es suficiente admitir que la medida $\mu(x)$ es invariante bajo las transformaciones del grupo. En ese caso, la ecuación (3.7) implica también la conservación local de la probabilidad entre observadores inerciales. Esto va a tener consecuencias fuertes en el formalismo, ya que va a poder definir otro tipo de transformaciones de simetría: la invariancia del formalismo bajo cambios arbitrarios de fase de la función de onda. Pero la fase es en general función de x y la podemos cambiar de forma arbitraria en cada punto. Admitir una medida invariante nos lleva a que el formalismo es también invariante bajo cambios de fase locales, es lo que se denomina la **invariancia gauge local**.

Conviene observar que el cambio arbitrario de fase $\beta(x)$ que da lugar a esta nueva simetría, no es solo una fase definida sobre el espacio-tiempo, sino sobre todo el espacio cinemático. Frente a lo que se suele admitir en teoría cuántica de campos, tenemos la posibilidad de analizar simetrías más generales que actúan sobre una variedad más amplia que el espacio-tiempo.

3.1.2. Espacio de Hilbert de las amplitudes de probabilidad

La función compleja $\Phi(x)$, si se interpreta como la amplitud de probabilidad de encontrar a nuestra partícula en el punto $x \in X$, habiendo venido de alguna otra parte, satisface (3.6). Esto significa que $\Phi(x)$ es una función compleja de cuadrado integrable definida sobre el espacio cinemático. Como las amplitudes de probabilidad se pueden sumar para definir nuevas amplitudes de probabilidad, convenientemente normalizadas, el conjunto de las posibles funciones $\Phi(x)$ tiene estructura de espacio vectorial complejo, ya que la suma y/o posterior producto por números complejos, produce nuevas funciones complejas con el significado de describir amplitudes de probabilidad.

En consecuencia, el espacio de Hilbert \mathcal{H} , cuyos rayos unidad representan los estados puros del sistema es un espacio de funciones de cuadrado integrable $\mathbb{L}^2(X, \mu)$ definidas sobre el espacio cinemático X . La medida $\mu(x)$ es una medida invariante, de tal manera que el producto escalar en \mathcal{H} se define mediante

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int_X \Phi^*(x) \Psi(x) d\mu(x), \quad (3.8)$$

donde $\Phi^*(x)$ representa la función compleja conjugada de la $\Phi(x)$. Hay una arbitrariedad en la elección de la medida invariante $\mu(x)$, pero a esta altura del formalismo esto se hará por argumentos físicos. De todas formas, el que la medida sea invariante restringe fuertemente el tipo de medidas que pueden utilizarse.

El valor absoluto del anterior producto escalar (3.8), $|\langle \Phi | \Psi \rangle|$, representa la probabilidad de que habiendo preparado al sistema en el estado $\Psi(x)$, lo encontremos en el estado $\Phi(x)$, y recíprocamente, ya que $|\langle \Phi | \Psi \rangle| = |\langle \Psi | \Phi \rangle|$.

3.1.3. Representación de los Observables

El teorema de Wigner ^{2,3}, sobre simetrías de un sistema cuántico, implica que para toda simetría $g \in G$ de un grupo continuo que transforma $x' = gx$, existe una aplicación uno a uno

² E.P. Wigner, *Group theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra*, Acad. Press, NY (1959).

³ V. Bargmann, *J. Math. Phys.* **5**, 862 (1964).

de los rayos unidad en los rayos unidad sobre \mathcal{H} , que viene inducida en el espacio de Hilbert \mathcal{H} por un operador unitario $U(g)$ definido salvo una fase. Este operador transforma una función de onda definida en x en otra función de onda arbitraria del rayo unidad imagen definido en el punto x' .

El Principio de Relatividad Restringido es una simetría fuerte de los sistemas físicos. Define la equivalencia de un conjunto de observadores que están definidos por cómo relacionan entre sí las medidas de acontecimientos espacio-temporales. Esta relación viene caracterizada por el grupo cinemático G . Si interpretamos que $\Phi(x)$ es la función de onda que describe al estado de la partícula para el observador O y que $\Phi'(x)$ es cómo la describe O' , entonces, el teorema de Wigner implica

$$U(g)\Phi(x) = \Phi'(x) = \Phi(g^{-1}x) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \alpha(g; g^{-1}x) + \theta(g) \right\}. \quad (3.9)$$

Como la función $\theta(g)$ da lugar a una fase constante, independiente de x , la podemos eliminar, y tomar como definición de la representación unitaria del grupo G sobre el espacio de Hilbert \mathcal{H}

$$\Phi'(x) = U(g)\Phi(x) = \Phi(g^{-1}x) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \alpha(g; g^{-1}x) \right\}. \quad (3.10)$$

Las funciones gauge satisfacen (1.15), por lo que el término de fase se puede reemplazar por

$$\alpha(g; g^{-1}x) = -\alpha(g^{-1}; x) + \alpha(0; x) + \xi(g, g^{-1}) = -\alpha(g^{-1}; x) + \zeta(g), \quad (3.11)$$

ya que las funciones gauge pueden escogerse de tal manera que $\alpha(0; x) = 0$, y como la función $\zeta(g) = \xi(g, g^{-1})$ da lugar a otra fase constante, la podemos suprimir. Definimos la transformación de la función de onda mediante:

$$\Phi'(x) = U(g)\Phi(x) = \Phi(g^{-1}x) \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \alpha(g^{-1}; x) \right\}. \quad (3.12)$$

Si el operador unitario lo representamos en términos del generador infinitesimal autoadjunto del álgebra de Lie en la forma

$$U(g) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} g^\sigma X_\sigma \right\}, \quad (3.13)$$

entonces, para una transformación infinitesimal de parámetros δg^σ , la transformación inversa tiene por parámetros infinitesimales $-\delta g^\sigma$, por lo que a primer orden en δg^σ

$$U(\delta g)\Phi(x) = \left(\mathbb{I} - \frac{i}{\hbar} \delta g^\sigma X_\sigma \right) \Phi(x) = \Phi(x) - \frac{i}{\hbar} \delta g^\sigma X_\sigma \Phi(x),$$

mientras que

$$\Phi(\delta g^{-1}x) \equiv \Phi(f(x, \delta g^{-1})) = \Phi(x) - \delta g^\sigma u_\sigma^i(x) \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x^i},$$

y

$$\exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \alpha(\delta g^{-1}; x) \right\} = 1 - \frac{i}{\hbar} \alpha(\delta g^{-1}; x).$$

Como $\alpha(0; x) = 0$,

$$\alpha(\delta g^{-1}; x) = \left. \frac{\partial \alpha(g; x)}{\partial g^\sigma} \right|_{g=0} (-\delta g^\sigma),$$

y sustituyendo en (3.12) los términos anteriores y después de identificar los términos de primer orden en δg^σ , resulta que los generadores X_σ , al actuar sobre las funciones de onda tienen la representación diferencial

$$X_\sigma = \frac{\hbar}{i} u_\sigma^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} - \lambda_\sigma(x), \quad (3.14)$$

donde

$$u_\sigma^j(x) = \left. \frac{\partial f^j(x, g)}{\partial g^\sigma} \right|_{g=0}, \quad \lambda_\sigma(x) = \left. \frac{\partial \alpha(g; x)}{\partial g^\sigma} \right|_{g=0}. \quad (3.15)$$

Si nos restringimos a transformaciones del espacio de configuración ampliado (t, q_i) que pueden extenderse a la totalidad del espacio cinemático $x \equiv (t, q_i, \dots, q_i^{(k-1)})$, entonces, usando la misma notación que en (1.18)-(1.21), si la transformación infinitesimal la escribimos en la forma

$$t' = t + M_\sigma \delta g^\sigma, \quad q'_i = q_i + M_{i\sigma} \delta g^\sigma, \quad \dots, \quad q_i'^{(k-1)} = q_i^{(k-1)} + M_{i\sigma}^{(k-1)} \delta g^\sigma,$$

los generadores toman la forma:

$$X_\sigma = \frac{\hbar}{i} \left(M_\sigma \frac{\partial}{\partial t} + M_{i\sigma} \frac{\partial}{\partial q_i} + \dots + M_{i\sigma}^{(k-1)} \frac{\partial}{\partial q_i^{(k-1)}} \right) - \lambda_\sigma(x). \quad (3.16)$$

Cuando los comparamos con las constantes del movimiento Noetherianas (1.34) escritas en la forma

$$-N_\sigma = -H M_\sigma + p_{(s+1)}^i M_{i\sigma}^{(s)} - \lambda_\sigma(x), \quad (3.17)$$

vemos que podemos enunciar una especie de **receta de correspondencia**. Si nos restringimos a los grupos cinemáticos, las funciones $\lambda_\sigma(x)$ de (1.34), se obtienen a partir de las funciones gauge Lagrangianas $\alpha(g; x)$, mediante (1.14), es decir, de la misma forma en que obtenemos las funciones $\lambda_\sigma(x)$ en (3.15). Identificando los observadores clásicos y momentos generalizados en (3.17) con los correspondientes operadores diferenciales (3.16) que multiplican a las funciones correspondientes $M_{i\sigma}^{(s)}$, obtenemos: El Hamiltoniano generalizado $H = p_{(s)}^i q_i^{(s)} - L$, que multiplica en (3.17) a la función M_σ , se identifica con el operador $i\hbar \partial / \partial t$ que multiplica a su vez a la función M_σ en (3.16). Análogamente, el momento generalizado $p_{(s+1)}^i$, que multiplica a la función $M_{i\sigma}^{(s)}$, se identifica con el operador diferencial $-i\hbar \partial / \partial q_i^{(s)}$, for $s = 0, \dots, k-1$, ya que las funciones $\lambda_\sigma(x)$, son las mismas.

Receta: Conviene recordar que como variables $p_{(s+1)}^i$ y $q_i^{(s)}$ son canónico-conjugadas. Entonces, cada momento generalizado $p_{(s+1)}^i$ queda reemplazado por (\hbar/i) multiplicado por el operador diferencial que deriva con respecto a la variable canónico-conjugada de ese momento $q_i^{(s)}$, y el Hamiltoniano generalizado H , por el operador diferencial $i\hbar \partial / \partial t$.

$$p_{(s+1)}^i \longrightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_i^{(s)}}, \quad H \longrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}.$$

En el caso de las partículas elementales, como las variables cinemáticas son $t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}$, como coordenadas generalizadas solo tenemos las \mathbf{r}, \mathbf{u} y $\boldsymbol{\rho}$ y de momentos conjugados respectivos, los \mathbf{P}, \mathbf{U} y \mathbf{V} , éstos aparecerán representados por

$$\mathbf{P} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathbf{U} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}, \quad \mathbf{V} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}}, \quad H = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}. \quad (3.18)$$

En vez del momento $\mathbf{V} = \partial \tilde{L} / \partial \boldsymbol{\rho}$, hemos utilizado la función $\mathbf{W} = \partial \tilde{L} / \partial \boldsymbol{\omega}$, que da lugar a la parte rotativa del espín, la cual se expresará finalmente en términos de las derivadas con respecto a $\boldsymbol{\rho}$, en la forma en que se describe en el apéndice sobre espinores 3.3, al final de este capítulo.

$$\mathbf{W} = \frac{\hbar}{2i} \{ \nabla_\rho + \boldsymbol{\rho} \times \nabla_\rho + \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_\rho) \}, \quad (3.19)$$

donde hemos puesto $\nabla_\rho \equiv \partial / \partial \boldsymbol{\rho}$. La representación de los momentos (3.18) es válida incluso cuando la partícula elemental esté sometida a una interacción.

Sabemos que $V_i = \partial\tilde{L}/\partial\dot{\rho}_i$ y $W_j = \partial\tilde{L}/\partial\omega_j = \partial\tilde{L}/\partial\dot{\rho}_i \partial\dot{\rho}_i/\partial\omega_j = V_i\partial\dot{\rho}_i/\partial\omega_j$. Como en la representación activa

$$\omega_i = \frac{2}{1+\rho^2}(\dot{\rho}_i + \epsilon_{ijk}\rho_j\dot{\rho}_k), \quad \dot{\rho}_i = \frac{1}{2}(\omega_i - \epsilon_{ikj}\rho_k\omega_j + \rho_i(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\omega})),$$

$$\frac{\partial\dot{\rho}_i}{\partial\omega_j} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - \epsilon_{ikj}\rho_k + \rho_i\rho_j), \quad W_j = V_i\frac{\partial\dot{\rho}_i}{\partial\omega_j} = \frac{\hbar}{2i}\left(\frac{\partial}{\partial\rho_j} + \epsilon_{jik}\rho_i\frac{\partial}{\partial\rho_k} + \rho_j\rho_i\frac{\partial}{\partial\rho_i}\right),$$

es decir (3.19).

La representación de Heisenberg es aquella representación en la que la dependencia temporal de la función de onda ha sido eliminada haciendo en cada instante una transformación unitaria dependiente del tiempo. Entonces, la nueva función de onda depende de las variables cinemáticas pero con el tiempo excluido, es decir depende solamente de las coordenadas generalizadas $q_i^{(r)}$, $r = 0, \dots, k-1$. Por lo tanto, cuando actúan sobre la función de onda en la representación de Heisenberg $\psi(q_i, q_i^{(1)}, \dots, q_i^{(k-1)})$, los observables $q_i^{(r)}$ y $p_{(s)}^j$ satisfacen las relaciones canónicas de conmutación

$$[q_i^{(r)}, p_{(s+1)}^j] = i\hbar\delta_i^j\delta_s^r.$$

Si las funciones $\lambda_\sigma(x)$ en (3.14) fueran nulas, los generadores X_σ satisfacen las reglas de conmutación del álgebra de Lie del grupo G . Pero si algunas de las funciones $\lambda_\sigma(x) \neq 0$, entonces los generadores X_σ no satisfacen las reglas de conmutación del álgebra de Lie de G , sino de una extensión central de G . La representación del grupo no es una verdadera representación sino una representación proyectiva de G , como ha demostrado Bargmann ⁴.

En efecto, a partir de (3.10) obtenemos

$$U(g_1)\Phi(x) = \Phi(g_1^{-1}x) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\alpha(g_1; g_1^{-1}x)\right\},$$

y si actuamos ahora por la izquierda con $U(g_2)$,

$$\begin{aligned} U(g_2)U(g_1)\Phi(x) &= U(g_2)\Phi(g_1^{-1}x) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\alpha(g_1; g_1^{-1}x)\right\} \\ &= \Phi((g_2g_1)^{-1}x) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\alpha(g_2; g_2^{-1}x)\right\} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\alpha(g_1; (g_2g_1)^{-1}x)\right\}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

mientras que si actuamos sobre $\Phi(x)$ con $U(g_2g_1)$,

$$U(g_2g_1)\Phi(x) = \Phi((g_2g_1)^{-1}x) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\alpha(g_2g_1; (g_2g_1)^{-1}x)\right\}. \quad (3.21)$$

Si definimos $(g_2g_1)^{-1}x = g_1^{-1}g_2^{-1}x = z$, entonces $g_1z = g_2^{-1}x$ y debido a que las funciones gauge satisfacen (1.15), podemos escribir

$$\alpha(g_2; g_1z) + \alpha(g_1; z) = \alpha(g_2g_1; z) + \xi(g_2, g_1), \quad (3.22)$$

que comparando (3.20) con (3.21), y teniendo presente (3.22), obtenemos

$$U(g_2)U(g_1)\Phi(x) = U(g_2g_1)\Phi(x) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\xi(g_2; g_1)\right\}. \quad (3.23)$$

Como la función $\Phi(x)$ es arbitraria, obtenemos una representación proyectiva unitaria del grupo G , caracterizada por el exponente no trivial $\xi(g, g')$.

Para las partículas elementales Galileanas y Poincaré el espacio cinemático es la variedad de dimensión diez, constituida por las variables $(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha})$, donde t es el tiempo, \mathbf{r} la posición de

⁴ V. Bargmann, *Ann. Math.* **59**, 1 (1954).

la carga, \mathbf{u} la velocidad de ésta y $\boldsymbol{\alpha}$ la orientación de la partícula. Por lo tanto, en el formalismo cuántico, la función de onda más general que representa los estados de una partícula elemental es una función de cuadrado integrable $\Phi(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha})$ de estas variables cinemáticas. Para las partículas puntuales el espacio cinemático es solamente el espacio-tiempo cuatridimensional, de tal manera que las funciones de onda son solamente funciones del tiempo y de la posición, pero para partículas con espín la función de onda debe depender de las variables cinemáticas adicionales, como velocidad y orientación. La estructura cuántica del espín, lo mismo que en el caso clásico, va a depender de estas nuevas variables.

3.2. Partículas no relativistas con espín

3.2.1. Partículas no relativistas con espín. Bosones

Vamos a aplicar este formalismo al caso interesante, pero sencillo, de partículas no relativistas con espín de tipo (anti)orbital. Esto corresponde al ejemplo clásico en el que el espacio cinemático es $X = \mathcal{G}/SO(3)$ y por lo tanto las variables cinemáticas son tiempo, posición y velocidad. Un ejemplo particular es el descrito en el Capítulo 2, Sección 2.2 y dado por la Lagrangiana libre

$$L = \frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 - \frac{m}{2\omega^2} \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \right)^2, \quad (3.24)$$

con $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$. Para la partícula libre, el centro de masa $\mathbf{q} = \mathbf{r} - \mathbf{k}$ se mueve en línea recta mientras que el vector de posición relativa \mathbf{k} describe una trayectoria, en general elíptica, de pulsación ω alrededor del centro de masa. El espín con respecto al centro de masa se expresa como $\mathbf{S}_{CM} = -m\mathbf{k} \times d\mathbf{k}/dt$, como un momento angular (anti)orbital del movimiento del centro de carga alrededor del centro de masa.

Las variables cinemáticas transforman bajo el grupo de Galileo \mathcal{G} de la forma:

$$t'(\tau) = t(\tau) + b, \quad (3.25)$$

$$\mathbf{r}'(\tau) = R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{r}(\tau) + \mathbf{v}t(\tau) + \mathbf{a}, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{u}'(\tau) = R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}(\tau) + \mathbf{v}. \quad (3.27)$$

las funciones de onda son funciones complejas sobre X y por lo tanto, funciones de las variables $(t, \mathbf{r}, \mathbf{u})$. Sobre este espacio cinemático, la función gauge es la misma que en (2.38), donde m define la masa de la partícula. Si tomamos en cuenta la receta de correspondencia desarrollada anteriormente, el Hamiltoniano es $H \rightarrow i\hbar\partial/\partial t$, y el momento generalizado $\mathbf{p}_r \equiv \mathbf{P} \rightarrow -i\hbar\nabla$ y el otro momento generalizado $\mathbf{p}_u \equiv \mathbf{U} \rightarrow -i\hbar\nabla_u$. Los generadores de la representación proyectiva están dados por

$$H = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{P} = \frac{\hbar}{i}\nabla, \quad \mathbf{K} = m\mathbf{r} - t\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{\hbar}{i}\nabla_u, \quad (3.28)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \frac{\hbar}{i}\nabla + \mathbf{u} \times \frac{\hbar}{i}\nabla_u = \mathbf{L} + \mathbf{Z}, \quad (3.29)$$

donde ∇ es el operador gradiente con respecto a las variables generalizadas $\mathbf{q}_1 \equiv \mathbf{r}$ y ∇_u es el operador gradiente con respecto a las variables generalizadas $\mathbf{q}_2 \equiv \mathbf{u}$. Conviene resaltar que esta representación de los generadores es independiente de la Lagrangiana particular que hayamos considerado. Solo depende de las variables cinemáticas $(t, \mathbf{r}, \mathbf{u})$, y de la función gauge habitual, del grupo de Galileo.

El momento angular con respecto al centro de carga, relacionado con el **Zitterbewegung**, $\mathbf{Z} = \mathbf{u} \times \mathbf{U}$ y veremos más adelante que cuantiza solamente con valores enteros.

Si definimos $\mathbf{q} = \mathbf{r} - \mathbf{k} = (\mathbf{K} + \mathbf{P}t)/m$, satisface las reglas de conmutación con \mathbf{P} ,

$$[q_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij},$$

que resultan ser las reglas canónicas de conmutación entre el momento lineal y la posición de una partícula puntual. Por lo tanto, las reglas canónicas de conmutación entre el momento lineal total y la posición del centro de masa de una partícula con espín, están ya contenidas en las reglas de conmutación del álgebra de Lie extendida del grupo cinemático. Es por eso que el operador

$$\mathbf{q} = \mathbf{r} - \frac{\hbar}{im} \nabla_u, \quad (3.30)$$

puede ser interpretado como el operador de posición del centro de masa. Una discusión general sobre otras definiciones del operador de posición del centro de masa, pueden encontrarse en el libro del autor.

En esta representación, un operador de Casimir es la energía interna $H - \mathbf{P}^2/2m$. Vemos que el espín con respecto al centro de masa se define como habitualmente

$$\mathbf{S}_{CM} = \mathbf{J} - \frac{1}{m} \mathbf{K} \times \mathbf{P} = \mathbf{u} \times \mathbf{U} + \mathbf{k} \times \mathbf{P} = \mathbf{u} \times \frac{\hbar}{i} \nabla_u + \frac{\hbar}{im} \nabla_u \times \frac{\hbar}{i} \nabla;$$

que aparece escrito en términos de dos operadores que no conmutan, y que satisface

$$[\mathbf{S}_{CM}, \mathbf{S}_{CM}] = i\hbar \mathbf{S}_{CM}, \quad [\mathbf{J}, \mathbf{S}_{CM}] = i\hbar \mathbf{S}_{CM}, \quad [\mathbf{S}_{CM}, \mathbf{P}] = [\mathbf{S}_{CM}, H] = [\mathbf{S}_{CM}, \mathbf{K}] = 0,$$

es decir, es un operador momento angular, transforma como un vector bajo rotaciones y es invariante bajo traslaciones espaciales y temporales y bajo boosts Galileanos, respectivamente. La segunda parte del operador espín es del orden de \hbar^2 por lo que únicamente produce una corrección a la parte \mathbf{Z} .

Los operadores \mathbf{Z} satisfacen las reglas de conmutación

$$[\mathbf{Z}, \mathbf{Z}] = i\hbar \mathbf{Z}, \quad [\mathbf{J}, \mathbf{Z}] = i\hbar \mathbf{Z}, \quad [\mathbf{Z}, \mathbf{P}] = [\mathbf{Z}, H] = 0, \\ [\mathbf{Z}, \mathbf{K}] = -i\hbar \mathbf{U} = -\hbar^2 \nabla_u,$$

lo que indica que \mathbf{Z} es un operador momento angular, transforma como un vector bajo rotaciones, es invariante bajo traslaciones espaciales y temporales, pero no lo es bajo los boosts Galileanos. Es un operador de espín, que representa al momento angular con respecto al centro de carga, como se puede deducir de su dinámica.

Vemos pues que, el operador momento angular total \mathbf{J} se descompone en dos términos que conmutan $\mathbf{r} \times \mathbf{P}$ y \mathbf{Z} . Ambos conmutan con H , pero el primero no es invariante bajo traslaciones. Como los operadores \mathbf{Z} son operadores de momento angular que únicamente derivan la función de onda con respecto a las variables de velocidad, y en consecuencia conmutan con los operadores H y \mathbf{P} , aunque no representan al operador momento angular con respecto del centro de masa, podemos usarlos para encontrar vectores propios comunes a los tres operadores que conmutan $H - \mathbf{P}^2/2m$, Z^2 y Z_3 . Como resulta que los operadores \mathbf{Z} únicamente afectan a la función de onda en su dependencia en las variables \mathbf{u} , podemos escoger las funciones de onda con las variables separadas en la forma $\Phi(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}) = \sum_i \psi_i(t, \mathbf{r}) \chi_i(\mathbf{u})$ de tal manera que

$$(H - \mathbf{P}^2/2m) \psi_i(t, \mathbf{r}) = E \psi_i(t, \mathbf{r}), \quad (3.31)$$

$$Z^2 \chi_i(\mathbf{u}) = z(z+1) \hbar^2 \chi_i(\mathbf{u}), \quad (3.32)$$

$$Z_3 \chi_i(\mathbf{u}) = m_z \hbar \chi_i(\mathbf{u}). \quad (3.33)$$

Cada parte espacio-temporal de la función de onda $\psi_i(t, \mathbf{r})$, satisface la ecuación de Schroedinger y está desacoplada de la parte del espín $\chi(\mathbf{u})$.

Debido a la estructura de Z^2 en términos de las variables \mathbf{u} , que resulta ser la misma que la del momento angular orbital de una partícula puntual en términos de las variables de posición \mathbf{r} , la parte del espín de la función de onda es en realidad de la forma

$$\chi(\mathbf{u}) = f(u) Y_z^{m_z}(\theta, \phi), \quad (3.34)$$

donde $f(u)$ es una función arbitraria del módulo de \mathbf{u} y $Y_z^{m_z}(\theta, \phi)$ son los armónicos esféricos en la dirección θ, ϕ del vector \mathbf{u} .

Para el observador del centro de masa, $\mathbf{S}_{CM} = \mathbf{Z}$ y ambos momentos angulares son el mismo. Pero para un observador arbitrario, los operadores \mathbf{Z} no conmutan con los generadores de los boosts \mathbf{K} , por lo que el valor absoluto de \mathbf{Z}^2 no es invariante Galileano, mientras que \mathbf{S}_{CM}^2 sí lo es. De todas formas, la descomposición de la función de onda en una función multicomponente que refleja la estructura de su espín es una propiedad intrínseca que se puede poner de manifiesto en cualquier sistema de referencia.

Cuando la partícula interactúa con un campo electromagnético externo, la ecuación (3.31) se debe satisfacer para las partes mecánicas $H_m = H - e\phi$ y $\mathbf{P}_m = \mathbf{P} - e\mathbf{A}$, por lo que obtenemos la ecuación habitual del acoplamiento mínimo

$$\left(H - e\phi - \frac{(\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2}{2m} \right) \psi_i(t, \mathbf{r}) = E\psi_i(t, \mathbf{r}), \quad (3.35)$$

para cada parte espacio-temporal.

En este formalismo, cuando el espín es de naturaleza (anti)orbital, no conduce al cuantizar a espines semienteros. Estos modelos de partículas solamente sirven como modelos de bosones.

3.2.2. Partículas no relativistas con espín. Fermiones

Otro ejemplo de partícula no relativista con espín es aquél en el que las variables de orientación son variables cinemáticas y la partícula clásica posee velocidad angular. Un ejemplo de este tipo corresponde al modelo descrito por la Lagrangiana

$$L = \frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 + \frac{I}{2} \omega^2. \quad (3.36)$$

La partícula libre viaja con velocidad constante y rota con velocidad angular constante. El espín clásico es $\mathbf{S} = I\boldsymbol{\omega}$, y el centro de carga y el centro de masa son el mismo punto.

Para describir la orientación de una partícula hagámoslo definiendo tres ejes unidad ortogonales \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$ ligados al punto \mathbf{r} , como formando un sistema cartesiano comóvil, análogamente a como describimos la orientación de un sólido rígido. Si los tomamos inicialmente paralelos a los correspondientes ejes cartesianos del observador inercial, entonces sus nueve componentes nos definen una matriz ortogonal de rotación $R_{ij}(\boldsymbol{\rho})$ que describe cómo rotar el sistema de referencia inercial para llevarlo a coincidencia con los ejes del cuerpo. Describe por lo tanto la evolución de esta triada, con la condición inicial $R_{ij}(t = 0) = \delta_{ij}$.

Las variables cinemáticas t , \mathbf{r} y $\boldsymbol{\rho}$ transforman bajo \mathcal{G} en la forma

$$t'(\tau) = t(\tau) + b, \quad (3.37)$$

$$\mathbf{r}'(\tau) = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{r}(\tau) + \mathbf{v}t(\tau) + \mathbf{a}, \quad (3.38)$$

$$\boldsymbol{\rho}'(\tau) = \frac{\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\rho}(\tau) + \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\rho}(\tau)}{1 - \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\rho}(\tau)}. \quad (3.39)$$

Sobre el correspondiente espacio de Hilbert, los generadores Galileanos están dados por:

$$H = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{P} = \frac{\hbar}{i} \nabla, \quad \mathbf{K} = m\mathbf{r} - t \frac{\hbar}{i} \nabla, \quad (3.40)$$

$$\mathbf{J} = \frac{\hbar}{i} \mathbf{r} \times \nabla + \frac{\hbar}{2i} \{ \nabla_\rho + \boldsymbol{\rho} \times \nabla_\rho + \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_\rho) \} = \mathbf{L} + \mathbf{W}, \quad (3.41)$$

donde ∇_ρ representa al operador gradiente con respecto a las variables $\boldsymbol{\rho}$ y en la parametrización $\boldsymbol{\rho}$ del grupo de rotaciones.

La parte \mathbf{W} resulta del análisis general del grupo. Los generadores del grupo en esta parametrización X_i se obtienen a partir de (3.39) y de acuerdo con (1.38) y (1.40). Se obtiene como

$$X_i = \left(\frac{\partial \rho'^k}{\partial \mu^i} \right) \Big|_{\mu=0} \frac{\partial}{\partial \rho^k},$$

que escritos en notación vectorial

$$\mathbf{X} = \nabla_\rho + \boldsymbol{\rho} \times \nabla_\rho + \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_\rho)$$

Satisfacen las reglas de conmutación

$$[X_i, X_k] = -2\epsilon_{ikl}X_l$$

y por lo tanto los operadores $W_k = \frac{\hbar}{2i}X_k$, que en notación vectorial aparecen como

$$\mathbf{W} = \frac{\hbar}{2i} \{ \nabla_\rho + \boldsymbol{\rho} \times \nabla_\rho + \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_\rho) \}, \quad (3.42)$$

satisfacen las reglas de conmutación del momento angular

$$[\mathbf{W}, \mathbf{W}] = i\hbar\mathbf{W}. \quad (3.43)$$

De esta manera, como \mathbf{L} y \mathbf{W} conmutan entre sí, obtenemos que $[\mathbf{J}, \mathbf{J}] = i\hbar\mathbf{J}$.

En este ejemplo, el centro de masa y el centro de carga son el mismo punto, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$ es el momento angular orbital del movimiento del centro de masa y $\mathbf{W} \equiv \mathbf{S}$ es el operador espín, tanto con respecto al centro de masa como al centro de carga. El operador espín conmuta con H , \mathbf{P} y \mathbf{K} por lo que la función de onda puede escribirse en variables separadas como $\Phi(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = \sum_i \psi_i(t, \mathbf{r})\chi_i(\boldsymbol{\rho})$ lo que nos lleva a las ecuaciones de valores propios

$$(H - \mathbf{P}^2/2m)\psi_i(t, \mathbf{r}) = E\psi_i(t, \mathbf{r}), \quad (3.44)$$

$$S^2\chi_i(\boldsymbol{\rho}) = s(s+1)\hbar^2\chi_i(\boldsymbol{\rho}), \quad (3.45)$$

$$S_3\chi_i(\boldsymbol{\rho}) = m_s\hbar\chi_i(\boldsymbol{\rho}). \quad (3.46)$$

Bopp y Haag⁵ encontraron soluciones con $s = 1/2$ para el sistema de ecuaciones (3.45) y (3.46). Estas soluciones reciben el nombre de funciones de Wigner⁶. Las soluciones de (3.45) para cualquier valor de s no son más que una combinación lineal de las componentes de la representación irreducible matricial de dimensión $(2s+1) \times (2s+1)$, del grupo de rotaciones, resultado que se obtiene a partir del teorema de Peter-Weyl sobre representaciones finitas de grupos compactos^{7,8,9}. Analizaremos las soluciones correspondientes a las funciones de onda de $s = 1/2$ en la Sección 3.3 del Apéndice, donde se van a obtener de forma explícita además de analizar una introducción al teorema de Peter-Weyl.

Para describir fermiones, las partículas clásicas deben necesariamente tener como variables cinemáticas, variables compactas del tipo de orientación. En caso contrario no es posible obtener una descripción de objetos de espín $1/2$ si solamente el espín está asociado con el zitterbewegung. Las partículas de espín $1/2$, desde el punto de vista clásico, poseen orientación y por lo tanto rotan.

⁵ F. Bopp and R. Haag, *Z. Naturforschg.* **5a**, 644 (1950).

⁶ L.C. Biedenharn and J.D. Louck, *Angular Momentum in Quantum Physics. Theory and Application*, Cambridge U. P., Cambridge, England (1989).

⁷ A.R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Princeton U. P., Princeton NJ (1957).

⁸ N. Ja. Vilenkin, *Fonctions spéciales et Théorie de la représentation des groupes*, Dunod, Paris (1969).

⁹ A.O. Barut and R. Raczka, *Theory of group representations and applications*, PWN, Warszawa (1980).

3.3. Apéndice: Espinores

En esta sección de contenido puramente matemático, revisaremos las propiedades principales de los espinores, en particular las relacionadas con las posibles representaciones del grupo de rotaciones que describen objetos de espín $1/2$. Vamos a encontrar estas representaciones a partir de funciones propias de los diferentes operadores de espín que conmutan. Pero conviene resaltar que además de tener operadores de espín referidos al sistema de referencia del observador inercial, u observador del laboratorio, también tenemos operadores de espín referidos a los ejes ligados a la partícula, ya que, en general, las partículas que analizamos poseen orientación como variables cinemáticas y por lo tanto podemos asignarles un triedro cartesiano comóvil, que rota. Esto nos va a producir el resultado de que una partícula de espín $1/2$, su función de onda, necesariamente, posee cuatro componentes.

Todos los cálculos de este apéndice resultan abrumadores si se tratan de hacer a mano, por lo que el uso de un programa de cálculo algebraico facilita la tarea. Son muchas las derivadas e integrales de funciones complejas que hay que realizar para determinar productos escalares y representaciones matriciales de los diferentes operadores. En mi página web el fichero <http://tp.lc.ehu.es/documents/EspinoresNotasBilbao.nb>, es un notebook del programa Mathematica¹⁰ en el que se recogen los cálculos de este apéndice.

La función de onda más general de una partícula elemental es una función compleja de las diez variables cinemáticas, $\Phi(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$, y la parte del espín está ligada con la dependencia de las variables invariantes por traslación \mathbf{u} y $\boldsymbol{\rho}$ y viene dado por el operador

$$\mathbf{S} = \mathbf{u} \times \mathbf{U} + \mathbf{W} = \mathbf{Z} + \mathbf{W}, \quad (3.47)$$

donde \mathbf{Z} y \mathbf{W} están dados por los operadores

$$\mathbf{Z} = \mathbf{u} \times \frac{\hbar}{i} \nabla_{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{W} = \frac{\hbar}{2i} \{ \nabla_{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\rho} \times \nabla_{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\rho}}) \}. \quad (3.48)$$

Éstos últimos se expresan en la representación $\tan(\alpha/2)$ del grupo de rotaciones, como se ha expresado en las secciones anteriores. $\nabla_{\mathbf{u}}$ y $\nabla_{\boldsymbol{\rho}}$ son respectivamente, los operadores gradiente con respecto a las variables \mathbf{u} y $\boldsymbol{\rho}$. Estos operadores conmutan entre sí y conmutan con los operadores $H = i\hbar\partial/\partial t$ y $\mathbf{P} = -i\hbar\nabla$. Son por lo tanto operadores invariantes por traslación. Esta característica nos permite separar la función de onda más general en términos de funciones de variables espacio-temporales y de funciones de las variables velocidad-orientación, donde estas últimas nos describirán las propiedades invariantes por traslación de la partícula.

Los operadores de espín satisfacen las reglas de conmutación

$$[\mathbf{Z}, \mathbf{Z}] = i\hbar\mathbf{Z}, \quad [\mathbf{W}, \mathbf{W}] = i\hbar\mathbf{W}, \quad [\mathbf{Z}, \mathbf{W}] = 0, \quad (3.49)$$

y por lo tanto

$$[\mathbf{S}, \mathbf{S}] = i\hbar\mathbf{S}.$$

3.3.1. Vectores unidad

Como estamos describiendo la orientación de la partícula colocando un conjunto de tres vectores unidad ortogonales \mathbf{e}_i , cuya orientación espacial viene dada en términos de las variables $\boldsymbol{\rho}$ o $\boldsymbol{\alpha}$, entonces, si escogemos que en el instante inicial $\tau = 0$, estos ejes coincidan con los del laboratorio, las componentes de los vectores \mathbf{e}_i en cualquier instante, vienen dados por

$$(\mathbf{e}_i)_j = R_{ji}(\boldsymbol{\alpha}) = \delta_{ji} \cos \alpha + n_j n_i (1 - \cos \alpha) - \epsilon_{jik} n_k \sin \alpha, \quad (3.50)$$

¹⁰ *Mathematica*, es un programa de cálculo registrado por Wolfram Research Inc. 100 Trade Center Drive, Champaign, IL 61820-7237, USA.

en la parametrización normal, y en la parametrización $\boldsymbol{\rho}$ por

$$(\mathbf{e}_i)_j = R_{ji}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{1 + \rho^2} ((1 - \rho^2)\delta_{ji} + 2\rho_j\rho_i - 2\epsilon_{jik}\rho_k). \quad (3.51)$$

Las componentes cartesianas del vector unidad que define el eje de rotación \mathbf{n} son:

$$n_1 = \sin \theta \cos \phi, \quad n_2 = \sin \theta \sin \phi, \quad n_3 = \cos \theta, \quad (3.52)$$

donde θ es el ángulo polar y ϕ es el ángulo acimutal. Explícitamente:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \cos \alpha + \sin^2 \theta \cos^2 \phi (1 - \cos \alpha), \\ e_{12} &= \cos \theta \sin \alpha + \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi (1 - \cos \alpha), \\ e_{13} &= -\sin \theta \sin \phi \sin \alpha + \sin \theta \cos \theta \cos \phi (1 - \cos \alpha), \\ \\ e_{21} &= -\cos \theta \sin \alpha + \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi (1 - \cos \alpha), \\ e_{22} &= \cos \alpha + \sin^2 \theta \sin^2 \phi (1 - \cos \alpha), \\ e_{23} &= \sin \theta \cos \phi \sin \alpha + \sin \theta \cos \theta \sin \phi (1 - \cos \alpha), \\ \\ e_{31} &= \sin \theta \sin \phi \sin \alpha + \sin \theta \cos \theta \cos \phi (1 - \cos \alpha), \\ e_{32} &= -\sin \theta \cos \phi \sin \alpha + \sin \theta \cos \theta \sin \phi (1 - \cos \alpha), \\ e_{33} &= \cos \alpha + \cos^2 \theta (1 - \cos \alpha), \end{aligned}$$

en la representación normal $\boldsymbol{\alpha} = \alpha \mathbf{n}$, o parametrización normal del grupo de rotaciones. En la parametrización $\boldsymbol{\rho} = \tan(\alpha/2)\mathbf{n}$, resulta ser

$$\begin{aligned} e_{11} &= (1 + \rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_3^2)/(1 + \rho^2), \\ e_{12} &= (2\rho_1\rho_2 + 2\rho_3)/(1 + \rho^2), \\ e_{13} &= (2\rho_1\rho_3 - 2\rho_2)/(1 + \rho^2), \\ \\ e_{21} &= (2\rho_2\rho_1 - 2\rho_3)/(1 + \rho^2), \\ e_{22} &= (1 - \rho_1^2 + \rho_2^2 - \rho_3^2)/(1 + \rho^2), \\ e_{23} &= (2\rho_2\rho_3 + 2\rho_1)/(1 + \rho^2), \\ \\ e_{31} &= (2\rho_1\rho_3 + 2\rho_2)/(1 + \rho^2), \\ e_{32} &= (2\rho_3\rho_2 - 2\rho_1)/(1 + \rho^2), \\ e_{33} &= (1 - \rho_1^2 - \rho_2^2 + \rho_3^2)/(1 + \rho^2), \end{aligned}$$

donde $\rho^2 \equiv \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 = \tan^2(\alpha/2)$.

3.3.2. Proyección del espín en los vectores unidad

Además de los operadores que definen las diferentes componentes del espín S_i , Z_i y W_i en el sistema de referencia del laboratorio, podemos encontrar otro conjunto de operadores de espín. Éstos son las proyecciones de los operadores de espín en los ejes del cuerpo \mathbf{e}_i , es decir, los operadores $R_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{S}$, $M_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{Z}$ y $T_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{W}$, respectivamente. En particular, los operadores de espín T_i , recolectando los términos de (3.51) y (3.48), tienen la expresión

$$\begin{aligned} T_i = \sum_{k=1}^{k=3} (e_i)_k W_k &= \frac{\hbar}{2i(1 + \rho^2)} \sum_{k=1}^{k=3} ((1 - \rho^2)\delta_{ik} + 2\rho_i\rho_k - 2\epsilon_{kij}\rho_j) \\ &\quad \times \left(\frac{\partial}{\partial \rho_k} + \epsilon_{klr}\rho_l \frac{\partial}{\partial \rho_r} + \rho_k(\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\rho}}) \right), \end{aligned}$$

que después de algunas manipulaciones toman la forma vectorial

$$\mathbf{T} = \frac{\hbar}{2i} \{ \nabla_{\rho} - \boldsymbol{\rho} \times \nabla_{\rho} + \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_{\rho}) \}. \quad (3.53)$$

Vemos, por inspección, que este resultado puede también obtenerse de la expresión de \mathbf{W} en (3.48), sin más que reemplazar $\boldsymbol{\rho}$ por $-\boldsymbol{\rho}$, seguido de un cambio global de signo. Esto es así porque nosotros describimos la orientación de la partícula por el vector $\boldsymbol{\rho}$ en el sistema de referencia del laboratorio, pero desde el punto de vista activo, es decir, con los ejes del laboratorio fijos y lo que gira son los ejes del cuerpo. Sin embargo la orientación con respecto a los ejes del cuerpo se hace describiendo el movimiento de los ejes del laboratorio, cuya orientación con respecto a los del cuerpo es $-\boldsymbol{\rho}$, y el cambio global de signo de los operadores proviene de cambiar la interpretación activa por la pasiva.

Satisfacen las reglas de conmutación

$$[\mathbf{T}, \mathbf{T}] = -i\hbar\mathbf{T}, \quad [\mathbf{T}, \mathbf{W}] = 0.$$

donde el signo menos de los primeros conmutadores frente a las relaciones de conmutación de los momentos angulares, realzan el hecho de que son operadores del álgebra de Lie del grupo de rotaciones, en una representación pasiva. En general todos los operadores de espín proyectados en los ejes del cuerpo, R_i , M_i y T_i , conmutan con las correspondientes proyecciones en el laboratorio S_i , Z_i y W_i . Esto es conforme al principio de indeterminación, ya que componentes del espín con respecto a sistemas de referencia diferentes, son observables compatibles y por lo tanto conmutan.

3.3.3. Funciones de onda espinoriales

Para encontrar las funciones propias de los operadores de espín tenemos que resolver ecuaciones de la forma:

$$S^2\chi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = s(s+1)\hbar^2\chi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}), \quad S_3\chi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = m\hbar\chi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}).$$

Pero como también tenemos operadores de espín proyectados en los ejes del cuerpo que conmutan con los anteriores, podemos ampliar el conjunto de operadores que conmutan. Podemos exigir, por ejemplo, que las funciones anteriores sean también vectores propios de T_3 ,

$$T_3\chi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = n\hbar\chi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}),$$

de tal manera que el conjunto completo de observables que conmutan también incluye proyecciones del espín en los ejes del cuerpo.

El operador espín al cuadrado

$$S^2 = \mathbf{Z}^2 + \mathbf{W}^2 + 2\mathbf{Z} \cdot \mathbf{W}, \quad (3.54)$$

se expresa según (3.49) como la suma de tres operadores que conmutan, por lo que sus vectores propios se escogerán como vectores propios simultáneos de los tres operadores de la derecha de (3.54). Los operadores \mathbf{Z} y \mathbf{W} derivan la función de onda con respecto a las variables \mathbf{u} y $\boldsymbol{\rho}$. Podemos separar cada $\chi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ en la forma

$$\chi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = \sum_j U_j(\mathbf{u}) V_j(\boldsymbol{\rho}), \quad (3.55)$$

donde la suma va sobre un rango finito, y donde $U_j(\mathbf{u})$ serán funciones propias de \mathbf{Z}^2 y $V_j(\boldsymbol{\rho})$ de \mathbf{W}^2 , respectivamente.

Las funciones $U_j(\mathbf{u})$ son múltiplos de los armónicos esféricos definidos sobre la orientación del vector velocidad \mathbf{u} , ya que el operador \mathbf{Z} tiene la estructura de un momento angular orbital en términos de las variables \mathbf{u} . Sus valores propios son enteros. El factor global es una función arbitraria del valor absoluto de la velocidad, u .

En efecto, si la velocidad la expresamos en coordenadas polares esféricas, $\mathbf{u} \equiv (u, \beta, \lambda)$, donde β es el ángulo polar y λ el acimutal

$$u_x = u \sin \beta \cos \lambda, \quad u_y = u \sin \beta \sin \lambda, \quad u_z = u \cos \beta,$$

las componentes del momento angular Z_i aparecen como:

$$Z_1 = i\hbar \left(\sin \lambda \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \cos \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \right), \quad Z_2 = -i\hbar \left(\cos \lambda \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \sin \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \right), \quad Z_3 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \lambda},$$

$$Z_{\pm} = Z_1 \pm iZ_2 = \hbar e^{\pm i\lambda} \left\{ \pm \frac{\partial}{\partial \beta} + i \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right\}. \quad (3.56)$$

Vemos que son independientes de la variable u , ya que en realidad el grupo de rotaciones sobre \mathbb{R}^3 lo que hace es transformar puntos de la superficie de una esfera en puntos de esa misma esfera, es decir, actúa de forma transitiva sobre las esferas centradas en el origen, cualesquiera que sea el radio u .

El operador Z^2 que conmuta con los tres Z_i , toma la forma

$$Z^2 = -\hbar^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\sin^2 \beta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right]. \quad (3.57)$$

Podemos por lo tanto buscar funciones propias comunes a Z^2 y Z_3 en la forma $f(u)G(\beta, \lambda)$, con $f(u)$ arbitraria y respecto de la parte que depende de las variables angulares

$$Z^2 Y_l^m(\beta, \lambda) = l(l+1)\hbar^2 Y_l^m(\beta, \lambda), \quad Z_3 Y_l^m(\beta, \lambda) = m\hbar Y_l^m(\beta, \lambda).$$

Solo existen soluciones de este sistema de ecuaciones diferenciales para valores enteros de l y con $m = -l, -l+1, \dots, l$. Las funciones $|l, m\rangle \equiv Y_l^m(\beta, \lambda)$, definidas sobre la esfera unidad, reciben el nombre de **armónicos esféricos**. La medida sobre la esfera normalizada en la unidad es

$$\int_0^\pi d\beta \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi} \sin \beta d\lambda = 1 \quad (3.58)$$

Los armónicos esféricos son ortogonales respecto del producto escalar hermitico definido mediante

$$\langle l, m | s, n \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi \sin \beta d\beta Y_l^{m*}(\beta, \lambda) Y_s^n(\beta, \lambda) = \delta_{mn} \delta_{ls},$$

es decir respecto de la medida invariante y normalizada sobre la esfera unidad $(1/4\pi) \sin \beta d\beta d\lambda$. La solución del sistema consiste en buscar las funciones de la forma $Y_l^l(\beta, \lambda)$ en variables separadas $Y_l^l(\beta, \lambda) = A_l(\beta)B_l(\lambda)$, que satisfagan

$$Z_+ A_l(\beta)B_l(\lambda) = 0, \quad Z_3 A_l(\beta)B_l(\lambda) = l\hbar A_l(\beta)B_l(\lambda),$$

es decir,

$$A_l' - l(\cos \beta / \sin \beta) A_l = 0, \quad -iB_l' = lB_l,$$

que resultan ser proporcionales a las funciones $A_l(\beta) \simeq \sin^l \beta$ y $B_l(\lambda) \simeq \exp(il\lambda)$. Como sobre la superficie de la esfera el punto (β, λ) es el mismo que el $(\beta, \lambda + 2\pi)$, resulta que $\exp(il\lambda) = \exp(il(\lambda + 2\pi))$, lo que implica que necesariamente l debe ser un número entero.

Estas funciones, una vez normalizadas con respecto a la medida (3.58) se pueden escribir como

$$Y_l^l(\beta, \lambda) = (-1)^l \sqrt{\frac{(2l+1)(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}} \sin^l \beta e^{i\lambda}, \quad (3.59)$$

y el resto se obtienen de éstos mediante la acción reiterada sobre ellos de Z_- . No existen vectores propios correspondientes a valores propios semienteros, ya que la superficie de la esfera no es el espacio homogéneo de mayor dimensión. Podemos ver que $Y_l^{m*} = (-1)^m Y_l^{-m}$, y los primeros armónicos normalizados en la unidad son:

$$|0, 0\rangle = 1,$$

$$|1, 1\rangle = -\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \beta e^{i\lambda}, \quad |1, 0\rangle = \sqrt{3} \cos \beta, \quad |1, -1\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} \sin \beta e^{-i\lambda},$$

$$|2, 2\rangle = \sqrt{\frac{15}{8}} \sin^2 \beta e^{2i\lambda}, \quad |2, 1\rangle = -\sqrt{\frac{15}{2}} \sin \beta \cos \beta e^{i\lambda}, \quad |2, 0\rangle = \sqrt{\frac{5}{4}} (3 \cos^2 \beta - 1).$$

Para obtener la forma más general de un espinor hay que encontrar también la parte $V_j(\boldsymbol{\rho})$, que depende de las variables de orientación. Esto lo haremos a continuación tras el análisis de la acción del grupo de rotaciones sobre sí mismo, como grupo de transformaciones.

3.3.4. Representaciones espinoriales sobre SU(2)

Vamos a describir en detalle la parte de la función de onda ligada con la orientación, $V(\boldsymbol{\rho})$. Si no existiera contribución al espín proveniente de la parte del zitterbewegung \mathbf{Z} , el operador espín (3.47) se reduciría al operador \mathbf{W} dado en (3.48). Para obtener las ecuaciones de valores propios vamos primero a escribir estos operadores en coordenadas esféricas.

Si representamos el vector $\boldsymbol{\rho} = \tan(\alpha/2)\mathbf{n} = r\mathbf{n}$, en coordenadas esféricas como (r, θ, ϕ) , siendo $r = |\boldsymbol{\rho}| = \tan(\alpha/2)$ y θ y ϕ los ángulos polar y acimutal del vector unidad \mathbf{n} , respectivamente, entonces el vector unidad \mathbf{n} tiene por componentes cartesianas las dadas en (3.52). Si a partir de ahora tomamos $\hbar = 1$, los operadores de espín (3.48) quedan representados por los operadores diferenciales

$$W_1 = \frac{1}{2i} \left[(1+r^2) \sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{1}{r} \cos \theta \cos \phi - \sin \phi \right) \frac{\partial}{\partial \theta} - \left(\frac{\sin \phi}{r \sin \theta} + \frac{\cos \theta \cos \phi}{\sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \right],$$

$$W_2 = \frac{1}{2i} \left[(1+r^2) \sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{1}{r} \cos \theta \sin \phi + \cos \phi \right) \frac{\partial}{\partial \theta} - \left(\frac{\cos \theta \sin \phi}{\sin \theta} - \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \right],$$

$$W_3 = \frac{1}{2i} \left[(1+r^2) \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \phi} \right].$$

El operador de Casimir del grupo de rotaciones W^2 es:

$$W^2 = -\frac{1+r^2}{4} \left[(1+r^2) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2(1+r^2)}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\} \right].$$

Los operadores de espín de subida(up) y bajada(down) definidos como habitualmente por $W_{\pm} = W_1 \pm iW_2$, son

$$W_+ = \frac{e^{i\phi}}{2i} \left[(1+r^2) \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\cos \theta + ir}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} - \left(\frac{r \cos \theta - i}{r \sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \right],$$

$$W_- = \frac{e^{-i\phi}}{2i} \left[(1+r^2) \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\cos \theta - ir}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} - \left(\frac{r \cos \theta + i}{r \sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \right].$$

Satisfacen las reglas de conmutación

$$[W_3, W_+] = W_+, \quad [W_3, W_-] = -W_-, \quad [W_+, W_-] = 2W_3.$$

Podemos verificar que $(W_i)^* = -W_i$ y que $W_+ = -(W_-)^*$, donde $*$ significa tomar el complejo conjugado del correspondiente operador.

Si $F_s^m(r, \theta, \phi)$ es una función propia de W^2 y W_3 , satisface las ecuaciones diferenciales:

$$W^2 F_s^m(r, \theta, \phi) = s(s+1)F_s^m(r, \theta, \phi), \quad W_3 F_s^m(r, \theta, \phi) = mF_s^m(r, \theta, \phi).$$

Para obtener soluciones de este sistema, vamos a proceder de la siguiente manera. Primero vamos a calcular las funciones propias de la forma F_s^s . Sobre ellas el operador W_+ nos produce $W_+ F_s^s = 0$ y después, actuando sucesivamente con el operador W_- obtendremos las restantes funciones propias F_s^m de la misma representación irreducible caracterizada por el parámetro s y para $-s \leq m \leq s$. El objetivo es encontrar primero las funciones F_s^s .

Consideremos que podemos escribir las funciones F_s^s en variables separadas en la forma $F_s^s(r, \theta, \phi) = A(r)B(\theta)C(\phi)$. Entonces

$$W_3 A(r)B(\theta)C(\phi) = sA(r)B(\theta)C(\phi)$$

da lugar a

$$(1+r^2)\cos\theta A'BC - \frac{\sin\theta}{r} AB'C + ABC' = 2isABC$$

donde A' es la derivada de A y así con las demás, y dividiendo ambos lados por ABC llegamos a

$$(1+r^2)\cos\theta \frac{A'(r)}{A(r)} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{B'(\theta)}{B(\theta)} + \frac{C'(\phi)}{C(\phi)} = 2is.$$

El tercer término de la izquierda debe ser constante, ya que los demás términos son independientes de ϕ . Este término lo ponemos como $C'(\phi)/C(\phi) = ik$ y por lo tanto $C(\phi) = e^{ik\phi}$, salvo un factor constante arbitrario. Como $C(\phi + 2\pi) = C(\phi)$ implica que la constante k debe ser un entero. Las otras dos funciones satisfacen:

$$r(1+r^2)\cos\theta A'B - \sin\theta AB' + ir(k-2s)AB = 0. \quad (3.60)$$

Si existen soluciones con funciones reales A y B , entonces necesariamente $k = 2s$ de tal manera que el valor propio s puede ser un entero o un semientero, y la ecuación (3.60) se puede separar en la forma:

$$r(1+r^2)\frac{A'(r)}{A(r)} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \frac{B'(\theta)}{B(\theta)} = p = \text{constante}, \quad (3.61)$$

cuya solución general, salvo un factor global constante, es

$$A(r) = \left(\frac{r^2}{1+r^2} \right)^{p/2}, \quad B(\theta) = (\sin\theta)^p.$$

Si actuamos sobre esta solución $F_s^s \equiv A(r)B(\theta)C(\phi)$, con W_+ , como debe ser $W_+ F_s^s = 0$, nos produce:

$$r(1+r^2)\sin^2\theta A'B + (\sin\theta\cos\theta + ir\sin\theta)AB' - 2s(ir\cos\theta + 1)AB = 0.$$

Dividiendo ambos miembros por AB , teniendo en cuenta (3.61), obtenemos para los parámetros la condición $(p-2s)(1+ir\cos\theta) = 0$. Entonces existen soluciones reales en variables separadas, para todo $p = 2s = k$. Vienen dadas, salvo un factor global constante, por:

$$F_s^s(r, \theta, \phi) = \left(\frac{r^2}{1+r^2} \right)^s (\sin\theta)^{2s} e^{i2s\phi}. \quad (3.62)$$

Para $s = 1/2$ y después de la acción con W_- obtenemos los dos vectores ortogonales

$$\Psi_{1/2}^{1/2} = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \sin \theta e^{i\phi}, \quad W_- \Psi_{1/2}^{1/2} = \Psi_{1/2}^{-1/2} = \frac{r \cos \theta + i}{\sqrt{1+r^2}},$$

que producen una representación bidimensional del grupo de rotaciones. Podemos verificar que $W_- \Psi_{1/2}^{-1/2} = 0$.

Del análisis de la estructura de los operadores W_{\pm} , si tomamos el complejo conjugado de la expresión $W_+ F_s^s = 0$ obtenemos $-W_- (F_s^s)^* = 0$ y por lo tanto $(F_s^s)^* \sim G_s^{-s}$ de tal manera que tomando los espinores complejos conjugados de la anterior representación, obtenemos otro par de espinores ortogonales correspondientes a $s = 1/2$.

$$\tilde{\Psi}_{1/2}^{1/2} = \frac{r \cos \theta - i}{\sqrt{1+r^2}}, \quad \tilde{\Psi}_{1/2}^{-1/2} = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \sin \theta e^{-i\phi}.$$

Las restantes representaciones para espines superiores se pueden obtener por el mismo procedimiento. Otra forma es obtenerlas mediante productos tensoriales de las dos representaciones irreducibles bidimensionales anteriores. Por ejemplo, para $s = 1$ podemos obtener tres representaciones ortogonales. Si de (3.62) con $s = 1$ y actuando con el operador W_- obtenemos

$$\begin{aligned} \Psi_1^1 &= (\Psi_{1/2}^{1/2})^2 = \frac{r^2}{1+r^2} \sin^2 \theta e^{i2\phi}, \\ \Psi_1^0 &= (\Psi_{1/2}^{1/2})(\Psi_{1/2}^{-1/2}) = \frac{r}{1+r^2} \sin \theta (i + r \cos \theta) e^{i\phi}, \\ \Psi_1^{-1} &= (\Psi_{1/2}^{-1/2})^2 = \frac{(i + r \cos \theta)^2}{1+r^2}, \end{aligned}$$

que también puede obtenerse como el producto tensorial de $\Psi \otimes \Psi$.

Si hubiéramos trabajado en la representación canónica, donde los parámetros son $\alpha = \alpha \mathbf{n}$, esto equivale a reemplazar la variable $r = \tan(\alpha/2)$ en términos del parámetro α y expresar el operador diferencial $\partial/\partial r$ en términos de $\partial/\partial \alpha$, por lo que los operadores de espín quedan

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2i} \left[2 \sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \alpha} + \left(\frac{\cos \theta \cos \phi}{\tan(\alpha/2)} - \sin \phi \right) \frac{\partial}{\partial \theta} - \left(\frac{\sin \phi}{\tan(\alpha/2) \sin \theta} + \frac{\cos \theta \cos \phi}{\sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \right], \\ W_2 &= \frac{1}{2i} \left[2 \sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \alpha} + \left(\frac{\cos \theta \sin \phi}{\tan(\alpha/2)} + \cos \phi \right) \frac{\partial}{\partial \theta} - \left(\frac{\cos \theta \sin \phi}{\sin \theta} - \frac{\cos \phi}{\tan(\alpha/2) \sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \right], \\ W_3 &= \frac{1}{2i} \left[2 \cos \theta \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\sin \theta}{\tan(\alpha/2)} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \phi} \right], \\ W^2 &= - \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\tan(\alpha/2)} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{1}{4 \sin^2(\alpha/2)} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\} \right], \\ W_+ &= \frac{e^{i\phi}}{2i} \left[2 \sin \theta \frac{\partial}{\partial \alpha} + \left(\frac{\cos \theta}{\tan(\alpha/2)} + i \right) \frac{\partial}{\partial \theta} - \left(\frac{\cos \theta \tan(\alpha/2) - i}{\tan(\alpha/2) \sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \right], \\ W_- &= \frac{e^{-i\phi}}{2i} \left[2 \sin \theta \frac{\partial}{\partial \alpha} + \left(\frac{\cos \theta}{\tan(\alpha/2)} - i \right) \frac{\partial}{\partial \theta} - \left(\frac{\cos \theta \tan(\alpha/2) + i}{\tan(\alpha/2) \sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \end{aligned}$$

y los espinores de las dos representaciones ortogonales bidimensionales se escriben como

$$\Psi_{1/2}^{1/2} = i \sin \frac{\alpha}{2} \sin \theta e^{i\phi}, \quad \Psi_{1/2}^{-1/2} = \cos \frac{\alpha}{2} - i \sin \frac{\alpha}{2} \cos \theta \quad (3.63)$$

y

$$\tilde{\Psi}_{1/2}^{1/2} = \cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \cos \theta, \quad \tilde{\Psi}_{1/2}^{-1/2} = -i \sin \frac{\alpha}{2} \sin \theta e^{-i\phi}. \quad (3.64)$$

Se ha mencionado que los anteriores espinores son ortogonales. Para dotar a este espacio de funciones con una estructura de espacio de Hilbert es necesario definir un producto escalar, hermitico, definido positivo. La matriz Jacobiana de las variables ρ' en términos de las variables ρ dada en (3.39), posee por determinante

$$\det \left(\frac{\partial \rho'^i}{\partial \rho^j} \right) = \frac{(1 + \mu^2)^2}{(1 - \mu \cdot \rho)^4},$$

y la transformación del elemento de volumen

$$d^3 \rho' = \frac{(1 + \mu^2)^2}{(1 - \mu \cdot \rho)^4} d^3 \rho.$$

A partir de (3.39) obtenemos que

$$1 + \rho'^2 = \frac{(1 + \mu^2)}{(1 - \mu \cdot \rho)^2} (1 + \rho^2)$$

por lo que la medida

$$\frac{d^3 \rho'}{(1 + \rho'^2)^2} = \left(\frac{(1 - \mu \cdot \rho)^2}{(1 + \mu^2)(1 + \rho^2)} \right)^2 \frac{(1 + \mu^2)^2}{(1 - \mu \cdot \rho)^4} d^3 \rho = \frac{d^3 \rho}{(1 + \rho^2)^2}$$

es de hecho una medida invariante.

En coordenadas esféricas se escribe como

$$\frac{r^2 \sin \theta}{(1 + r^2)^2} dr d\theta d\phi$$

y en la representación normal es

$$\sin^2(\alpha/2) \sin \theta d\alpha d\theta d\phi.$$

Como el grupo de rotaciones es un grupo doblemente conexo, la medida anterior tiene que estar definida sobre una variedad simplemente conexas, es decir, sobre el grupo recubridor universal del grupo de rotaciones $SO(3)$, que es el grupo $SU(2)$. La variedad del grupo $SU(2)$ en la representación canónica viene dada por la esfera tridimensional de radio 2π en la que los puntos de su superficie representan a un único elemento de $SU(2)$, la matriz unitaria 2×2 , $-\mathbb{I}$. La medida invariante y normalizada resulta ser

$$d\mu_N(\alpha, \theta, \phi) \equiv \frac{1}{4\pi^2} \sin^2(\alpha/2) \sin \theta d\alpha d\theta d\phi. \quad (3.65)$$

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{4\pi^2} \sin^2(\alpha/2) \sin \theta = 1.$$

Por lo tanto, el producto escalar hermitico queda definido como

$$\langle f | g \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi f^*(\alpha, \theta, \phi) g(\alpha, \theta, \phi) \sin^2(\alpha/2) \sin \theta, \quad (3.66)$$

donde f^* es la función compleja conjugada de la f .

Los anteriores espinores son vectores ortogonales con respecto a esta medida invariante (3.65). En particular, los espinores normalizados correspondientes a $s = 1/2$ vienen dados en (3.63)-(3.64), multiplicados por el factor $\sqrt{2}$.

Los operadores de espín proyectados en los ejes del cuerpo \mathbf{e}_i , vienen dados en (3.53) en la parametrización $\boldsymbol{\rho}$, y hemos visto que difieren de los operadores \mathbf{W} únicamente en el cambio $\boldsymbol{\rho} \rightarrow -\boldsymbol{\rho}$, seguido de un cambio global de signo. Esto corresponde en la parametrización canónica al cambio $\alpha \rightarrow -\alpha$, seguido del cambio global de signo.

Se puede verificar, como se ha mencionado anteriormente, que

$$[T_i, T_k] = -i\epsilon_{ikl} T_l, \quad (3.67)$$

$$[W_i, T_k] = 0. \quad (3.68)$$

Como $W^2 = T^2$ podemos encontrar vectores propios comunes de los operadores W^2 , W_3 y T_3 , que los denotaremos por $D_{mn}^{(s)}(\boldsymbol{\alpha})$ de tal manera que

$$\begin{aligned} W^2 D_{mn}^{(s)}(\boldsymbol{\alpha}) &= s(s+1) D_{mn}^{(s)}(\boldsymbol{\alpha}), \\ W_3 D_{mn}^{(s)}(\boldsymbol{\alpha}) &= m D_{mn}^{(s)}(\boldsymbol{\alpha}), \\ T_3 D_{mn}^{(s)}(\boldsymbol{\alpha}) &= n D_{mn}^{(s)}(\boldsymbol{\alpha}). \end{aligned}$$

Como $W_3(\alpha) D_{mn}^{(s)}(\alpha) = m D_{mn}^{(s)}(\alpha)$, si producimos el cambio $\alpha \rightarrow -\alpha$ obtenemos que $W_3(-\alpha) D_{mn}^{(s)}(-\alpha) = m D_{mn}^{(s)}(-\alpha)$ y el posterior cambio global de signo lo reduce a

$$-W_3(-\alpha) D_{mn}^{(s)}(-\alpha) = T_3(\alpha) D_{mn}^{(s)}(-\alpha) = -m D_{mn}^{(s)}(-\alpha),$$

por lo que los anteriores espinores (3.63)-(3.64) son también vectores propios de T_3 .

Con esta notación, los cuatro espinores normalizados, denotados por los correspondientes valores propios $|s, m, n\rangle$, son

$$\Phi_1 = |1/2, 1/2, 1/2\rangle = \sqrt{2}(\cos(\alpha/2) + i \cos \theta \sin(\alpha/2)), \quad (3.69)$$

$$\Phi_2 = |1/2, -1/2, 1/2\rangle = i\sqrt{2} \sin(\alpha/2) \sin \theta e^{-i\phi}, \quad (3.70)$$

$$\Phi_3 = |1/2, 1/2, -1/2\rangle = i\sqrt{2} \sin(\alpha/2) \sin \theta e^{i\phi}. \quad (3.71)$$

$$\Phi_4 = |1/2, -1/2, -1/2\rangle = \sqrt{2}(\cos(\alpha/2) - i \cos \theta \sin(\alpha/2)), \quad (3.72)$$

Forman un conjunto ortonormal con respecto a la medida normalizada e invariante (3.65) y con respecto al producto escalar definido en (3.66). Podemos comprobar que los operadores de bajada $W_- \Phi_1 = \Phi_2$, $W_- \Phi_2 = 0$, $W_- \Phi_3 = \Phi_4$, $W_- \Phi_4 = 0$, y análogamente $T_- \Phi_1 = 0$, $T_- \Phi_3 = \Phi_1$, $T_- \Phi_2 = 0$, and $T_- \Phi_4 = \Phi_2$, y las correspondientes relaciones cuando se actúa con los operadores que suben W_+ y T_+ , respectivamente. Observar que debido al signo opuesto en las relaciones de conmutación de los operadores T_i , los operadores T_{\pm} operan en sentido contrario.

Un aspecto importante que conviene resaltar es que para las partículas de espín 1/2, a pesar de que las representaciones irreducibles correspondientes a $s = 1/2$, son bidimensionales, para describir la parte del espín de la función de onda, necesitamos una función compleja de un espacio de Hilbert de dimensión cuatro, ya que para describir la orientación de la partícula, tenemos que asociar a la misma un sistema de referencia local, por lo que además de la proyección del espín en el sistema del laboratorio \mathbf{W} , poseemos como observables las proyecciones del espín en los ejes del cuerpo \mathbf{T} , las cuales deben ser incluidas porque son operadores que conmutan con los anteriores.

3.3.5. Representación matricial de los observables internos

La representación matricial de cualquier observable A que actúa sobre las variables de orientación o en el espacio de Hilbert de dimensión cuatro generado por estos cuatro espinores de

espín 1/2, Φ_i , se obtiene de $A_{ij} = \langle \Phi_i | A \Phi_j \rangle$, $i, j = 1, 2, 3, 4$. Una vez que fijamos estos cuatro vectores básicos normalizados, cuando los operadores actúan sobre el subespacio que ellos generan, los diferentes operadores diferenciales como W_i y T_i , van a tener una representación matricial 4×4 por bloques de la forma:

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{W} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (3.73)$$

$$T_1 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & i\mathbb{I} \\ -i\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad (3.74)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ son las tres matrices de Pauli y \mathbb{I} representa la matriz unidad 2×2 . Hemos incluido la constante de Planck en los operadores de momento angular.

Si de forma análoga calculamos la representación matricial de las nueve componentes, en esa misma base, de los tres vectores unidad $(\mathbf{e}_i)_j$, $i, j = 1, 2, 3$ que definen la orientación de la partícula, obtenemos las nueve matrices hermiticas de traza nula

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & i\boldsymbol{\sigma} \\ -i\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (3.75)$$

Podemos verificar que $T_i = \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{S}$. Vemos que en general las diferentes componentes de los vectores unidad \mathbf{e}_i , no conmutan entre sí. Los valores propios de cada componente e_{ij} , en esta representación matricial son $\pm 1/3$. Sin embargo, la representación matricial del cuadrado de cada una de las componentes es $(e_{ij})^2 = \mathbb{I}/3$, de tal forma que la magnitud al cuadrado de cada vector unidad es efectivamente $\mathbf{e}_i^2 = \sum_j (e_{ij})^2 = \mathbb{I}$, la matriz unidad. Los valores propios de los operadores $(e_{ij})^2$ no son los cuadrados de los valores propios de los operadores e_{ij} . Esto es debido a que en general, la función $e_{ij}\Phi_k$ no pertenece al mismo espacio que el que generan las funciones Φ_k , $k = 1, \dots, 4$, a pesar de que este subespacio es invariante bajo los operadores W_i y T_j . De hecho, cada función $e_{ij}\Phi_k$ es una combinación lineal de un espinor de espín 1/2 y de un espinor de espín 3/2.

No se entiende por qué cualquier componente del vector unidad \mathbf{e}_i de un sistema cartesiano puede tener como valores propios $\pm 1/3$ en el caso cuántico y su cuadrado $(e_{ij})^2 = \mathbb{I}/3$ en vez de ser $\mathbb{I}/9$.

3.3.6. Teorema de Peter-Weyl para grupos compactos

Los espinores que acabamos de obtener, pueden ser obtenidos también por medio de un teorema importante relativo a las representaciones de grupos compactos, y que se conoce en la literatura como el teorema de Peter-Weyl ¹¹. Lo vamos a enunciar sin demostración la cual se puede encontrar en cualquiera de las referencias citadas.

Teorema.- Sea $D^{(s)}(g)$ un sistema completo de representaciones unitarias no equivalentes e irreducibles de un grupo compacto G , enumeradas por el parámetro s . Sea d_s la dimensión de la correspondiente representación y $D_{ij}^{(s)}(g)$, $1 \leq i, j \leq d_s$ los correspondientes elementos matriciales. Entonces, las funciones

$$\sqrt{d_s} D_{ij}^{(s)}(g), \quad 1 \leq i, j \leq d_s$$

¹¹ N. Ja. Vilenkin, *Fonctions spéciales et Théorie de la représentation des groupes*, Dunod, Paris (1969), p. 39.

A.O. Barut and R. Raczyka, *Theory of group representations and applications*, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa (1980), p. 174.

F. Peter and H. Weyl, *Math. Ann.* **7**, 735 (1927).

forman un conjunto ortonormal completo sobre G , con respecto a una medida normalizada e invariante $\mu_N(g)$ definida sobre este grupo, es decir,

$$\int_G \sqrt{d_s} D_{ij}^{(s)*}(g) \sqrt{d_r} D_{kl}^{(r)}(g) d\mu_N(g) = \delta^{sr} \delta_{ik} \delta_{jl}. \quad (3.76)$$

Que el conjunto es completo significa que cada función de cuadrado integrable definida sobre G , $f(g)$, admite un desarrollo en serie, convergente en norma, en términos de las funciones ortogonales anteriores $D_{ij}^{(s)}(g)$, en la forma

$$f(g) = \sum_{s,i,j} a_{ij}^{(s)} \sqrt{d_s} D_{ij}^{(s)}(g),$$

y donde los coeficientes, en general números complejos $a_{ij}^{(s)}$, se obtienen a partir de

$$a_{ij}^{(s)} = \int_G \sqrt{d_s} D_{ij}^{(s)*}(g) f(g) d\mu_N(g).$$

En nuestro caso, $SU(2)$ considerado como la variedad de un grupo, es la esfera tridimensional simplemente conexa de radio 2π , con una medida normalizada e invariante dada por (3.65),

$$d\mu_N(\alpha, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi^2} \sin \theta \sin(\alpha/2)^2 d\alpha d\theta d\phi.$$

En la parametrización normal, las representaciones bidimensionales de $SU(2)$ corresponden a los valores propios $s = 1/2$ de S^2 y la representación matricial está dada por

$$D^{(1/2)}(\boldsymbol{\alpha}) = \cos(\alpha/2)\mathbb{I} - i \sin(\alpha/2)(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}),$$

es decir,

$$D^{(1/2)}(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) - i \cos \theta \sin(\alpha/2) & -i \sin \theta \sin(\alpha/2) e^{-i\phi} \\ -i \sin \theta \sin(\alpha/2) e^{i\phi} & \cos(\alpha/2) + i \cos \theta \sin(\alpha/2) \end{pmatrix}.$$

Si comparamos estas componentes matriciales con los cuatro espinores ortogonales dados en (3.69)-(3.72) vemos que

$$D^{(1/2)}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Phi_4 & -\Phi_2 \\ -\Phi_3 & \Phi_1 \end{pmatrix} \quad (3.77)$$

En la representación tridimensional de $SO(3)$, considerada como una representación de $SU(2)$

$$D_{ij}^{(1)}(\boldsymbol{\alpha}) = \delta_{ij} \cos \alpha + u_i u_j (1 - \cos \alpha) + \epsilon_{ikj} u_k \sin \alpha \equiv e_{ji}$$

obtenemos otro conjunto de nueve funciones ortogonales. Multiplicadas por $\sqrt{3}$ forman otro conjunto ortonormal ortogonal al conjunto anterior de cuatro espinores. Resulta un buen ejercicio el verificar esta ortogonalidad, realizando las correspondientes integrales por medios manuales o haciendo uso de algún programa de cálculo algebraico.

3.3.7. Espinores generales

En el caso de que la parte del zitterbewegung no sea nula, podemos obtener también espinores de espín 1/2 como parte de las representaciones irreducibles contenidas en el producto tensorial de los estados de espín 1 y espín 1/2, de las funciones $U(\mathbf{u})$ y $V(\boldsymbol{\rho})$, respectivamente, en que se descompone la función de onda más general (3.55).

El espín total de la partícula es de la forma

$$\mathbf{S} = \mathbf{u} \times \mathbf{U} + \mathbf{W} = \mathbf{Z} + \mathbf{W},$$

donde $\mathbf{Z} = -i\hbar\mathbf{u} \times \nabla_{\mathbf{u}}$ y \mathbf{W} viene dado en (3.48). Las proyecciones del espín en los ejes del cuerpo, es decir los operadores $T_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{W}$, vienen descritos en (3.53). Satisfacen las reglas de conmutación:

$$\begin{aligned} [\mathbf{Z}, \mathbf{Z}] &= i\mathbf{Z}, & [\mathbf{W}, \mathbf{W}] &= i\mathbf{W}, & [\mathbf{T}, \mathbf{T}] &= i\mathbf{T}, \\ [\mathbf{Z}, \mathbf{W}] &= 0, & [\mathbf{Z}, \mathbf{T}] &= 0, & [\mathbf{W}, \mathbf{T}] &= 0. \end{aligned}$$

Estas reglas de conmutación son invariantes bajo el cambio $\boldsymbol{\rho}$ por $-\boldsymbol{\rho}$ en la definición de los operadores \mathbf{W} y \mathbf{T} , puesto que se intercambian uno en otro. Finalmente, la expresión de los vectores unidad ligados a la partícula \mathbf{e}_i vienen dados en (3.50) y (3.51).

Podemos ver que estas componentes de los vectores unidad y los operadores W_i y T_j , satisfacen las siguientes propiedades:

- 1) $e_{ij}(-\alpha, \theta, \phi) = -e_{ji}(\alpha, \theta, \phi)$.
- 2) $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{W} \equiv \sum_j e_{ij} W_j = T_i$.
- 3) $\sum_j \mathbf{e}_j T_j = \mathbf{W}$.
- 4) Para todo i, j , la acción $W_i e_{ji} = 0$, sin suma sobre el índice i .
- 5) Para todo i, j , la acción $T_i e_{ij} = 0$, sin suma sobre el índice i .
- 6) Para todo i, j, k , con $i \neq j$, tenemos que $W_i e_{kj} + W_j e_{ki} = 0$, y en el caso de que $i = j$, nos lleva a la propiedad 4.
- 7) Para todo i, j, k , con $i \neq j$, tenemos que $T_i e_{jk} + T_j e_{ik} = 0$, y análogamente al caso anterior, cuando $i = j$ nos lleva de nuevo a la propiedad 4.

Esto implica que $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{W} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_i = T_i$, debido a la propiedad 4, cuando actúa sobre una función arbitraria f ,

$$(\mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_i) f \equiv \sum_j W_j (e_{ij} f) = f \sum_j W_j (e_{ij}) + \sum_j e_{ij} W_j (f) = T_i(f),$$

debido a que $\sum_j W_j e_{ij} = 0$.

De la misma manera $\sum_j \mathbf{e}_j T_j \equiv \sum_j T_j \mathbf{e}_j = \mathbf{W}$.

Fijemos ahora el valor del espín. Podemos describir partículas de cualquier valor de su espín. Consideremos sin embargo los espines de valor más bajo. Para partículas de espín $1/2$, si tomamos por simplicidad las funciones propias $V(\boldsymbol{\rho})$ de W^2 correspondientes al valor propio $1/2$, como el espín total debe ser $1/2$, la parte orbital \mathbf{Z} debe contribuir solamente con los armónicos esféricos de valor $z = 0$ y $z = 1$.

Si no hay contribución de la parte del zitterbewegung, $z = 0$, las funciones de Wigner se pueden escoger como funciones propias simultáneas de los tres operadores que conmutan W^2 , W_3 , y T_3 , y los correspondientes vectores normalizados $|w, w_3, t_3\rangle$ vienen dados por las funciones (3.69-3.72).

Si tenemos una contribución del zitterbewegung correspondiente al valor $z = 1$, entonces las funciones $U(\mathbf{u})$ son los armónicos esféricos

$$Y_1^1(\beta, \lambda) \equiv |1, 1\rangle = -\sin(\beta) e^{i\lambda} \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad (3.78)$$

$$Y_1^0(\beta, \lambda) \equiv |1, 0\rangle = \sqrt{3} \cos(\beta), \quad (3.79)$$

$$Y_1^{-1}(\beta, \lambda) \equiv |1, -1\rangle = \sin(\beta) e^{-i\lambda} \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad (3.80)$$

normalizados con respecto a la medida invariante

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi} \sin(\beta) d\beta d\lambda = 1.$$

Se representan en la forma de funciones propias $|z, z_3 \rangle$ de \mathbf{Z}^2 y Z_3 , donde las variables β y λ representan la orientación del vector velocidad \mathbf{u} .

La representación producto tensorial del grupo de rotaciones contruída a partir de las dos representaciones irreducibles, la $\mathbf{1}$ asociada a los armónicos esféricos (3.78)-(3.80) y la representación $\mathbf{1}/2$ dada en (3.69)-(3.72) se descompone en la suma directa de representaciones irreducibles $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}/2 = \mathbf{3}/2 \oplus \mathbf{1}/2$.

Las siguientes funciones de las cinco variables compactas $\beta, \lambda, \alpha, \theta$ y ϕ , donde las variables β y λ son las mismas que las de los armónicos esféricos Y_l^m , y las restantes α, θ y ϕ , provienen de los espinores Φ_i , representan funciones normalizadas de espín $1/2$, $|s, s_3, t_3 \rangle$ que son vectores propios de los operadores S^2, S_3 y T_3

$$\Psi_1 \equiv |1/2, 1/2, 1/2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(Y_1^0 \Phi_1 - \sqrt{2} Y_1^1 \Phi_2 \right), \quad (3.81)$$

$$\Psi_2 \equiv |1/2, -1/2, 1/2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-Y_1^0 \Phi_2 + \sqrt{2} Y_1^{-1} \Phi_1 \right), \quad (3.82)$$

$$\Psi_3 \equiv |1/2, 1/2, -1/2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(Y_1^0 \Phi_3 - \sqrt{2} Y_1^1 \Phi_4 \right), \quad (3.83)$$

$$\Psi_4 \equiv |1/2, -1/2, -1/2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-Y_1^0 \Phi_4 + \sqrt{2} Y_1^{-1} \Phi_3 \right). \quad (3.84)$$

Podemos verificar que $\Psi_2 = S_- \Psi_1$ y análogamente $\Psi_4 = S_- \Psi_3$, y en otra dirección $\Psi_3 = T_- \Psi_1$, y $\Psi_4 = T_- \Psi_2$. No son vectores propios del operador W_3 , a pesar de que generan un espacio vectorial invariante para los operadores S^2, S_3 y T_3 . En esta base (3.81)-(3.84) formada por los vectores ortonormales Ψ_i , la representación matricial del espín es

$$\mathbf{S} = \mathbf{Z} + \mathbf{W} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (3.85)$$

mientras que la representación matricial de \mathbf{Z} y de \mathbf{W} es

$$\mathbf{Z} = \frac{2\hbar}{3} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \frac{-\hbar}{6} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (3.86)$$

los cuales no satisfacen las reglas de conmutación de un momento angular debido a que el espacio sobre el que actúan no es un espacio invariante para estos operadores \mathbf{Z} y \mathbf{W} . Se puede observar que \mathbf{Z} tiene la misma orientación que el espín \mathbf{S} , ya que es un múltiplo positivo de él, mientras que \mathbf{W} tiene la opuesta, como se sugiere de la figura de la portada.

$$S^2 = \frac{3}{4}\mathbb{I}, \quad S = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbb{I}, \quad Z^2 = \frac{4}{3}\mathbb{I}, \quad Z = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathbb{I}, \quad W^2 = \frac{1}{12}\mathbb{I}, \quad W = \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathbb{I}.$$

El módulo de \mathbf{S} , S vale $\sqrt{3}/2$, mientras que el de \mathbf{Z} resulta ser $2/\sqrt{3}$, es decir $4/3$ del anterior, mientras que la parte \mathbf{W} su módulo es $1/2\sqrt{3}$, es decir $1/3$ del módulo de \mathbf{S} pero en sentido contrario. Se puede observar que al ser \mathbf{Z} opuesto a \mathbf{W} , resulta que el módulo $S = Z - W = \sqrt{3}/2$. Esto justifica que desde el punto de vista cuántico hayamos representado estos operadores con la orientación relativa que aparece en la figura de la portada, con \mathbf{Z} en la misma dirección que \mathbf{S} y en sentido contrario la \mathbf{W} . Si observamos a los espinores Ψ_i , éstos son vectores propios de Z^2 con valor propio $1(1+1) = 2$, y de W^2 con valor propio $1/2(1/2+1) = 3/4$, pero no son vectores propios de Z_3 y de W_3 . De hecho, la acción de estos operadores nos saca de este espacio vectorial de dimensión 4. No es un espacio de una representación irreducible de estos operadores de espín, Z_i y W_i , pero sí de los operadores S_i , de los que es una suma directa de dos representaciones irreducibles de valor $s = 1/2$.

La proyección del operador de espín \mathbf{W} sobre los ejes del cuerpo, es decir, los operadores \mathbf{T} , toman la misma forma que en el caso anterior (3.74)

$$T_1 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & i\mathbb{I} \\ -i\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad (3.87)$$

ya que las funciones Ψ_1 y Ψ_2 son vectores propios de T_3 con valor propio $1/2$, mientras que las funciones Ψ_3 y Ψ_4 lo son con valor propio $-1/2$, y por lo tanto los espinores Ψ_i generan un espacio invariante para los operadores S_i y T_j . En efecto, la base formada por las funciones propias simultáneas del operador espín total S^2 , S_3 y T_3 , y la representación de los ket, es la misma que en el caso de los Φ_i dados en (3.69)-(3.72).

La expresión en esta base de las componentes de los vectores unidad \mathbf{e}_i viene dada por

$$\mathbf{e}_1 = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & i\boldsymbol{\sigma} \\ -i\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (3.88)$$

Podemos observar que las matrices de los operadores $\mathbf{W} = T_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i T_i$, pero los T_i no se pueden obtener de la representación matricial como $T_i = \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_i$, ya que el espacio de Hilbert de dimensión 4 generado por los espinores Ψ_i , (3.81)-(3.84), no es irreducible para los operadores e_{ij} y los W_i , pero sí lo es para los T_i .

3.4. Resumen de Mecánica Clásica y Cuántica

Vamos a esquematizar aspectos generales de la descripción de sistemas elementales clásicos y cuánticos.

Mecánica Clásica

Estados: Cada punto $x \in X$ del espacio cinemático X .

Partícula elemental: X es un espacio homogéneo del grupo cinemático G .

Observables : Toda función de las variables cinemáticas y de sus derivadas.

Transformación del estado: $x' = gx \equiv f(x, g)$, $g \in G$.

Partícula elemental: $\tilde{L}_0 = T\dot{t} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\omega}$.

Transformación de la Lagrangiana: $\tilde{L}'(x', \dot{x}') = \tilde{L}(x, \dot{x}) + d\alpha(g, x)/d\tau$

Interacción: $\tilde{L}_I = -eA_0(t, \mathbf{r})\dot{t} + e\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}}$.

Constantes Noetherianas (no rel.) $\mathcal{G} \otimes SO(3)_L$:

$$H = -T - \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{U}}{dt}, \quad \mathbf{P} = m\mathbf{u} - \frac{d\mathbf{U}}{dt}, \quad \mathbf{K} = m\mathbf{r} - \mathbf{P}t - \mathbf{U}, \quad \mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{u} \times \mathbf{U} + \mathbf{W},$$

$$T_i = \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Constantes Noetherianas (relativ.) $\mathcal{P} \otimes SO(3)_L$:

$$H = -T - \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{U}}{dt}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{R} - \frac{d\mathbf{U}}{dt}, \quad \mathbf{K} = H\mathbf{r}/c^2 - \mathbf{P}t - \mathbf{S} \times \mathbf{u}/c^2, \quad \mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{u} \times \mathbf{U} + \mathbf{W},$$

$$T_i = \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Invariantes (no relativ.)

$$m, \quad H - \frac{\mathbf{P}^2}{2m} = 0, \quad \mathbf{S}_{CM}^2 = \left(\mathbf{J} - \frac{1}{m} \mathbf{K} \times \mathbf{P} \right)^2, \quad \mathbf{T}^2$$

Invariantes (relativ.)

$$p_\mu p^\mu = (H/c)^2 - \mathbf{P}^2 = m^2 c^2, \quad w_\mu w^\mu = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{S}_{CM})^2 - (H\mathbf{S}_{CM}/c)^2 = -m^2 c^2 S^2, \quad \mathbf{T}^2.$$

$$\mathbf{S}_{CM} = \mathbf{J} - \mathbf{q} \times \mathbf{P}, \quad H\mathbf{S}_{CM}/c = H\mathbf{J}/c^2 - \mathbf{K} \times \mathbf{P}, \quad \mathbf{K} = H\mathbf{q}/c^2 - \mathbf{P}t.$$

Mecánica Cuántica

Estados: Cada vector de norma unidad $|\phi\rangle$, $\phi(x) \in \mathbb{L}^2(X)$ del espacio de Hilbert $\mathbb{L}^2(X)$.

Partícula elemental: $\mathbb{L}^2(X)$ es el espacio de una representación proyectiva unitaria irreducible del grupo cinemático G .

Observables : Todo operador lineal autoadjunto sobre el espacio de Hilbert.

Transformación del estado:

$$|\phi'\rangle = U(g)|\phi\rangle, \quad \phi'(x) = U(g)\phi(x) = \phi(g^{-1}x) \exp\left\{\frac{-i}{\hbar}\alpha(g^{-1};x)\right\},$$

y los operadores unitarios y sus generadores infinitesimales

$$U(g) = \exp\left\{\frac{-i}{\hbar}g^\sigma X_\sigma\right\}, \quad X_\sigma = \frac{\hbar}{i}u_\sigma^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} - \lambda_\sigma(x), \quad \lambda_\sigma(x) = \left.\frac{\partial\alpha(g,x)}{\partial g^\sigma}\right|_{g=0}.$$

Generadores (no relativ.) $\mathcal{G} \otimes SO(3)_L$:

$$H = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{P} = \frac{\hbar}{i}\nabla, \quad \mathbf{K} = m\mathbf{r} - \mathbf{P}t - \mathbf{U}, \quad \mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{u} \times \mathbf{U} + \mathbf{W}.$$

$$\mathbf{U} = \frac{\hbar}{i}\nabla_u, \quad \mathbf{W} = \frac{\hbar}{2i}(\nabla_\rho + \boldsymbol{\rho} \times \nabla_\rho + \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_\rho)), \quad \mathbf{S} = \mathbf{u} \times \mathbf{U} + \mathbf{W},$$

$$T_i = \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad \mathbf{T} = \frac{\hbar}{2i}(\nabla_\rho - \boldsymbol{\rho} \times \nabla_\rho + \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_\rho)),$$

Generadores (relativ.) $\mathcal{P} \otimes SO(3)_L$:

$$H = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{P} = \frac{\hbar}{i}\nabla, \quad \mathbf{K} = H\mathbf{r}/c^2 - \mathbf{P}t - \mathbf{S} \times \mathbf{u}/c^2, \quad \mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{u} \times \mathbf{U} + \mathbf{W}.$$

$$\mathbf{U} = \frac{\hbar}{i}\nabla_u, \quad \mathbf{W} = \frac{\hbar}{2i}(\nabla_\rho + \boldsymbol{\rho} \times \nabla_\rho + \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_\rho)), \quad \mathbf{S} = \mathbf{u} \times \mathbf{U} + \mathbf{W}.$$

$$T_i = \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad \mathbf{T} = \frac{\hbar}{2i}(\nabla_\rho - \boldsymbol{\rho} \times \nabla_\rho + \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_\rho)),$$

Invariantes-Operadores de Casimir (no relativ.)

$$m, \quad H - \frac{\mathbf{P}^2}{2m} = 0, \quad \mathbf{S}_{CM}^2 = \left(\mathbf{J} - \frac{1}{m}\mathbf{K} \times \mathbf{P}\right)^2, \quad \mathbf{T}^2 = \mathbf{W}^2$$

Invariantes-Operadores de Casimir (relativ.)

$$p_\mu p^\mu = (H/c)^2 - \mathbf{P}^2 = m^2 c^2, \quad w_\mu w^\mu = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{S}_{CM})^2 - (H\mathbf{S}_{CM}/c)^2 = -m^2 c^2 s(s+1)\hbar^2, \quad \mathbf{T}^2 = \mathbf{W}^2.$$

Ecuación de Dirac

$$H - \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} - \frac{1}{c^2}\mathbf{S} \cdot \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{u}\right) = 0.$$

Capítulo 4

Partícula de Dirac

4.1. Cuantización del modelo $u = c$

Consideremos el modelo de Luxones, con $u = c$ y $\dot{\mathbf{u}} \neq 0$. Estamos describiendo dos tipos de partículas con un movimiento circular del centro de carga alrededor del centro de masa, a la velocidad c .

Para la partícula ($H > 0$), en el sistema de referencia del centro de masa, (ver Fig.4.1) el centro de carga describe un círculo de radio $R_0 = S/mc$, siendo el espín constante y ortogonal al plano de la trayectoria. Para la antipartícula, con la misma orientación del espín, el movimiento de la carga es en sentido contrario al de la figura.

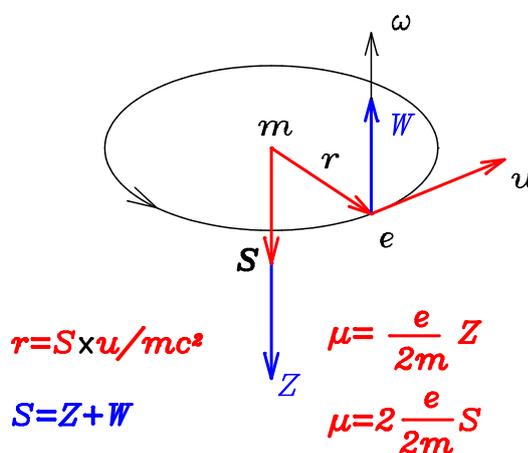


Figura 4.1: Movimiento del centro de carga de la partícula ($H > 0$), para el observador del C.M.

Si hacemos el análisis para el observador del centro de masa, la partícula se reduce a un sistema mecánico de tres grados de libertad: las dos coordenadas x e y del centro de carga en el plano de la trayectoria y la orientación α del sistema cartesiano local asociado al punto y que rota con velocidad angular ω . Pero estos tres grados de libertad no son independientes. La fase α es la misma que la del movimiento orbital. Pensad por ejemplo, que el triedro local sea el triedro de Frenet-Serret. Finalmente, como el movimiento es circular de radio constante, solamente nos queda un sólo grado de libertad, por ejemplo, la coordenada x . Para el observador del centro

de masa, la partícula (y la antipartícula) es equivalente a un oscilador armónico unidimensional de pulsación $\omega = mc^2/S$ y amplitud R_0 , pero en su estado fundamental. El Principio atómico requiere que como oscilador armónico no puede tener estados excitados.

Como la energía del estado fundamental del oscilador armónico unidimensional es $\hbar\omega/2$, si la identificamos con la energía de la partícula en este referencial $+mc^2$, esto implica que el parámetro clásico S tiene que tomar necesariamente el valor $S = \hbar/2$. Todos los sistemas Lagrangianos que posean el mismo espacio cinemático corresponden al ser cuantizados únicamente a partículas (y antipartículas) de espín $1/2$. Y esto es independiente del tipo de Lagrangiana que consideremos y que esté definida en el mismo espacio cinemático.

4.2. Ecuación de Dirac

Las variables cinemáticas de esta partícula transforman bajo \mathcal{P} de acuerdo con

$$t'(\tau) = \gamma t(\tau) + \gamma(\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{r}(\tau))/c^2 + b, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{r}'(\tau) = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{r}(\tau) + \gamma\mathbf{v}t(\tau) + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)c^2}(\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{r}(\tau))\mathbf{v} + \mathbf{a}, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{u}'(\tau) = \frac{R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{u}(\tau) + \gamma\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{u}(\tau))\mathbf{v}\gamma^2/(1+\gamma)c^2}{\gamma(1 + \mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{u}(\tau)/c^2)}, \quad (4.3)$$

$$\boldsymbol{\rho}'(\tau) = \frac{\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\rho}(\tau) + \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\rho}(\tau) + \mathbf{F}_c(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}; \mathbf{u}(\tau), \boldsymbol{\rho}(\tau))}{1 - \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\rho}(\tau) + G_c(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}; \mathbf{u}(\tau), \boldsymbol{\rho}(\tau))}, \quad (4.4)$$

donde las funciones \mathbf{F}_c y G_c vienen dadas en (2.124) y (2.125), respectivamente. Al cuantizar esta partícula, la función de onda es una función compleja $\Phi(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ de todas las variables cinemáticas. Para el grupo de Poincaré todos los exponentes y por lo tanto todas las funciones gauge sobre sus espacios homogéneos son nulas, por lo que las Lagrangianas se pueden escoger estrictamente invariantes. Las representaciones proyectivas son verdaderas representaciones, por lo que los diez generadores sobre el espacio de Hilbert, teniendo en cuenta (4.1)-(4.4) y (3.15) vienen dados por:

$$H = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{P} = \frac{\hbar}{i} \nabla, \quad \mathbf{K} = \mathbf{r} \frac{i\hbar}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} - t \frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \times \mathbf{u}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \frac{\hbar}{i} \nabla + \mathbf{S}, \quad (4.6)$$

donde el operador \mathbf{S} , que es el momento angular con respecto al punto \mathbf{r} , es el operador espín de Dirac, que va a venir dado por el operador diferencial sobre las variables \mathbf{u} y $\boldsymbol{\rho}$

$$\mathbf{S} = \mathbf{u} \times \frac{\hbar}{i} \nabla_u + \frac{\hbar}{2i} \{ \nabla_\rho + \boldsymbol{\rho} \times \nabla_\rho + \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_\rho) \} = \mathbf{u} \times \mathbf{U} + \mathbf{W}, \quad (4.7)$$

siendo ∇_u y ∇_ρ los operadores gradiente con respecto a \mathbf{u} y $\boldsymbol{\rho}$, como en el caso Galileano. El operador \mathbf{S} no es una constante del movimiento, ni siquiera para la partícula libre.

Para obtener el conjunto completo de observables que conmutan, empecemos por el operador de Casimir, u operador de Klein-Gordon

$$H^2 - c^2 \mathbf{P}^2 = m^2 c^4. \quad (4.8)$$

Los operadores H y \mathbf{P} únicamente derivan a la función de onda con respecto al tiempo t y a la posición \mathbf{r} , respectivamente. El operador de espín \mathbf{S} deriva con respecto a la velocidad y la orientación, por lo que conmuta con el operador de Klein-Gordon (4.8). Podemos por lo tanto encontrar funciones propias simultáneas de los operadores (4.8), S^2 y S_3 . Esto nos permite

buscar soluciones en variables separadas, de tal manera que la función de onda la podemos reescribir como

$$\Phi(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = \sum_i \psi_i(t, \mathbf{r}) \chi_i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}), \quad (4.9)$$

donde las $\psi_i(t, \mathbf{r})$ describen la parte espacio-temporal y las $\chi_i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ representan a la parte que describe la estructura del espín. En consecuencia

$$(H^2 - c^2 \mathbf{P}^2 - m^2 c^4) \psi_i(t, \mathbf{r}) = 0, \quad (4.10)$$

cada una de las partes espacio-temporales satisfacen la ecuación the Klein-Gordon, mientras que las que describen la estructura interna, satisfacen

$$S^2 \chi_i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = s(s+1) \hbar^2 \chi_i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}), \quad (4.11)$$

$$S_3 \chi_i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = m_s \hbar \chi_i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}). \quad (4.12)$$

En el Apéndice 3.3 se han encontrado soluciones de estas últimas ecuaciones. En particular, estamos interesados en las soluciones que describan partículas de espín 1/2. Estas soluciones son también vectores propios de la proyección del operador espín sobre los ejes del cuerpo T_3 , por lo que la solución general de un espinor de espín 1/2 es un objeto de cuatro componentes.

Para partículas de espín 1/2, si tomamos como funciones propias las $\chi(\boldsymbol{\rho})$ de S^2 con valor propio 1/2, como el espín total debe ser 1/2, la parte orbital asociada al zitterbewegung $\mathbf{Z} = \mathbf{u} \times \mathbf{U}$ solo puede contribuir con armónicos esféricos de valores propios $z = 0$ y $z = 1$. Esto significa, que desde el punto de vista cuántico podemos encontrar hasta dos representaciones diferentes de partículas de espín 1/2, las caracterizadas por el singlete $z = 0$ (¿leptones?) o por el triplete $z = 1$ (¿quarks?) en tres posibles estados de su componente z_3 . Si hubiéramos denominado a la parte Z del espín como el **color**, podríamos tener dos clases de partículas de Dirac, las que no tienen color (leptones) y las coloreadas (quarks). Los tres colores correspondientes a los valores propios de Z_3 son inobservables porque los estados Ψ_i (3.81-3.84) son vectores propios de S_3 y T_3 pero no de Z_3 . Sin embargo, esta interpretación de Z_3 como si representara el color como en el modelo estándar no es del todo clara.

Para $z = 0$, las funciones de espín 1/2 $\chi_i(\boldsymbol{\rho})$ son combinaciones lineales de las cuatro funciones Φ_i (3.69)-(3.72) y en el caso $z = 1$ son combinaciones lineales de las cuatro Ψ_i de (3.81)-(3.84), de tal manera que el factor que aparece en frente de los armónicos esféricos es 1 porque como $u = c$, resulta ser una constante. El espacio de Hilbert que describe la estructura interna de una partícula de Dirac es isomorfo al espacio de Hilbert cuatridimensional \mathbb{C}^4 .

Si tenemos dos direcciones arbitrarias en el espacio, caracterizadas por los vectores unidad \mathbf{u} y \mathbf{v} respectivamente, y $S_{\mathbf{u}}$ y $S_{\mathbf{v}}$ son las proyecciones del momento angular en esas direcciones, $S_{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{S}$ y $S_{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{S}$, entonces $S_{-\mathbf{u}} = -S_{\mathbf{u}}$, y sus conmutadores son $[S_{\mathbf{u}}, S_{\mathbf{v}}] = i\hbar S_{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}$. En el caso del signo opuesto para las reglas de conmutación de los operadores T_i , por ejemplo, $[T_1, T_2] = -i\hbar T_3$, sugiere que los vectores unidad $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_3$, y sus permutaciones cíclicas $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$. Por lo tanto los vectores unidad \mathbf{e}_i ligados al cuerpo, no solamente poseen como valores propios $\pm 1/3$, sino que se comportan en el caso cuántico como un triedro inverso. En este caso los vectores \mathbf{e}_i no son vectores arbitrarios en el espacio, sino vectores ligados a los ejes del cuerpo que giran y por lo tanto no son observables compatibles, de tal manera que la medida de las componentes, por ejemplo de \mathbf{e}_i , producirá una interacción con el cuerpo que enmascarará la medida de los otros.

Usaremos esta interpretación de un triedro inverso asociado a las partículas más adelante, cuando analicemos la quiralidad en la sección 4.2.6. Para las antipartículas el comportamiento es el contrario, como un triedro directo.

Los operadores S_i y T_i poseen la representación matricial obtenida anteriormente, que es

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{W} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

$$T_1 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & i\mathbb{I} \\ -i\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

donde σ representan las tres matrices de Pauli y \mathbb{I} es la matriz unidad 2×2 .

Análogamente, las representaciones matriciales de las nueve componentes de los vectores unidad $(\mathbf{e}_i)_j$, $i, j = 1, 2, 3$ da lugar a dos conjuntos alternativos de representaciones, dependiendo de que la contribución del zitterbewegung sea $z = 0$ o $z = 1$. En el primer caso, tenemos:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & i\sigma \\ -i\sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

mientras que en el caso $z = 1$ la representación es

$$\mathbf{e}_1 = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & i\sigma \\ -i\sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Conviene observar que las diferentes componentes de los observables \mathbf{e}_i no son, en general, observables compatibles, puesto que vienen representadas por operadores que no conmutan.

Si finalmente escribimos la función de onda para partículas de espín $1/2$ en la siguiente forma, para el caso $z = 0$,

$$\Phi_{(0)}(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{i=4} \psi_i(t, \mathbf{r}) \Phi_i(\alpha, \theta, \phi), \quad (4.17)$$

resulta ser independiente de las variables \mathbf{u} , y en el caso $z = 1$, mediante

$$\Phi_{(1)}(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{i=4} \psi_i(t, \mathbf{r}) \Psi_i(\beta, \lambda; \alpha, \theta, \phi). \quad (4.18)$$

donde β y λ representan la dirección del vector \mathbf{u} . Por lo tanto, una vez que las funciones Φ_i o Ψ_j que describen la estructura interna quedan identificadas con las cuatro funciones ortogonales y de norma unidad (dadas en el apéndice en (4.83-4.86) y ((4.87-4.90)), respectivamente), que son los vectores unidad de una base del espacio de Hilbert interno, \mathbb{C}^4 , la función de onda más general resulta ser un objeto de cuatro componentes. Las seis componentes del espín S_i y T_j , juntamente con las nueve componentes $(\mathbf{e}_i)_j$, y la matriz unidad 4×4 , completamente agotan las 16 matrices hermiticas 4×4 , linealmente independientes. Forman por lo tanto una base vectorial del álgebra de Dirac. De esta forma, cualquier otro observable que sea invariante por traslación, y que describa por lo tanto parte de la estructura interna, por ejemplo el operador velocidad o aceleración, velocidad angular, etc., debe ser posible expresarlo en términos de una combinación lineal real de las 16 matrices mencionadas. Veremos en la Sec. 4.3 que la orientación interna, caracteriza completamente la estructura interna del electrón.

El operador velocidad en la base Ψ_i se calculará en función de sus componentes en coordenadas polares esféricas

$$u_1 = c \sin \beta \cos \lambda, \quad u_2 = c \sin \beta \sin \lambda, \quad u_3 = c \cos \beta.$$

Su representación matricial en esta base es totalmente nula puesto que estos vectores son vectores propios de S^2 , S_3 y T_3 y en estos vectores el valor esperado de los operadores de velocidad es estrictamente cero pero con una gran dispersión.

El operador espín $\mathbf{S} = \mathbf{u} \times \mathbf{U} + \mathbf{W}$ con respecto al centro de carga, que como se ve en (3.85) y (4.13), coincide con la representación habitual del operador espín de Dirac.

4.2.1. Operador de Dirac

Si consideramos la expresión del momento cinemático para las partículas con $u = c$

$$\mathbf{K} = \frac{H}{c^2} \mathbf{r} - t\mathbf{P} - \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \times \mathbf{u}$$

y tomamos la derivada temporal de esta expresión seguida del producto escalar con el vector \mathbf{u} , nos conduce a una expresión invariante Poincaré (Operador de Dirac):

$$H - \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{S} = 0. \quad (4.19)$$

Cuando el operador de Dirac actúa sobre una función de onda cualquiera $\Phi_{(0)}$ o $\Phi_{(1)}$, sabemos que H y \mathbf{P} poseen la representación diferencial dada en (4.5) y el espín la representación diferencial (4.7), o la representación matricial equivalente (4.13), pero en principio no sabemos cómo representar la velocidad \mathbf{u} y el observable $(d\mathbf{u}/dt) \times \mathbf{u}$. Sin embargo, sabemos que para esta partícula \mathbf{u} y $d\mathbf{u}/dt$ son vectores ortogonales y que juntamente con el vector $\mathbf{u} \times d\mathbf{u}/dt$ forman un triedro ortogonal directo, y que para el observador del centro de masa el centro de carga describe un círculo de radio $R_0 = \hbar/2mc$ en el plano que contiene a \mathbf{u} y $d\mathbf{u}/dt$.

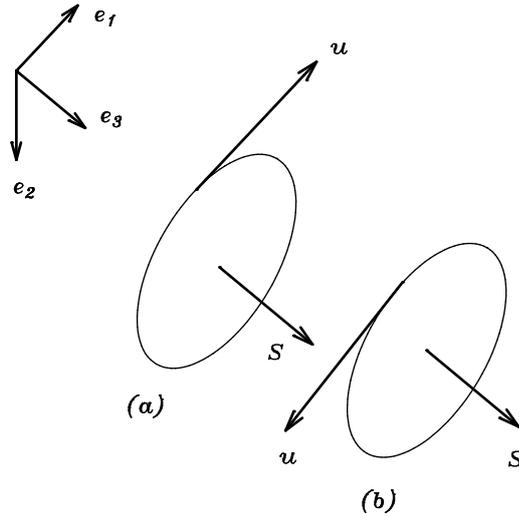


Figura 4.2: **Representación de los ejes locales y diferentes observables para la solución (a) $H > 0$ y para la (b) $H < 0$. Esta orientación nos produce una ecuación de Dirac en la representación de Pauli-Dirac**

Consideremos en primer lugar el caso $z = 0$. Como \mathbf{u} y $d\mathbf{u}/dt$ son observables invariantes por traslación, son elementos del álgebra de Dirac. De aquí resulta que podemos relacionar estos tres vectores con los tres vectores que definen el triedro inverso que describe la orientación \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 y \mathbf{e}_3 en su representación (4.15). Entonces, como se muestra en la parte (a) de la Figura 4.2 y para la partícula, $H > 0$, tenemos que $\mathbf{u} = a\mathbf{e}_1$ y $d\mathbf{u}/dt \times \mathbf{u} = b\mathbf{e}_3$, donde a y b son números constantes, reales y positivos. Por lo tanto, el tercer término del operador de Dirac es $(b/c^2)\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{S} = (b/c^2)T_3$, y el operador (4.19) queda

$$H - a\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_1 - \frac{b}{c^2} T_3 = 0. \quad (4.20)$$

Si hacemos la identificación con la antipartícula, $H < 0$, la parte (b) de la Figura 4.2, la relación de los observables anteriores es opuesta a la obtenida anteriormente, pero ahora con

los coeficientes $-a$ y $-b$, respectivamente, es decir, obtenemos

$$H + a\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_1 + \frac{b}{c^2}T_3 = 0, \quad (4.21)$$

la cual corresponde claramente al cambio $H \rightarrow -H$ en la ecuación (4.20).

Si multiplicamos (4.21) por (4.20) obtenemos una expresión que se satisface tanto para la partícula como para la antipartícula

$$H^2 - \frac{a^2}{9}\mathbf{P}^2\mathbb{I} - \frac{b^2\hbar^2}{4c^4}\mathbb{I} = 0, \quad (4.22)$$

y que es solamente una relación algebraica entre H^2 y \mathbf{P}^2 , independiente del espín. Si identificamos esta expresión con el operador de Klein-Gordon (4.8), el cual también contiene soluciones con $H > 0$ y $H < 0$, esto conduce a $a = 3c$ y $b = 2mc^4/\hbar = c^3/R_0$ y substituyendo en (4.20) obtenemos la ecuación de Dirac:

$$H - c\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\alpha} - \beta mc^2 = 0, \quad (4.23)$$

donde las matrices de Dirac tradicionales $\boldsymbol{\alpha}$ y β vienen dadas por

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

por lo que las matrices gamma de Dirac son

$$\gamma^0 \equiv \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} \equiv \gamma^0 \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

es decir, hemos obtenido la representación de Pauli-Dirac, donde $3\mathbf{e}_1$ juega el papel de un vector unidad en la dirección de la velocidad. Si lo sustituimos en (4.21) corresponde a la representación equivalente que se produce por el cambio $\gamma^\mu \rightarrow -\gamma^\mu$.

La ecuación de Dirac (4.23) manifiesta la relación que existe entre el momento temporal mecánico o energía H , que se expresa como suma de un término ligado al movimiento del centro de masa, $c\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\alpha}$, o energía de traslación, lineal en el momento lineal mecánico, y el término dependiente linealmente del espín, o energía de rotación. Esta relación es válida para la partícula libre, mientras que si el electrón interactúa con un campo electromagnético externo, esa relación la deben satisfacer solamente las partes mecánicas, ya que de acuerdo con el principio atómico no es modificada su estructura mecánica, por lo que la $H = H_m + e\phi$ y $\mathbf{P} = \mathbf{P}_m + e\mathbf{A}$ totales, satisfacen

$$H = e\phi + c(\mathbf{P} - e\mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{\alpha} + \beta mc^2, \quad (4.26)$$

siendo ϕ y \mathbf{A} los potenciales escalar y vectorial externos, respectivamente.

4.2.2. Dinámica de los observables

En la representación de Heisenberg, la derivada temporal de cualquier observable A es

$$\frac{dA}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, A] + \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (4.27)$$

La función de onda depende de las variables cinemáticas. Entre éstas está el tiempo. La evolución temporal corresponde a una traslación temporal generada por el Hamiltoniano H , de tal manera que $\psi(t, x_1, \dots, x_n) = \exp(-iHt/\hbar)\psi(0, x_1, \dots, x_n)$. El valor esperado en el instante t de un observable A , con el sistema en el estado $\psi(t)$ es

$$\langle A(t) \rangle = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = \langle \psi(0) | e^{iHt/\hbar} A e^{-iHt/\hbar} | \psi(0) \rangle,$$

equivalente a tomar el valor esperado de un operador diferente $e^{iHt/\hbar} A e^{-iHt/\hbar}$, pero en el estado inicial. En el instante $t + \Delta t$

$$\langle A(t + \Delta t) \rangle = \langle \psi(t + \Delta t) | A | \psi(t + \Delta t) \rangle = \langle \psi(0) | e^{iH(t+\Delta t)/\hbar} A e^{-iH(t+\Delta t)/\hbar} | \psi(0) \rangle .$$

y la diferencia

$$\langle A(t + \Delta t) \rangle - \langle A(t) \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle \psi(0) | HA - AH | \psi(0) \rangle \Delta t,$$

por lo que

$$\frac{d \langle A(t) \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle \psi(0) | [H, A] | \psi(0) \rangle .$$

De esta forma el cálculo de la variación temporal del valor esperado de un observable es equivalente al valor esperado del observable $[H, A]$ con respecto al estado inicial $\psi(0)$. Si el observable A , es una función explícita del tiempo, entonces es fácil ver que es el valor esperado del observable (4.27), con respecto al estado inicial $\psi(0)$ del sistema.

Podemos ver que para Dirac, el punto \mathbf{r} se mueve con la velocidad c . En efecto, el conmutador $[H, \mathbf{r}]$ es distinto de cero debido a que $[P_i, x_j] = -i\hbar\delta_{ij}$, por lo que la velocidad de \mathbf{r} es

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, \mathbf{r}] = \frac{i}{\hbar} [c(\mathbf{P} - e\mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r}] = c\boldsymbol{\alpha},$$

incluso en interacción. Los valores propios de las matrices α_i son ± 1 , por lo que si alguna componente del vector velocidad es medida con precisión, solamente puede ser $\pm c$.

La representación de Pauli-Dirac encontrada, es compatible con la aceleración $d\mathbf{u}/dt$ a lo largo del vector \mathbf{e}_2 . En efecto, en el sistema de referencia del centro de masa el Hamiltoniano de Dirac se reduce a $H = \beta mc^2$, y para el operador velocidad $\mathbf{u} = c\boldsymbol{\alpha}$, se tiene

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [mc^2\beta, c\boldsymbol{\alpha}] = \frac{2mc^3}{\hbar} \begin{pmatrix} 0 & i\boldsymbol{\sigma} \\ -i\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \frac{c^2}{R_0} 3\mathbf{e}_2, \quad (4.28)$$

donde c^2/R_0 es el módulo constante de la aceleración en este sistema de referencia, y donde $3\mathbf{e}_2$ juega el papel de vector unidad en esa dirección.

La derivada temporal del sistema cartesiano ligado al punto es

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\beta mc^2, \mathbf{e}_1] = \frac{c}{R_0} \mathbf{e}_2, \quad (4.29)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_2}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\beta mc^2, \mathbf{e}_2] = -\frac{c}{R_0} \mathbf{e}_1, \quad (4.30)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_3}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\beta mc^2, \mathbf{e}_3] = 0, \quad (4.31)$$

puesto que \mathbf{e}_3 es ortogonal al plano de la trayectoria y no cambia, y donde $c/R_0 = \omega$ es la velocidad angular del movimiento interno de la carga. Esta evolución temporal de los observables \mathbf{e}_i es la correcta si como hemos supuesto se trata de un triedro cartesiano inverso como se muestra en la Figura 4.2-(a). Es por esta razón que al comienzo del capítulo hemos supuesto que el triedro rota con la misma velocidad que la velocidad angular del movimiento del centro de carga.

Para ser consistente con la consideración anterior de que los vectores $3\mathbf{e}_i$, juegan el papel de vectores unidad, esto implica que el espín, para el observador del centro de masa debe tener la orientación de $3\mathbf{e}_3$. Este es el caso para las componentes superiores, mientras que para las inferiores (que en esta representación corresponden a estados con $H < 0$) la orientación es la opuesta. Esto significa que para las partículas el correspondiente conjunto de ejes ligados al cuerpo forma un triedro inverso, mientras que para las antipartículas, el correspondiente conjunto de ejes, forma un triedro directo. Esto pone de manifiesto una diferencia en la quiralidad entre partículas y antipartículas, como veremos.

En general

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, \mathbf{S}] = \frac{i}{\hbar}[c\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \beta mc^2, \mathbf{S}] = c\mathbf{P} \times \boldsymbol{\alpha} \equiv \mathbf{P} \times \mathbf{u},$$

no es una constante del movimiento, pero para el observador del centro de masa, el operador espín $\mathbf{u} \times \mathbf{U} + \mathbf{W}$ se reduce al espín con respecto al centro de masa \mathbf{S} que sí es constante en este referencial:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\beta mc^2, \mathbf{S}] = 0. \quad (4.32)$$

Únicamente la componente T_3 del espín sobre los ejes del cuerpo permanece constante mientras que las otras dos componentes T_1 y T_2 cambian debido a la rotación de estos ejes.

$$\frac{dT_1}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\beta mc^2, T_1] = \frac{c}{R_0}T_2, \quad (4.33)$$

$$\frac{dT_2}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\beta mc^2, T_2] = -\frac{c}{R_0}T_1, \quad (4.34)$$

$$\frac{dT_3}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\beta mc^2, T_3] = 0. \quad (4.35)$$

Si se analiza desde un observador arbitrario, el movimiento es una hélice y la aceleración no es de módulo constante c^2/R_0 , y el operador espín con respecto al centro de carga \mathbf{S} no es una constante del movimiento, ya que quien es constante es el momento angular total $\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{S}$, que se conserva.

La posible identificación de los observables internos con las diferentes combinaciones lineales reales de las matrices hermiticas \mathbf{e}_i conduce a diferentes representaciones equivalentes de las matrices de Dirac, y por lo tanto a diferentes expresiones para la ecuación de Dirac.

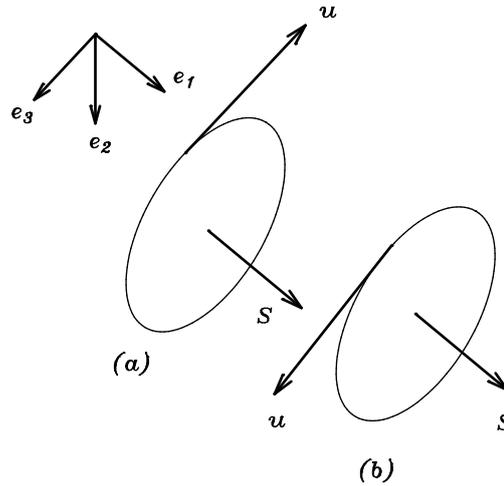


Figura 4.3: Orientación de los ejes en la representación de Weyl.

Por ejemplo, si realizamos la identificación que se sugiere en la Figura 4.3, $\mathbf{u} = -a\mathbf{e}_3$ y el observable $d\mathbf{u}/dt \times \mathbf{u} = b\mathbf{e}_1$ en términos de sendas constantes positivas a y b , obtenemos por el mismo método

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

y así, las matrices gama resultan ser

$$\gamma^0 \equiv \beta = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} \equiv \gamma^0 \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.37)$$

es decir, la representación de Weyl de la ecuación de Dirac.

Cuando comparamos ambas representaciones, vemos que la representación de Weyl se obtiene a partir de la de Pauli-Dirac si es que rotamos el sistema de ejes del cuerpo un valor $\pi/2$ alrededor del eje \mathbf{e}_2 . Entonces, el operador de rotación es el

$$R(\pi/2, \mathbf{e}_2) = \exp\left(\frac{i\pi}{\hbar} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{S}\right) = \exp\left(\frac{i\pi}{\hbar} T_2\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \mathbb{I} \end{pmatrix}.$$

Podemos comprobar que $R\gamma_{PD}^\mu R^\dagger = \gamma_W^\mu$, donde γ_{PD}^μ y γ_W^μ son las matrices gama en las representaciones de Pauli-Dirac y de Weyl, respectivamente.

Podemos obtener de forma análoga la ecuación de Dirac en el caso de que la parte del zitterbewegung valga $z = 1$, utilizando el conjunto de matrices (4.16) en vez del conjunto (4.15), ya que son múltiplos uno del otro y lo único que puede cambiar es algún factor constante en los cálculos intermedios.

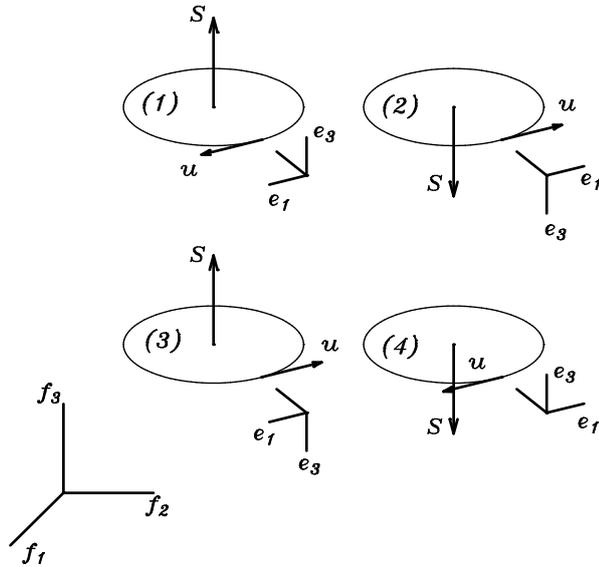


Figura 4.4: Orientación de los ejes del cuerpo en la representación de Pauli-Dirac, correspondientes a los cuatro estados básicos Φ_i de (3.81)-(3.84), respectivamente, con el vector \mathbf{e}_2 en la dirección de la aceleración y \mathbf{e}_1 y $-\mathbf{e}_1$ en la dirección de la velocidad. El sistema de ejes local en los casos (1) y (2) es left-handed, mientras que es right-handed en (3) y (4), por corresponder a la antipartícula.

Los cuatro estados básicos Φ_i , (4.83)-(4.86) or (4.87)-(4.90), en la representación de Pauli-Dirac, se corresponden con los cuatro estados representados en la figura 4.4, donde los \mathbf{f}_i son los vectores unidad del sistema de referencia del laboratorio, y los \mathbf{e}_i los vectores unidad ligados al punto \mathbf{r} , con el vector \mathbf{e}_2 en la dirección de la aceleración. En los estados (1) y (2) la proyección del espín en el eje \mathbf{e}_3 , T_3 es $+1/2$, mientras que los dos de abajo (3) y (4) corresponden a $T_3 = -1/2$, y ambos con las dos posibilidades de $S_3 = \pm 1/2$ en los ejes del laboratorio. Conviene observar que los dos inferiores, se corresponden con los estados de la antipartícula.

La representación de Pauli-Dirac conduce a que la matriz hermítica β es proporcional a la T_3 . La representación de Weyl es la que la matriz hermítica β es proporcional a la T_1 .

4.2.3. Conservación de la probabilidad

La ecuación de Dirac se escribe:

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\hbar}{i} \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi - mc^2 \beta \Phi = 0, \quad (4.38)$$

donde Φ es el espinor (4.17) o el espinor (4.18) un espinor o vector columna de cuatro componentes,

$$\Phi(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) = \begin{pmatrix} \psi_1(t, \mathbf{r}) \\ \psi_2(t, \mathbf{r}) \\ \psi_3(t, \mathbf{r}) \\ \psi_4(t, \mathbf{r}) \end{pmatrix}$$

una vez que las partes relativas a la dependencia de las variables \mathbf{u} y $\boldsymbol{\alpha}$ se han sustituido por los cuatro espinores básicos. La velocidad $\mathbf{u} = c\boldsymbol{\alpha}$ es el operador velocidad de Dirac escrito en términos de las matrices hermiticas 4×4 de Dirac $\boldsymbol{\alpha}$ y $\beta = \gamma^0$ es la matriz hermitica de Dirac, relacionada con la proyección del espín en la dirección de los ejes del cuerpo. Cada una de las funciones $\psi_i(t, \mathbf{r})$, $i = 1, 2, 3, 4$, es solución de la ecuación de Klein-Gordon, $(\partial^\mu \partial_\mu + m^2 c^2 / \hbar^2) \psi_i = 0$.

Si ahora tomamos la compleja conjugada y traspuesta de la expresión anterior,

$$-i\hbar \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} + \frac{\hbar}{i} \nabla \Phi^* \cdot \mathbf{u} - mc^2 \Phi^* \beta = 0. \quad (4.39)$$

Si a la primera ecuación (4.38) la multiplicamos por el vector fila Φ^* por la izquierda y la (4.39) por el vector columna Φ por la derecha, y restamos la segunda de la primera, se llega a

$$\frac{\partial(\Phi^* \Phi)}{\partial t} + \nabla(\Phi^* \mathbf{u} \Phi) = 0,$$

que llamando a $\Phi^* \Phi = \sum \psi_i^* \psi_i = \rho(t, \mathbf{r})$ una función escalar y definida positiva que se interpreta como la densidad de probabilidad de presencia del electrón y a $\Phi^* \mathbf{u} \Phi = \mathbf{j}(t, \mathbf{r})$, como la densidad de corriente de probabilidad, la ecuación de Dirac nos produce localmente la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (4.40)$$

Existe por lo tanto conservación local de la probabilidad, en cada punto $(t, \mathbf{r}) \in \mathbb{R}^4$, del espacio tiempo. Esta ley de conservación implica que la integral a t constante $\int_V \rho dV$ se conserva cualesquiera que sea el volumen de integración V . Si este volumen es todo el espacio tridimensional, esa integral vale 1, como corresponde a una función de onda normalizada.

La densidad de corriente $\mathbf{j} = \Phi^* \mathbf{u} \Phi = c\psi^* \boldsymbol{\gamma}^0 \boldsymbol{\gamma} \psi$, que como $(\boldsymbol{\gamma}^0)^2 = \mathbb{I}$, y definiendo el espinor conjugado como vector fila $\bar{\psi} = \psi^* \boldsymbol{\gamma}^0$, nos permite escribir la ecuación de continuidad en forma covariante en términos del tetravector $j^\mu = c\bar{\psi} \boldsymbol{\gamma}^\mu \psi \equiv (c\rho, \mathbf{j})$,

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (4.41)$$

Si al tetravector j^μ , lo multiplicamos por el valor de la carga e , obtenemos el tetravector densidad de corriente eléctrica, que también satisface la misma ecuación de continuidad, por lo que se refuerza la idea de que la distribución dada por la función de onda como función de t y \mathbf{r} , el punto \mathbf{r} representa la localización de la carga eléctrica del electrón.

Como el tetravector de densidad de corriente eléctrica es $j^\mu = e c \bar{\psi} \boldsymbol{\gamma}^\mu \psi$, la interacción con un campo externo se escribe en la forma del acoplamiento mínimo en términos de potenciales que son solamente funciones de (t, \mathbf{r}) :

$$j^\mu(t, \mathbf{r}) A_\mu(t, \mathbf{r}).$$

En electrodinámica cuántica no existe ningún otro acoplamiento entre los campos externos y las propiedades de la partícula, lo que refuerza la idea de que, efectivamente, lo que se está describiendo de forma clásica, es la evolución del centro de carga, es decir de un punto al que se le asocia el valor de una carga eléctrica e y ningún multipolo eléctrico o magnético.

4.2.4. Invariancia PCT

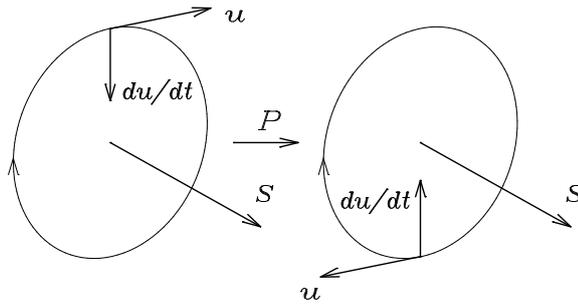


Figura 4.5: La inversión espacial del electrón en el sistema del centro de masa es equivalente a una rotación de valor π alrededor de S .

En la Figura 4.5 representamos la inversión espacial de la descripción del electrón, considerado como el luxón cuyo centro de carga se mueve alrededor de su centro de masa a la velocidad de la luz. Bajo la inversión P y desde el punto de vista del observador del centro de masa cambia de acuerdo con

$$P : \{ \mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}, \mathbf{u} \rightarrow -\mathbf{u}, du/dt \rightarrow -du/dt, \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}, H \rightarrow H, \mathbf{e}_i \rightarrow -\mathbf{e}_i \}.$$

En la representación de Pauli-Dirac (Figura 4.2), vemos que esta inversión equivale a una rotación de valor π alrededor del eje \mathbf{e}_3 y, por lo tanto,

$$P \equiv R(\pi, \mathbf{e}_3) = \exp(i\pi \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{S}/\hbar) = \exp(i\pi T_3/\hbar) = i\gamma_0,$$

que es una de las posibles representaciones del operador paridad $\pm\gamma_0$ o bien $\pm i\gamma_0$. En la representación de Weyl esto corresponde a una rotación de valor π alrededor del eje \mathbf{e}_1 con lo que $P \equiv i\gamma_0$.

La inversión espacial transforma el sistema de referencia local de vectores unidad \mathbf{e}_i en los $-\mathbf{e}_i$, de tal manera que un sistema left handed es transformado en un sistema righthanded.

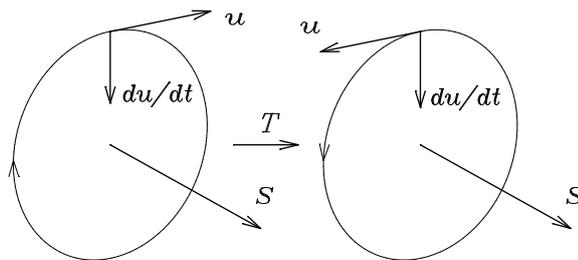


Figura 4.6: La inversión temporal del electrón produce una partícula cuyo momento temporal H es negativo.

En la Figura 4.6 representamos la inversión temporal, también para el observador del centro de masa,

$$T : \{ \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}, \mathbf{u} \rightarrow -\mathbf{u}, d\mathbf{u}/dt \rightarrow d\mathbf{u}/dt, \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}, H \rightarrow -H, \mathbf{e}_i \rightarrow \mathbf{e}_i \},$$

pero este movimiento corresponde a una partícula con $H < 0$, tal que la orientación relativa entre el espín, velocidad y posición, dados por la ecuación (2.160), está conforme al movimiento descrito en esta figura.

Una partícula de Dirac es un sistema mecánico cuyos atributos intrínsecos son la masa $m > 0$ y el espín $\hbar/2$. Vemos que también el signo de H es invariante Poincaré y por lo tanto es otra propiedad intrínseca lo que establece dos clases diferentes de sistemas de la misma masa y espín. Al sistema con $H > 0$ se le da habitualmente el nombre de partícula mientras que se reserva el nombre de antipartícula para el de $H < 0$. El valor de la masa no lo fija la teoría, hay que introducirlo a mano. Para caracterizar su interacción con un campo electromagnético externo, tenemos que introducir a mano otra propiedad intrínseca, la carga eléctrica e , localizada en el punto \mathbf{r} . Esto implica que además de las propiedades mecánicas m y S el sistema posee propiedades electromagnéticas como la carga eléctrica e , que debido a su movimiento a la velocidad de la luz y a su separación con respecto al centro de masa produce un momento dipolar eléctrico \mathbf{d} y un momento dipolar magnético $\boldsymbol{\mu}$, respectivamente. La carga eléctrica puede tener ambos signos, positiva o negativa.

$$P \begin{pmatrix} S \\ m \\ H \\ e \\ \boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{d} \\ \mathbf{e}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \\ m \\ H \\ e \\ \boldsymbol{\mu} \\ -\mathbf{d} \\ -\mathbf{e}_i \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} S \\ m \\ H \\ e \\ \boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{d} \\ \mathbf{e}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \\ m \\ -H \\ e \\ -\boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{d} \\ \mathbf{e}_i \end{pmatrix}, \quad C \begin{pmatrix} S \\ m \\ H \\ e \\ \boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{d} \\ \mathbf{e}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \\ m \\ H \\ -e \\ -\boldsymbol{\mu} \\ -\mathbf{d} \\ \mathbf{e}_i \end{pmatrix}$$

y la transformación global PCT nos da

$$PCT \begin{pmatrix} S \\ m \\ H \\ e \\ \boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{d} \\ \mathbf{e}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \\ m \\ -H \\ -e \\ \boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{d} \\ -\mathbf{e}_i \end{pmatrix}.$$

La transformación PCT , transforma la partícula en su antipartícula, invirtiendo incluso el sistema local de ejes y recíprocamente, manteniendo invariantes los atributos mecánicos m y S y los atributos electromagnéticos $\boldsymbol{\mu}$ y \mathbf{d} . La invariancia PCT de este sistema establece una relación entre el signo de H y el signo de la carga e , a pesar de que la indeterminación en el signo de la carga de la partícula, persiste. El producto eH es invariante PCT . La ecuación de Dirac es invariante PCT puesto que esta transformación aplica soluciones con $H > 0$ en soluciones con $H < 0$ y recíprocamente, puesto que esta ecuación contiene la descripción de ambos tipos de partículas elementales.

Esto implica que la partícula y la antipartícula, en el sistema de referencia del centro de masa, poseen un momento dipolar magnético y un momento dipolar eléctrico oscilante, en un plano ortogonal al espín. Una vez fijada la dirección del espín, el momento magnético de ambas posee la misma orientación relativa con respecto al espín, bien paralelo a antiparalelo, de acuerdo con cual haya sido la elección del signo de la carga de la partícula. El momento dipolar eléctrico oscila hacia la izquierda para las partículas y hacia la derecha para las antipartículas lo que muestra una diferencia entre ambas que recibe el nombre de *quiralidad*. Si como habitualmente

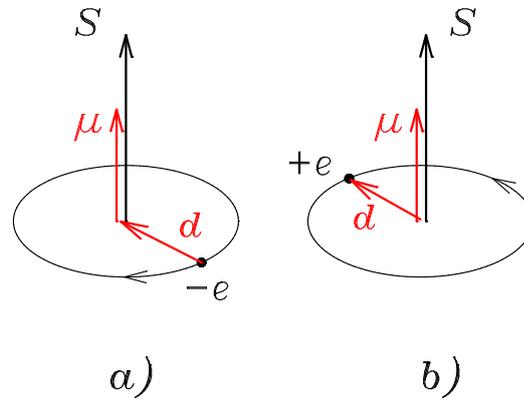


Figura 4.7: Atributos electromagnéticos μ y d para (a) una partícula de carga negativa y su transformada PCT , (b), la antipartícula de carga positiva y la orientación relativa con su espín, analizado todo por el observador del centro de masa. El momento dipolar eléctrico de la partícula oscila hacia la derecha mientras que lo hace hacia la izquierda para la antipartícula.

consideramos que el electrón es *la partícula*, es de carga negativa, la transformación PCT transforma la partícula (a) de la figura 4.7 en el sistema (b). Si lo que denominamos partícula es de carga positiva, entonces el espín y el momento magnético son opuestos entre sí, tanto para la partícula como para antipartícula.

Sin embargo, no tenemos constancia de que se hayan realizado medidas experimentales para encontrar la orientación relativa entre el espín y el momento magnético para electrones y positrones libres, (y tampoco para muones) a pesar de que se han realizado medidas muy precisas para determinar el valor absoluto de g , la relación giromagnética.

4.2.5. Dos experimentos plausibles

Un experimento plausible indirecto ¹ ha sido propuesto para medir la orientación relativa entre el espín y el momento magnético de los electrones externos en átomos alcalinos como el Rb o Cs.

Los átomos de Rb^{87} tienen un electrón en el nivel $5s$. Su núcleo tiene espín $3/2$ y como el resto de las capas electrónicas están completas, el estado fundamental del átomo tiene un espín total 1, por lo que el electrón externo se coloca con su espín en dirección contraria al espín del núcleo. El momento magnético del átomo es básicamente el del electrón externo, ya que las capas internas están completas y el momento magnético del núcleo es mucho más pequeño, del orden de $m_e/87m_p$ con respecto al del electrón, siendo m_e y m_p las masas del electrón y del protón, respectivamente.

Átomos de rubidio Rb^{87} muy fríos, en un campo magnético externo se orientarán de tal manera que sus momentos magnéticos apunten en la dirección del campo. Si ahora lanzamos en la dirección del campo un haz de fotones polarizados circularmente de suficiente energía $\sim 6,8\text{GHz}$ para producir la transición hiperfina que nos da vuelta al espín del electrón más

¹M.Rivas, *Are the electron spin and magnetic moment parallel or antiparallel vectors?*, LANL ArXiv:physics/0112057.

externo, colocando al átomo en el estado excitado hiperfino, y por lo tanto con espín total 2, únicamente aquellos fotones cuyo espín tenga sentido contrario al de este electrón serán capaces de hacer la transición, y podrán ser absorbidos. Fotones con su espín en la dirección del espín del electrón externo no lo producirán. Por lo tanto, midiendo la orientación del espín de los fotones de la luz polarizada circular que produce la transición hiperfina, sabremos que el espín del electrón externo tiene la orientación contraria, y como su momento magnético tiene la orientación del campo, obtenemos la orientación relativa entre espín y momento magnético. Ahora la tarea sería también medir la orientación relativa para los positrones, para confirmar esta predicción.

Existe una indefinición en el signo de la carga de la materia, que está también presente en el formalismo de Dirac. Sin embargo la predicción que se hace es consistente con los estados ligados formados por una partícula y su antipartícula. Como ejemplo, consideremos el positronio (un sistema ligado inestable electrón-positrón). Antes de aniquilarse posee un estado fundamental de espín 0 y momento magnético 0. Esto significa que los espines de ambos electrón y positrón son opuestos y lo mismo sucede para sus momentos magnéticos. Por lo tanto, para el electrón y el positrón debe existir la misma orientación relativa entre su espín y su momento magnético.

Otro ejemplo, el pión neutro π^0 , es una combinación lineal de los estados ligados quark-antiquark $u\bar{u}$, $d\bar{d}$ y a veces también se incluye el par $s\bar{s}$. Es un sistema ligado que en su estado fundamental es de espín 0 y momento magnético 0. Como cada uno de los quarks anteriores poseen masas y cargas distintas poseen diferentes momentos magnéticos, la posibilidad de que su combinación lineal dé un espín 0 y momento magnético 0, es que para cada uno de los pares valgan cero, por lo que cada quark y su correspondiente antiquark deben tener la misma orientación relativa entre el espín y su momento magnético.

Otro experimento que se propone es medir la dirección de precesión del espín de los e^+ y e^- o bien de los μ^+ and μ^- en un anillo de almacenamiento. Si cada par e^+ y e^- o bien μ^+ y μ^- tienen la misma orientación relativa entre el espín y el momento magnético, entonces el momento que las fuerzas externas hacen sobre ellos por parte de un campo magnético es el mismo

$$\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} = \frac{d\mathbf{S}}{dt}$$

Sin embargo, si inyectamos estas partículas con un acelerador de tal manera que las partículas y las antipartículas tengan el espín en la misma dirección, por ejemplo hacia arriba, como las dos clases de partículas poseen carga contraria, hay que invertir el sentido del campo magnético del anillo, por lo que precesarán en sentido contrario. Si fuera posible detectar esta dirección de precesión, confirmaría esta predicción, pero al mismo tiempo nos daría la orientación relativa entre el espín y el momento magnético.

4.2.6. Quiralidad

El modelo clásico que satisface la ecuación de Dirac cuando se cuantiza, da lugar a dos posibles sistemas con $H > 0$ y $H < 0$. Al sistema cuyo $H > 0$ se le suele denominar la partícula. Ambos sistemas son de energía positiva $E = |H|$. Para la partícula el movimiento interno del centro de carga tiene lugar en un plano ortogonal al espín en sentido hacia la izquierda cuando se fija la dirección del espín en el sentido positivo. Para la antipartícula, el movimiento es hacia la derecha, para la misma orientación del espín. Para las partículas, el sistema local orientable de vectores unidad \mathbf{e}_i se comporta como un triedro inverso, que rota con velocidad angular en la dirección opuesta a la del espín. Para las antipartículas resulta ser un triedro directo que rota en el sentido del espín.

Si hubiéramos comenzado nuestro análisis considerando en primer lugar el ejemplo de la antipartícula, entonces a la hora de obtener la misma representación de Pauli-Dirac como en el caso anterior, habríamos tenido que considerar que los ejes del cuerpo son los de la figura

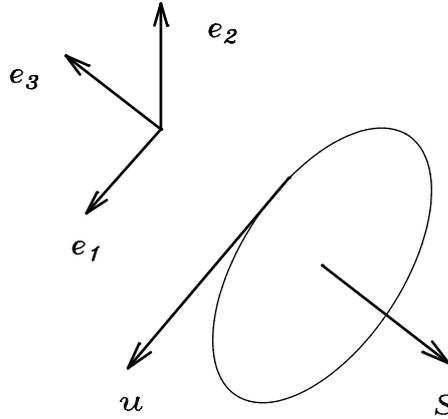


Figura 4.8: **Orientación relativa de los ejes del cuerpo para la antipartícula que dan lugar a la representación de Pauli-Dirac. Los ejes se comportan como un sistema de ejes directo que rotan alrededor de la dirección del espín.**

4.8, es decir, en la dirección opuesta a los que escogimos anteriormente, y esto nos lleva por los mismos argumentos que las matrices γ^μ deben reemplazarse por las $-\gamma^\mu$, de manera que el Hamiltoniano, en el sistema de referencia del centro de masa, se reduce a $-\beta mc^2$. De esta forma, el movimiento de los ejes del cuerpo es, en vez de (4.29-4.31), el dado por

$$\frac{de_1}{dt} = \frac{i}{\hbar}[-\beta mc^2, e_1] = -\omega e_2, \quad (4.42)$$

$$\frac{de_2}{dt} = \frac{i}{\hbar}[-\beta mc^2, e_2] = \omega e_1, \quad (4.43)$$

$$\frac{de_3}{dt} = \frac{i}{\hbar}[-\beta mc^2, e_3] = 0, \quad (4.44)$$

con $\omega = c/R_0$, lo cual corresponde claramente a un triedro directo que rota con una velocidad angular ω , en la dirección del espín.

La materia es de izquierdas y la antimateria es de derechas, por lo que respecta al movimiento y al comportamiento de los ejes del cuerpo. Materia y antimateria muestran una diferente **quiralidad**.

A pesar de que el movimiento del centro de carga tiene lugar en una región del orden de la longitud de onda Compton, es posible que esta separación sea físicamente inobservable, este movimiento corresponde sin embargo a la oscilación de un dipolo eléctrico instantáneo, que oscila con una frecuencia muy alta. El sentido del movimiento de este dipolo, una vez que la dirección del espín ha sido fijada, revela la diferencia entre partícula y antipartícula.

Finalmente, si comparamos el operador espín y el vector e_3 vemos que

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad e_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}.$$

de tal forma que las dos componentes superiores del espinor de Dirac corresponden a soluciones de valor positivo de H y por lo tanto están relacionadas con $\mathbf{S} \sim e_3$, mientras que las componentes inferiores corresponden al valor negativo de H , y para estas componentes estos operadores se comportan como $\mathbf{S} \sim -e_3$, lo cual brinda una relación vectorial como la que se representa en las figuras 4.2 y 4.8, respectivamente.

4.3. Álgebra de Dirac

Las tres componentes espaciales del espín S_i , las tres componentes del espín en los ejes del cuerpo T_j y las nueve componentes de los ejes del cuerpo $(\mathbf{e}_i)_j$, $i, j = 1, 2, 3$, cuyas representaciones matriciales vienen dadas en el caso $z = 0$ por (4.15) o en (4.16) en el caso $z = 1$, juntamente con la matriz unidad 4×4 , \mathbb{I} , forman un conjunto de 16 matrices hermíticas, linealmente independientes. Son por lo tanto una base del álgebra de Dirac como espacio vectorial, y satisfacen las siguientes reglas de conmutación:

$$[S_i, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_k, \quad [T_i, T_j] = -i\hbar\epsilon_{ijk}T_k, \quad [S_i, T_j] = 0, \quad (4.45)$$

$$[S_i, (\mathbf{e}_j)_k] = i\hbar\epsilon_{ikr}(\mathbf{e}_j)_r, \quad [T_i, (\mathbf{e}_j)_k] = -i\hbar\epsilon_{ijr}(\mathbf{e}_r)_k, \quad (4.46)$$

y los vectores reescalados $3\mathbf{e}_i$, en el caso $z = 0$,

$$[(3\mathbf{e}_i)_k, (3\mathbf{e}_j)_l] = \frac{4i}{\hbar} (\delta_{ij}\epsilon_{klr}S_r - \delta_{kl}\epsilon_{ijr}T_r), \quad (4.47)$$

mostrando que los operadores \mathbf{e}_i transforman como vectores bajo rotaciones pero no son observables que conmuten. En el caso $z = 1$, los vectores reescalados $-9\mathbf{e}_i$, satisfacen las mismas relaciones (4.47).

Si fijamos el par de índices i , y j , entonces el conjunto de cuatro operadores, por ejemplo, S^2 , S_i , T_j y $(\mathbf{e}_j)_i$ forman un conjunto completo que conmutan. En efecto, las funciones Φ_i , $i = 1, \dots, 4$, dadas anteriormente (3.69)-(3.72), son funciones propias simultáneas de S^2 , S_3 , T_3 y $(\mathbf{e}_3)_3$ con valores propios $s = 1/2$, y para s_3 , t_3 , y e_{33} los siguientes valores:

$$\Phi_1 = |1/2, 1/2, 1/3 \rangle, \quad \Phi_2 = |-1/2, 1/2, -1/3 \rangle, \quad (4.48)$$

$$\Phi_3 = |1/2, -1/2, -1/3 \rangle, \quad \Phi_4 = |-1/2, -1/2, 1/3 \rangle. \quad (4.49)$$

Análogamente, los espinores Ψ_j de (3.81)-(3.84)

$$\Psi_1 = |1/2, 1/2, -1/9 \rangle, \quad \Psi_2 = |-1/2, 1/2, 1/9 \rangle, \quad (4.50)$$

$$\Psi_3 = |1/2, -1/2, 1/9 \rangle, \quad \Psi_4 = |-1/2, -1/2, -1/9 \rangle. \quad (4.51)$$

Estos observables básicos satisfacen las siguientes reglas de anticonmutación:

$$\{S_i, S_j\} = \{T_i, T_j\} = \frac{\hbar^2}{2} \delta_{ij}\mathbb{I}, \quad (4.52)$$

$$\{S_i, T_j\} = \frac{\hbar^2}{2} (3\mathbf{e}_j)_i, \quad (4.53)$$

$$\{S_i, (3\mathbf{e}_j)_k\} = 2\delta_{ik}T_j, \quad \{T_i, (3\mathbf{e}_j)_k\} = 2\delta_{ij}S_k, \quad (4.54)$$

$$\{(\mathbf{e}_i)_j, (\mathbf{e}_k)_l\} = \frac{2}{9} \delta_{ik}\delta_{jl}\mathbb{I} + \frac{2}{3} \epsilon_{ikr}\epsilon_{jls}(\mathbf{e}_r)_s. \quad (4.55)$$

Si definimos ahora las matrices adimensionales y normalizadas:

$$a_{ij} = 3(\mathbf{e}_i)_j, \quad (\text{ó } a_{ij} = -9(\mathbf{e}_i)_j), \quad s_i = \frac{2}{\hbar}S_i, \quad t_i = \frac{2}{\hbar}T_i, \quad (4.56)$$

juntamente con la matriz unidad 4×4 , \mathbb{I} , forman un conjunto de 16 matrices Γ_λ , $\lambda = 1, \dots, 16$ que son hermíticas, unitarias, linealmente independientes y de determinante unidad. Son la base ortonormal del álgebra de Dirac como álgebra de Clifford.

El conjunto de 64 matrices unitarias de determinante $+1$, $\pm\Gamma_\lambda$, $\pm i\Gamma_\lambda$, $\lambda = 1, \dots, 16$ forman un subgrupo finito de $SU(4)$. Su ley de composición se puede obtener de:

$$a_{ij} a_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}\mathbb{I} + i\delta_{ik}\epsilon_{jlr} s_r - i\delta_{jl}\epsilon_{ikr} t_r + \epsilon_{ikr}\epsilon_{jls} a_{rs}, \quad (4.57)$$

$$a_{ij} s_k = i\epsilon_{jkl} a_{il} + \delta_{jk} t_i, \quad (4.58)$$

$$a_{ij} t_k = -i\epsilon_{ikl} a_{lj} + \delta_{ik} s_j, \quad (4.59)$$

$$s_i a_{jk} = i\epsilon_{ikl} a_{jl} + \delta_{ik} t_j, \quad (4.60)$$

$$s_i s_j = i\epsilon_{ijk} s_k + \delta_{ij}\mathbb{I}, \quad (4.61)$$

$$s_i t_j = t_j s_i = a_{ji}, \quad (4.62)$$

$$t_i a_{jk} = -i\epsilon_{ijl} a_{lk} + \delta_{ij} s_k, \quad (4.63)$$

$$t_i t_j = -i\epsilon_{ijk} t_k + \delta_{ij}\mathbb{I}, \quad (4.64)$$

y análogamente podemos usar estas expresiones para obtener las reglas de conmutación y de anticonmutación (4.45-4.55).

El álgebra de Dirac es generada habitualmente por las cuatro matrices gama de Dirac γ^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$ que satisfacen las reglas de anticonmutación:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{I}, \quad (4.65)$$

donde $\eta^{\mu\nu}$ es el tensor métrico de Minkowski.

Análogamente, el álgebra de Dirac puede ser generada por los cuatro observables siguientes, por ejemplo: S_1, S_2, T_1 y T_2 . En efecto por (4.61) y (4.64) obtenemos los \mathbb{I}, S_3 y T_3 respectivamente y mediante (4.62), los restantes elementos.

Clásicamente, la orientación interna de un electrón es caracterizada por el conocimiento de las componentes de los ejes del cuerpo $(\mathbf{e}_i)_j$, $i, j = 1, 2, 3$, que en conjunto constituyen una matriz ortogonal. Para caracterizar completamente y de forma única una matriz ortogonal a partir de sus componentes, necesitamos conocer al menos cuatro de ellas. En la versión cuántica el conocimiento de cuatro de las matrices $(\mathbf{e}_i)_j$ y haciendo uso algebraico de (4.57)-(4.64), nos permite recuperar los restantes elementos del álgebra de Dirac. Es en este sentido que *la orientación interna* del electrón completamente caracteriza su estructura interna. El álgebra de Dirac de los observables del electrón que son invariantes por traslación, puede ser algebraicamente generada a partir de cuatro de los operadores que describen su orientación.

4.4. Simetrías espacio-temporales adicionales

Las variables cinemáticas de esta partícula clásica de Dirac se reducen al tiempo t , posición \mathbf{r} , velocidad \mathbf{u} y orientación $\boldsymbol{\alpha}$, con la condición de que la velocidad es siempre $u = c$, o bien 1 en unidades naturales. Si la partícula tiene masa $m \neq 0$ y espín $s \neq 0$, podemos definir también una unidad natural de longitud s/mc y una unidad natural de tiempo s/mc^2 . La unidad natural de longitud es el radio del zitterbewegung, o movimiento circular del centro de carga de la figura 4.1, y la unidad natural de tiempo es el tiempo empleado por la carga durante una vuelta, y para el observador del centro de masa. Esto implica que para partículas con masa y espín, todas sus variables cinemáticas y sus derivadas temporales se pueden tomar adimensionales. El formalismo es por lo tanto invariante bajo aquellas dilataciones espacio-temporales que no modifiquen la velocidad de la luz.

Resulta de esto que, aunque hemos comenzado con el grupo de Poincaré como el grupo básico de simetrías espacio-temporales, estas partículas con masa y espín poseen un grupo de simetrías más amplio. Al menos contiene también dilataciones espacio-temporales con generador D . La acción de esta transformación sobre las variables cinemáticas es

$$t' = e^\lambda t, \quad \mathbf{r}' = e^\lambda \mathbf{r}, \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{\alpha}.$$

La nueva constante del movimiento Noetheriana toma la forma

$$D = tH - \mathbf{r} \cdot \mathbf{P}. \quad (4.66)$$

Sea $R(\boldsymbol{\beta})$ una rotación arbitraria que cambia los ejes coordenados del observador inercial. La acción de esta rotación arbitraria $R(\boldsymbol{\beta})$ sobre las variables cinemáticas es

$$t' = t, \quad \mathbf{r}' = R(\boldsymbol{\beta})\mathbf{r}, \quad \mathbf{u}' = R(\boldsymbol{\beta})\mathbf{u}, \quad R(\boldsymbol{\alpha}') = R(\boldsymbol{\beta})R(\boldsymbol{\alpha}),$$

y por esta razón los generadores \mathbf{J} de las rotaciones involucran a operadores diferenciales que derivan con respecto a todas estas variables cinemáticas, excluido el tiempo.

La orientación de la partícula, representada por las variables $\boldsymbol{\alpha}$, o de forma equivalente por la matriz ortogonal de rotación $R(\boldsymbol{\alpha})$, se interpreta como la orientación de un sistema hipotético de tres ejes unidad cartesianos \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$, localizados en el punto \mathbf{r} . No poseen realidad física, pero la elección de este sistema cartesiano ligado al punto es completamente arbitraria, como hemos visto en el análisis clásico, de tal manera que el formalismo debe ser independiente de sus valores reales. Esto significa que, además del anterior grupo de rotaciones que modifica los ejes del observador inercial, debe existir otro grupo de rotaciones locales $SO(3)_L$, de elementos $R(\boldsymbol{\gamma})$, que modifica a las variables de orientación $\boldsymbol{\alpha}$, pero sin modificar al resto de las variables \mathbf{r} y \mathbf{u} , es decir, una rotación local del sistema de ejes del cuerpo:

$$t' = t, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r}, \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u}, \quad R(\boldsymbol{\alpha}') = R(\boldsymbol{\gamma})R(\boldsymbol{\alpha}), \quad (4.67)$$

Los generadores de este nuevo grupo de rotaciones, que afecta solamente a las variables de orientación, serán la proyección de los operadores de momento angular \mathbf{W} proyectados sobre los ejes de la partícula. Es claro que estas dos operaciones de rotación de los ejes del observador y de los ejes de la partícula, conmutan entre sí. Estas últimas rotaciones las podemos interpretar como rotaciones activas de los ejes de la partícula. A partir del teorema de Noether, los nuevos observables conservados serán:

$$T_i = \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_i, \quad (4.68)$$

donde \mathbf{e}_i son los tres vectores unidad ortogonales que definen los ejes de la partícula.

Si $R(\boldsymbol{\alpha})$ es la matriz ortogonal de rotación que describe la orientación de la partícula, si la consideramos por columnas, estas columnas describen las componentes de los tres vectores unidad ortogonales \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$. Las Ecuaciones (4.67) corresponden a la transformación $\mathbf{e}'_i = R(\boldsymbol{\gamma})\mathbf{e}_i$ de los ejes de la partícula.

Los operadores W_i , representan a las componentes de los operadores de momento angular asociados al cambio de orientación de la partícula, y proyectados en los ejes del observador inercial correspondiente. Las magnitudes conservadas (4.68), son las componentes de los operadores de momento angular proyectados sobre los ejes de la partícula $T_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{W}$. Al cuantizar el sistema, vendrán dados por los operadores diferenciales (4.80)-(4.82) del apéndice de este capítulo, y satisfacen

$$T^2 = W^2, \quad [T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk}T_k,$$

$$[T_i, K_j] = [T_i, J_j] = [T_i, H] = [T_i, D] = [T_i, P_j] = 0.$$

Hemos visto que los operadores autoadjuntos T_i generan otro grupo $SU(2)$ que es la representación del grupo de rotaciones locales $SO(3)_L$, que modifica solamente a las variables de orientación, conmuta con el grupo de rotaciones generado por los J_j , y con la totalidad del grupo de Poincaré ampliado, incluidas las dilataciones espacio-temporales.

4.4.1. Análisis del grupo de simetrías ampliado

Sean H , \mathbf{P} , \mathbf{K} y \mathbf{J} los generadores del grupo de Poincaré \mathcal{P} . Con la identificación habitual de $p^\mu \equiv (H/c, \mathbf{P})$ como los operadores que definen el tetramomento y $w^\mu \equiv (\mathbf{P} \cdot \mathbf{J}, H\mathbf{J}/c - \mathbf{K} \times \mathbf{P})$ como el operador tetravector de Pauli-Lubanski los dos operadores de Casimir del grupo de Poincaré son

$$C_1 = p_\mu p^\mu, \quad C_2 = -w_\mu w^\mu.$$

Estos operadores de Casimir, si los medimos en el sistema de referencia del centro de masa donde $\mathbf{P} = \mathbf{K} = 0$, y en unidades naturales $c = 1$, $\hbar = 1$, se reducen respectivamente en una representación irreducible a $C_1 = m^2$ y $C_2 = H^2 J^2 = m^2 s(s+1)$. Los dos parámetros m y s , que caracterizan a cada representación irreducible del grupo de Poincaré, representan las propiedades intrínsecas de una partícula elemental relativista.

Consideremos las dilataciones espacio-temporales de generador D . La acción de esta transformación sobre las variables cinemáticas es

$$t' = e^\lambda t, \quad \mathbf{r}' = e^\lambda \mathbf{r}, \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{\alpha}.$$

Denotemos esta ampliación del grupo de Poincaré por \mathcal{W} , a veces denominado grupo de Weyl. En la representación cuántica, este nuevo generador, cuando actúa sobre la función de onda, toma la forma:

$$D = it\partial/\partial t + i\mathbf{r} \cdot \nabla. \quad (4.69)$$

y satisface

$$[D, p^\mu] = -ip^\mu, \quad [D, J^{\mu\nu}] = 0.$$

Este grupo ampliado solamente posee un operador de Casimir ², el cual, para partículas con masa, con lo que el operador $C_1 \neq 0$ es invertible, se reduce a

$$C = C_2 C_1^{-1} = C_1^{-1} C_2 \equiv C_2/C_1 = s(s+1).$$

En el sistema de referencia del centro de masa, este operador se reduce a $C = S^2$, el cuadrado del operador espín.

Al admitir también como simetría las dilataciones espacio-temporales vemos que la masa deja de ser una propiedad intrínseca. Es únicamente el espín la propiedad intrínseca de una partícula elemental. En efecto, puesto que el radio del movimiento interno es $R = s/mc$, un cambio de las escalas de longitud y tiempo corresponde a un cambio de masa, permaneciendo s y c constantes. Pero esta transformación de una partícula elemental de espín 1/2 modifica su estructura, su radio interno y su masa y se transforma en un estado de masa diferente pero del mismo espín.

La estructura del operador diferencial $\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{Z} + \mathbf{W}$, donde la parte del espín es $\mathbf{S} = \mathbf{Z} + \mathbf{W}$ posee por valor propio $s = 1/2$ en el modelo analizado. Esto implica que el valor propio del operador W^2 corresponde a $w = 1/2$ mientras que para la parte \mathbf{Z}^2 se reduce solamente a las dos posibilidades $z = 0$ o $z = 1$.

Además del grupo \mathcal{W} vamos a considerar la representación del grupo de rotaciones locales generadas por los T_i con valores propios $w = t = 1/2$. Tenemos por lo tanto un grupo de transformaciones espacio-temporales más amplio que el grupo de Weyl, con una estructura adicional $SU(2)$ al ser cuantizado.

Los generadores T_i conmutan con todos los generadores del grupo de Weyl \mathcal{W} , y este nuevo grupo de simetría lo podemos escribir como $\mathcal{S} = \mathcal{W} \otimes SU(2)_T$.

Este nuevo grupo posee solamente dos operadores de casimir S^2 y T^2 con valores propios 1/2. Esto es lo que justifica que nuestra función de onda sea un objeto de cuatro componentes.

²Abellanas L and Martinez Alonso L 1975 *J. Math. Phys.* **16** 1580

Al escoger el conjunto completo de observables que conmutan, tomamos los operadores $T^2 = S^2$, el operador S_3 y el T_3 que pueden tomar los valores $\pm 1/2$ y, por ejemplo el operador $p^\mu p_\mu$ y los operadores p^μ . De esta manera, podemos separar en la función de onda las variables de orientación y velocidad de las variables espacio-tiempo,

$$\psi(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{i=4} \phi_i(t, \mathbf{r}) \chi_i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha})$$

donde los cuatro espinores $\chi_i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha})$ se pueden clasificar de acuerdo con los valores propios $|s_3, t_3\rangle$. Las funciones $\phi_i(t, \mathbf{r})$ se pueden escoger como vectores propios del operador de Klein-Gordon

$$p_\mu p^\mu \phi_i(t, \mathbf{r}) = m_i^2 \phi_i(t, \mathbf{r}).$$

Como este operador $p_\mu p^\mu$ no conmuta con el observable D , el valor propio de la masa m_i no es una propiedad intrínseca, y el correspondiente valor depende del estado particular ϕ_i que se considere.

Para la clasificación de los espinores $\chi_i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha})$ podemos considerar también la parte de los operadores de momento angular \mathbf{Z} . Como $[Z^2, S^2] = [Z^2, T^2] = [Z^2, p^\mu] = 0$, podemos tomar Z^2 como un observable que conmuta. Solamente puede tomar valores propios enteros al actuar sobre funciones de las variables de velocidad. Es debido a que en términos de estas variables tiene la estructura de un momento angular orbital. Como el espín total $\mathbf{S} = \mathbf{Z} + \mathbf{W}$, y el valor propio de S^2 es $1/2$, los posibles valores propios de Z^2 son solamente $z = 0$ ó $z = 1$. Ver el apéndice al final del capítulo para una clasificación posible de las $\chi_i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha})$, de acuerdo con $z = 0$ y que da lugar a las funciones propias (3.69-3.72), y las funciones propias correspondientes a $z = 1$, dadas en (4.83-4.86). En este caso, las funciones propias no pueden ser simultáneamente vectores propios de Z_3 . Sin embargo, el valor esperado de Z_3 en la base correspondiente a $z = 0$, Φ_i , es 0, mientras que su valor esperado en la base correspondiente a $z = 1$, Ψ_i , es de $\pm 2/3$.

4.4.2. Ampliación del espacio cinemático

Una vez que el grupo cinemático ha sido ampliado incluyendo como simetrías adicionales las dilataciones espacio-temporales, tenemos una nueva variable cinemática adimensional asociada a este nuevo subgrupo uniparamétrico. De esta forma el espacio cinemático, como espacio homogéneo del nuevo grupo, puede ser ampliado. En efecto, si tomamos la derivada temporal de la constante del movimiento (4.66), obtenemos:

$$H = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}.$$

Si lo comparamos con la ecuación (4.19), vemos que falta un término. Esto implica, que desde el punto de vista clásico necesitamos una nueva variable cinemática adimensional β , que transforme bajo estas transformaciones, y que contribuya al nuevo observable D . El espacio cinemático ampliado transforma ahora:

$$t' = e^{\lambda t}, \quad \mathbf{r}' = e^{\lambda} \mathbf{r}, \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{\alpha}, \quad \beta' = \lambda + \beta.$$

Desde el punto de vista de la teoría de grupos, esta nueva variable adimensional corresponde con sus dimensiones y dominio lo mismo que el parámetro normal del nuevo subgrupo, cuyo generador es D .

Desde el punto de vista Lagrangiano, la nueva Lagrangiana dependerá también de β y de $\dot{\beta}$, con una estructura general de la forma

$$\tilde{L} = \dot{t}T + \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{R} + \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{U} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{W} + \dot{\beta}B,$$

siendo ahora $B = \partial\tilde{L}/\partial\dot{\beta}$. La constante del movimiento Noetheriana asociada a la invariancia de las ecuaciones dinámicas bajo las dilataciones espacio-temporales nos lleva a que

$$D = tH - \mathbf{r} \cdot \mathbf{P} - B,$$

y el nuevo generador en la versión cuántica aparece como:

$$D = it\partial/\partial t + i\mathbf{r} \cdot \nabla + i\frac{\partial}{\partial\beta}.$$

De esta forma, el último término de (4.19) está relacionado con la derivada temporal del último término de la ecuación de Dirac:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \cdot \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{u} \right).$$

Este nuevo observable B , con dimensiones de acción, posee una derivada temporal positiva para las partículas y una derivada temporal negativa para las antipartículas. Este signo está claramente ligado con el signo de H . Para el observador del centro de masa $\mathbf{P} = 0$, $H = \pm mc^2 = dB/dt$, que da por solución $B(t) = B(0) \pm mc^2 t$. En unidades de \hbar este observable representa la mitad de la fase del movimiento interno de la carga alrededor del centro de masa

$$B(t) = B(0) \pm \frac{1}{2} \hbar \omega t.$$

Una partícula de Dirac necesita dar dos vueltas para que su fase $B(t)$, en unidades de \hbar , incremente en 2π .

Debido a que las rotaciones locales generadas por los T_i conmutan con todo el grupo \mathcal{W} , las variables cinemáticas anteriores también siguen generando un espacio homogéneo del grupo total $\mathcal{W} \otimes SU(2)_T$, y, por lo tanto, también representan las variables cinemáticas de una partícula elemental cuyo grupo de simetrías espacio-temporales sea este nuevo grupo ampliado.

4.4.3. Relación con el modelo estándar

Hemos analizado el grupo de simetrías espacio-temporales de un modelo clásico de partícula elemental que satisface la ecuación de Dirac cuando se cuantiza. La materia descrita por este modelo (estados con $H > 0$), es de izquierdas mientras que es de derechas para la antimateria (estados con $H < 0$). El concepto de derechas e izquierdas, se refiere al movimiento del centro de carga una vez que la dirección del espín ha quedado fijada. Para la materia el movimiento de la carga es en sentido contrario a las agujas del reloj cuando miramos en la dirección del espín. Está contenido en un plano ortogonal a la dirección del espín, con el convenio habitual de signos para formas lineales y multivectores del álgebra geométrica. El movimiento tiene la dirección de las agujas del reloj para la antimateria.

El grupo de simetrías de la Lagrangiana de esta partícula es el $\mathcal{S} = \mathcal{W} \otimes SO(3)_T$ y es $\mathcal{W} \otimes SU(2)_T$ en su descripción cuántica. Es más amplio que el grupo de Poincaré que es con el que comenzamos el análisis cinemático. En la versión cuántica, además del grupo de Poincaré contiene un nuevo grupo $U(1)$, el cual es la representación unitaria del grupo de dilataciones espacio-temporales. Además contiene un grupo $SU(2)_T$ que es la representación unitaria del grupo de rotaciones locales del sistema cartesiano ligado al punto. El grupo total posee dos operadores de Casimir: S^2 , el operador de Casimir de \mathcal{W} y T^2 el operador de Casimir de $SU(2)_T$, que toman ambos los valores propios $s = t = 1/2$ para la partícula de Dirac que acabamos de considerar.

Algunas de estas características poseen ciertas similitudes con el modelo estándar de partículas elementales, por lo que respecta a aspectos cinemáticos. Si, por ejemplo, interpretamos los

generadores de las rotaciones locales T_i como si describiesen el isospín y que las componentes del momento angular \mathbf{Z} , relacionadas con la parte zitterbewegung del espín, como si describiesen color, entonces una partícula elemental de Dirac, descrita por este formalismo es un objeto masivo de espín $1/2$, isospín $1/2$, y de masa y carga arbitraria. Admite como estados de espín los $s_3 = \pm 1/2$ y también para el isospín $t_3 = \pm 1/2$. Existen dos representaciones irreducibles no equivalentes correspondientes a la parte zitterbewegung del espín z . Puede ser una partícula sin color $z = 0$ (lepton?) o una partícula con color $z = 1$ en uno cualquiera de los tres posibles estados de color $z_3 = 1, 0, -1$, (quark?), pero no admite valores mayores para el valor propio z . Los estados básicos pueden ser vectores propios de \mathbf{Z}^2 pero no de \mathbf{Z}_3 , de tal manera que el correspondiente color no es simultáneamente observable con los demás atributos del espín, y resulta por lo tanto inobservable. No existen posibilidades de transición entre partículas con color y sin color, debido a la ortogonalidad de las correspondientes representaciones irreducibles.

Como los valores propios de \mathbf{Z}_3 son inobservables, podemos rotar entre sus tres estados manteniendo el mismo valor del color $z = 1$. Estas rotaciones se reducen a una representación de un nuevo grupo interno, el grupo unitario $SU(3)$ que transforma entre sí los tres vectores propios de \mathbf{Z}_3 los vectores Y_i^j de (4.91) entre ellos y que no modifica el valor $z = 1$ de los espinores Ψ_i . Sin embargo, esta relación entre este nuevo grupo unitario $SU(3)$, el cual no es propiamente un grupo de transformaciones espacio-temporales sino un grupo de transformaciones entre estados $z = 1$, y el grupo de simetrías $\mathcal{W} \otimes SU(2)_T$ no es simplemente un producto directo y su análisis lo vamos a dejar para una futura investigación.

Este formalismo es puramente cinemático. No hemos hecho mención de ningún tipo particular de interacción, electromagnética, débil o fuerte, entre las diferentes clases de partículas. De esta forma, la comparación estricta con el modelo estándar, a pesar de que nos han aparecido como grupos adicionales $U(1)$, $SU(2)_T$ y $SU(3)$, puede parecer un poco artificial.

4.5. Una Lagrangiana de interacción para dos partículas de Dirac

Una partícula elemental puede ser aniquilada por la interacción con su antipartícula. Pero si no es destruida por esta interacción, hemos hecho la hipótesis de que no puede ser modificada, que su estructura no puede cambiar. Como sus propiedades intrínsecas son el espín S y su proyección en los ejes del cuerpo T , estas dos propiedades no pueden ser alteradas por ninguna interacción con algún campo externo o con otra partícula.

Consideremos un sistema compuesto por dos partículas elementales con espín y con el mismo espacio cinemático. Vamos a usar el subíndice $a = 1, 2$ para distinguir a las variables cinemáticas que se refieren a cada partícula. El espacio cinemático del sistema es el producto cartesiano de ambos espacios para cada partícula y formado por las variables $(t_a, \mathbf{r}_a, \mathbf{u}_a, \boldsymbol{\alpha}_a, \beta_a)$, $a = 1, 2$. La Lagrangiana del sistema compuesto se podrá escribir como

$$L = L_1 + L_2 + L_I$$

donde las L_a , $a = 1, 2$, son las Lagrangianas libres de cada partícula y L_I es la Lagrangiana de la interacción entre ellas, que estamos buscando. Ambas L_a son invariantes bajo el grupo ampliado $\mathcal{S} = \mathcal{W} \otimes SO(3)_T$ y lo que pretendemos es buscar una Lagrangiana de interacción L_I que sea también invariante bajo \mathcal{S} . La estructura general de cada una de las Lagrangianas L_a asociadas a cada partícula, como solamente dependen de las correspondientes variables cinemáticas, es

$$\tilde{L}_a = T_a \dot{t}_a + \mathbf{R}_a \cdot \dot{\mathbf{r}}_a + \mathbf{U}_a \cdot \dot{\mathbf{u}}_a + \mathbf{W}_a \cdot \boldsymbol{\omega}_a + B_a \dot{\beta}_a$$

donde $T_a = \partial \tilde{L}_a / \partial \dot{t}_a$, $\mathbf{R}_a = \partial \tilde{L}_a / \partial \dot{\mathbf{r}}_a$, $\mathbf{U}_a = \partial \tilde{L}_a / \partial \dot{\mathbf{u}}_a$, $\mathbf{W}_a = \partial \tilde{L}_a / \partial \boldsymbol{\omega}_a$ y $B_a = \partial \tilde{L}_a / \partial \dot{\beta}_a$, debido a la homogeneidad de cada \tilde{L}_a en términos de las derivadas τ de las correspondientes

variables cinemáticas. El espín y la proyección del espín sobre los ejes del cuerpo para cada partícula, son

$$\mathbf{S}_a = \mathbf{u}_a \times \mathbf{U}_a + \mathbf{W}_a, \quad T_{ai} = \mathbf{e}_{ai} \cdot \mathbf{W}_a$$

donde \mathbf{e}_{ai} , $i = 1, 2, 3$ son los tres vectores ortogonales con origen en cada punto \mathbf{r}_a .

La Lagrangiana de interacción entre estas dos partículas \tilde{L}_I , será en general una función de todas las variables cinemáticas de ambas partículas y de sus derivadas τ , y homogénea de grado uno en estas últimas. Pero si ambas propiedades intrínsecas de las dos partículas S_a y T_a , no son modificadas por la interacción, la Lagrangiana no puede ser una función de las derivadas τ de aquellas variables cinemáticas que den lugar a estas propiedades, es decir, no puede ser función de las variables $\dot{\mathbf{u}}_a$ y $\boldsymbol{\omega}_a$, $a = 1, 2$. En caso contrario, las funciones \mathbf{U}_a y \mathbf{W}_a contendrían términos provenientes de la \tilde{L}_I y serían diferentes que en el caso libre. Las funciones \mathbf{U}_a y \mathbf{W}_a , que dan lugar a la definición del espín, se tienen que obtener solamente a partir de las correspondientes Lagrangianas libres, \tilde{L}_a .

Entonces, por lo que respecta a la dependencia de la Lagrangiana \tilde{L}_I de las derivadas con respecto a τ de las variables cinemáticas, dependerá solamente de \dot{t}_a , $\dot{\mathbf{r}}_a$ y $\dot{\beta}_a$, $a = 1, 2$. Además de esto, será función de las variables cinemáticas t_a , \mathbf{r}_a , \mathbf{u}_a y β_a , pero no de las $\boldsymbol{\alpha}_a$ debido a la invariancia bajo el grupo de rotaciones locales $SO(3)_L$. La invariancia bajo dilataciones espacio-temporales implica que la Lagrangiana debe ser función de la diferencia de fase $\beta_1 - \beta_2$, y de $\dot{\beta}_1 - \dot{\beta}_2$, pero como esas fases son completamente arbitrarias debe ser independiente de estas fases.

Debido a la ligadura $\mathbf{u}_a = \dot{\mathbf{r}}_a/\dot{t}_a$, la Lagrangiana de la interacción será finalmente una función

$$\tilde{L}_I = \tilde{L}_I(t_a, \mathbf{r}_a, \dot{t}_a, \dot{\mathbf{r}}_a),$$

y función homogénea de grado uno de las derivadas \dot{t}_a , $\dot{\mathbf{r}}_a$, $a = 1, 2$.

Si escribimos, como es habitual, el tetravector Minkowskiano $x_a^\mu \equiv (ct_a, \mathbf{r}_a)$, la invariancia bajo traslaciones implica que la Lagrangiana debe ser función de $x_1^\mu - x_2^\mu$. Los dos siguientes términos $\eta_{\mu\nu} \dot{x}_1^\mu \dot{x}_2^\nu$ y $\eta_{\mu\nu} (x_1^\mu - x_2^\mu)(x_2^\nu - x_1^\nu)$, donde $\eta_{\mu\nu}$ es el tensor métrico de Minkowski, son invariantes Poincaré. Si consideramos que el parámetro de evolución τ no tiene dimensiones, estos términos poseen dimensiones de longitud al cuadrado. Por lo tanto su cociente es adimensional e invariante bajo dilataciones espacio-temporales. La otra condición es que la Lagrangiana sea homogénea de primer grado en las derivadas τ de las variables cinemáticas. La raíz cuadrada de lo anterior cumple este requisito. Si ambas partículas son idénticas, y por lo tanto indistinguibles, nos queda una simetría discreta: la Lagrangiana de interacción debe ser invariante bajo el intercambio $1 \leftrightarrow 2$ entre las etiquetas de ambas partículas. Llegamos, por lo tanto a la Lagrangiana invariante bajo el grupo total \mathcal{S}

$$\tilde{L}_I = g \sqrt{\frac{\eta_{\mu\nu} \dot{x}_1^\mu \dot{x}_2^\nu}{\eta_{\mu\nu} (x_1^\mu - x_2^\mu)(x_2^\nu - x_1^\nu)}} = g \sqrt{\frac{c^2 \dot{t}_1 \dot{t}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2}{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 - c^2 (t_2 - t_1)^2}}$$

donde g es una constante de acoplamiento.

Otras Lagrangianas alternativas que cumplen estos requisitos, pueden también construirse. Por ejemplo, $\tilde{L} = g(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^\mu (x_1 - x_2)_\mu / (x_1 - x_2)^2$, pero es una derivada total con respecto a τ de la función $\log(x_1 - x_2)^2$. Otra puede ser $\tilde{L} = g(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^\mu (x_1 - x_2)_\mu / (x_1 - x_2)^2$, sin dimensiones y lineal en las derivadas de las variables cinemáticas, pero cambia de signo bajo el intercambio $1 \leftrightarrow 2$, y por lo tanto todos los observables de la interacción, como la energía de interacción, cambian de signo, lo cual no tiene sentido físico para dos partículas idénticas.

La interacción entre dos partículas de Dirac no es única. Sabemos que entre los leptones y los quarks hay interacciones de corto alcance, como la débil y la fuerte y otra que es tanto de corto como de largo alcance que es la interacción electromagnética. La Lagrangiana que se propone, tiene la ventaja de que describe una interacción que es invariante bajo cambios de escala, y por

lo tanto puede describir una interacción tanto de corto como de largo alcance, y que, además posee un comportamiento Coulombiano, cuando se suprimen los espines de las partículas, como veremos en la siguiente sección. De esta forma, suministra una especie de generalización como acción a distancia, de una interacción electromagnética. La novedad es que ha sido obtenida suponiendo un grupo de simetrías más amplio que el grupo de Poincaré.

4.5.1. Descripción síncrona

Una vez que un cierto observador inercial queda fijado, consideremos que éste realiza una descripción síncrona, es decir, que usa como parámetro de evolución su tiempo t , que resulta ser el mismo que los dos tiempos t_1 y t_2 de las dos partículas. En este caso, $t = t_1 = t_2$, $\dot{t}_1 = \dot{t}_2 = 1$, y por lo tanto

$$L_I = g \sqrt{\frac{c^2 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2}} = g \frac{\sqrt{c^2 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}}{r} \quad (4.70)$$

donde $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ es la separación instantánea entre las dos cargas en este sistema de referencia, y $\mathbf{u}_a = d\mathbf{r}_a/dt$ la velocidad de la carga a .

Un promedio sobre la posición y velocidad de la carga, en el centro de masa de la partícula 1 implica que $\langle \mathbf{r}_1 \rangle = \mathbf{q}_1$ y $\langle \mathbf{u}_1 \rangle = 0$, de tal manera que la interacción se reduce a la interacción Coulombiana instantánea entre el centro de masa de la primera partícula y el centro de carga de la otra. Un nuevo promedio sobre la otra corresponde finalmente a la interacción Coulombiana instantánea de dos partículas puntuales sin espín, puesto que al eliminar el zitterbewegung estamos suprimiendo la estructura del espín.

Esto está sugiriendo que la constante de acoplamiento $gc \sim \pm e^2$ en términos de las cargas eléctricas de cada partícula y donde el signo \pm depende de si las cargas son de signos opuestos o del mismo signo.

4.6. Apéndice: El grupo $\mathcal{S} = \mathcal{W} \otimes SU(2)_T \otimes U(1)_Q$

Bajo traslaciones infinitesimales de tiempo y espacio de parámetros $\delta\tau$ y $\delta\mathbf{b}$, respectivamente, las variables cinemáticas transforman:

$$t' = t + \delta\tau, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \delta\mathbf{b}, \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u}, \quad \alpha' = \alpha, \quad \beta' = \beta$$

de tal manera que los generadores autoadjuntos de las traslaciones son

$$H = i \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{P} = -i\nabla, \quad [H, \mathbf{P}] = 0.$$

Bajo una dilatación infinitesimal de parámetro normal $\delta\lambda$, transforman como:

$$t' = t + t\delta\lambda, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{r}\delta\lambda, \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v}, \quad \alpha' = \alpha, \quad \beta' = \beta + \delta\lambda$$

por lo que el generador adopta la forma ($\hbar = 1$)

$$D = it \frac{\partial}{\partial t} + i\mathbf{r} \cdot \nabla + i \frac{\partial}{\partial \beta} = tH - \mathbf{r} \cdot \mathbf{P} - B, \quad [D, H] = -iH, \quad [D, P_j] = -iP_j.$$

Para describir la orientación podemos representar cada elemento del grupo de rotaciones por el trivector $\alpha = \alpha\mathbf{n}$, donde α es el ángulo a girar y \mathbf{n} es el vector unidad a lo largo del eje de rotación. Esta es la parametrización normal o canónica. Alternativamente, podemos representar cada rotación por el trivector $\rho = \tan(\alpha/2)\mathbf{n}$. En este caso, cada matriz de rotación toma la forma

$$R(\rho)_{ij} = \frac{1}{1 + \rho^2} \left((1 - \rho^2)\delta_{ij} + 2\rho_i\rho_j + 2\epsilon_{ikj}\rho_k \right).$$

La ventaja de esta parametrización es que la composición de dos rotaciones es especialmente simple. $R(\boldsymbol{\rho}') = R(\boldsymbol{\mu})R(\boldsymbol{\rho})$ toma la forma

$$\boldsymbol{\rho}' = \frac{\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\rho}}{1 - \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\rho}}.$$

Bajo una rotación infinitesimal de parámetro $\delta\boldsymbol{\mu} = \delta\boldsymbol{\alpha}/2$, o en términos del parámetro normal, las variables cinemáticas transforman como

$$\begin{aligned} \delta t &= 0, & \delta\beta &= 0 \\ \delta r_i &= -2\epsilon_{ijk}r_j\delta\mu_k, \\ \delta u_i &= -2\epsilon_{ijk}u_j\delta\mu_k, \\ \delta\rho_i &= (\delta_{ik} + \rho_i\rho_k + \epsilon_{ikl}\rho_l)\delta\mu_k, \end{aligned}$$

de manera que la variación de las variables cinemáticas por unidad de parámetro normal de rotación $\delta\alpha_k$ es

$$\begin{aligned} \delta t_k &= 0, & \delta\beta_k &= 0, \\ \delta r_{ik} &= -\epsilon_{ijk}r_j, \\ \delta u_{ik} &= -\epsilon_{ijk}u_j, \\ \delta\rho_{ik} &= \frac{1}{2}[\delta_{ik} + \rho_i\rho_k + \epsilon_{ikl}\rho_l], \end{aligned}$$

y así los generadores autoadjuntos J_k , son, utilizando unidades naturales $\hbar = 1$ y $c = 1$,

$$J_k = i\epsilon_{ijk}r_j\frac{\partial}{\partial r_i} + i\epsilon_{ijk}u_j\frac{\partial}{\partial u_i} + \frac{1}{2i}\left(\frac{\partial}{\partial\rho_k} + \rho_k\rho_i\frac{\partial}{\partial\rho_i} + \epsilon_{ikl}\rho_l\frac{\partial}{\partial\rho_i}\right).$$

Pueden ser separados en tres partes, de acuerdo a los diferentes operadores diferenciales involucrados, que derivan con respecto a las tres clases de variables cinemáticas \mathbf{r} , \mathbf{u} y $\boldsymbol{\rho}$, respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{L} + \mathbf{Z} + \mathbf{W}, \\ L_k &= i\epsilon_{ijk}r_j\frac{\partial}{\partial r_i}, \\ Z_k &= i\epsilon_{ijk}u_j\frac{\partial}{\partial u_i}, & W_k &= \frac{1}{2i}\left(\frac{\partial}{\partial\rho_k} + \rho_k\rho_i\frac{\partial}{\partial\rho_i} + \epsilon_{ikl}\rho_l\frac{\partial}{\partial\rho_i}\right). \end{aligned} \quad (4.71)$$

Todos ellos satisfacen las reglas de conmutación del momento angular y conmutan entre sí:

$$\begin{aligned} [L_j, L_k] &= i\epsilon_{jkl}L_l, & [Z_j, Z_k] &= i\epsilon_{jkl}Z_l, & [W_j, W_k] &= i\epsilon_{jkl}W_l, \\ [\mathbf{L}, \mathbf{Z}] &= [\mathbf{L}, \mathbf{W}] = [\mathbf{Z}, \mathbf{W}] = 0. \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$[J_j, J_k] = i\epsilon_{jkl}J_l, \quad [\mathbf{J}, H] = [\mathbf{J}, D] = 0, \quad [J_j, P_k] = i\epsilon_{jkl}P_l.$$

La variable de orientación anterior $\boldsymbol{\rho}$, bajo un boost general de velocidad \mathbf{v} , transforma como

$$\boldsymbol{\rho}' = \frac{\boldsymbol{\rho} + \mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})}{1 + G(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})},$$

donde

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = \frac{\gamma(v)}{1 + \gamma(v)}(\mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{v}(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\rho}) + (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\rho}) \times \mathbf{v}),$$

$$G(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = \frac{\gamma(v)}{1 + \gamma(v)} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\rho})), \quad \gamma(v) = (1 - v^2)^{-1/2}.$$

Finalmente, bajo un boost infinitesimal de parámetro $\delta\mathbf{v}$, $\gamma(v) \approx 1$, las variables cinemáticas transforman como:

$$\begin{aligned} \delta t &= \mathbf{r} \cdot \delta\mathbf{v} \\ \delta\mathbf{r} &= t\delta\mathbf{v} \\ \delta\mathbf{u} &= \delta\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{v}) \\ \delta\boldsymbol{\rho} &= -[\boldsymbol{\rho}(\mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{v}) + \boldsymbol{\rho}((\mathbf{u} \times \boldsymbol{\rho}) \cdot \delta\mathbf{v}) - \mathbf{u} \times \delta\mathbf{v} - \delta\mathbf{v}(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\rho}) - \\ &\quad (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\rho}) \times \delta\mathbf{v}] / 2, \\ \delta\beta &= 0, \end{aligned}$$

por lo que la variación de estas variables por unidad de parámetro infinitesimal de velocidad δv_j , es

$$\begin{aligned} \delta t_j &= r_j \\ \delta r_{ij} &= t\delta_{ij} \\ \delta v_{ij} &= \delta_{ij} - u_i u_j \\ \delta \rho_{ij} &= -\frac{1}{2} [\rho_j u_i + \rho_i \epsilon_{jkl} u_k \rho_l - \epsilon_{ikj} u_k - \delta_{ij} u_k \rho_k], \\ \delta \beta_j &= 0, \end{aligned}$$

de tal manera que los generadores de los boosts K_j adoptan la forma

$$\begin{aligned} K_j &= ir_j \frac{\partial}{\partial t} + it \frac{\partial}{\partial r_j} + i \left(\frac{\partial}{\partial u_j} - u_j u_i \frac{\partial}{\partial u_i} \right) + \\ &\quad \frac{1}{2i} \left(\rho_j u_i \frac{\partial}{\partial \rho_i} + \rho_i \epsilon_{jkl} u_k \rho_l \frac{\partial}{\partial \rho_i} - \epsilon_{ikj} u_k \frac{\partial}{\partial \rho_i} - u_k \rho_k \frac{\partial}{\partial \rho_j} \right) \end{aligned}$$

Análogamente, los generadores K_j se pueden descomponer en tres partes, de acuerdo con los operadores diferenciales involucrados y los vamos a representar con las mismas letras mayúsculas que en el caso de los operadores de la descomposición de \mathbf{J} pero con una tilde superpuesta:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \tilde{\mathbf{L}} + \tilde{\mathbf{Z}} + \tilde{\mathbf{W}}, \quad \tilde{L}_j = ir_j \frac{\partial}{\partial t} + it \frac{\partial}{\partial r_j}, \quad \tilde{Z}_j = i \left(\frac{\partial}{\partial u_j} - u_j u_i \frac{\partial}{\partial u_i} \right), \\ \tilde{W}_j &= \frac{1}{2i} \left(\rho_j u_i \frac{\partial}{\partial \rho_i} + \rho_i \epsilon_{jkl} u_k \rho_l \frac{\partial}{\partial \rho_i} + \epsilon_{jki} u_k \frac{\partial}{\partial \rho_i} - u_k \rho_k \frac{\partial}{\partial \rho_j} \right) \end{aligned}$$

Satisfacen las reglas de conmutación:

$$[\tilde{L}_j, \tilde{L}_k] = -i\epsilon_{jkl} L_l, \quad [\tilde{Z}_j, \tilde{Z}_k] = -i\epsilon_{jkl} Z_l, \quad [\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{Z}}] = [\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{W}}] = 0,$$

y también

$$[K_j, K_k] = -i\epsilon_{jkl} J_l.$$

Podemos verificar que

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \mathbf{u} \times \mathbf{Z}, \quad \tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{u} \times \mathbf{W}.$$

Si definimos el operador espín con respecto al centro de carga en la forma habitual $\mathbf{S} = \mathbf{Z} + \mathbf{W}$, y la parte del momento cinemático $\tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{Z}} + \tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{u} \times \mathbf{S}$, satisfacen

$$[S_j, S_k] = i\epsilon_{jkl} S_l, \quad [S_j, \tilde{S}_k] = i\epsilon_{jkl} \tilde{S}_l, \quad [\tilde{S}_j, \tilde{S}_k] = -i\epsilon_{jkl} S_l,$$

donde en esta última expresión hemos utilizado la ligadura de que $u^2 = 1$. Generan el álgebra de Lie de un grupo de Lorentz que conmuta con las traslaciones espacio-temporales, $[\mathcal{S}, p^\mu] = [\tilde{\mathcal{S}}, p^\mu] = 0$.

Con respecto a la parte $SU(2)_T$, calculemos sus generadores. Este grupo, con un elemento infinitesimal de parámetros $\delta\nu_k$ actúa sobre las variables cinemáticas de la forma:

$$\delta t = 0, \quad \delta\beta = 0, \quad \delta r_i = 0, \quad \delta u_i = 0, \quad \delta\rho_i = (\delta_{ik} + \rho_i\rho_k + \epsilon_{ikl}\rho_l)\delta\nu_k,$$

En la parametrización $\boldsymbol{\rho}$ del grupo de rotaciones, los vectores unidad de los ejes del cuerpo \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$ poseen por componentes:

$$(\mathbf{e}_i)_j = R(\boldsymbol{\rho})_{ji},$$

de manera que los operadores $T_k = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{W}$ de proyección de la parte rotacional del espín \mathbf{W} en los ejes del cuerpo, vienen dados por

$$T_k = \frac{1}{2i} \left(\frac{\partial}{\partial\rho_k} + \rho_k\rho_i \frac{\partial}{\partial\rho_i} - \epsilon_{ikl}\rho_l \frac{\partial}{\partial\rho_i} \right). \quad (4.72)$$

Difieren de los W_k de (4.71) por el cambio de $\boldsymbol{\rho}$ por $-\boldsymbol{\rho}$, seguido de un cambio global de signo. Satisfacen las reglas de conmutación:

$$[T_j, T_k] = -i\epsilon_{jkl}T_l. \quad (4.73)$$

el signo menos del lado derecho de (4.73) corresponde a la diferencia entre la interpretación activa y pasiva de las transformaciones. Una rotación de los ejes del laboratorio (rotación pasiva) posee por generadores los \mathbf{J} , que satisfacen $[J_j, J_k] = i\epsilon_{jkl}J_l$. Los T_i corresponden a los generadores de las rotaciones del sistema de referencia ligado a la partícula (rotación activa), así que de esta forma, los generadores $-T_i$ poseerán reglas de conmutación pasivas $[-T_j, -T_k] = i\epsilon_{jkl}(-T_l)$.

En la parametrización normal de las rotaciones $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{n}$, si describimos el vector unidad \mathbf{n} a lo largo del eje de rotación por los ángulos habituales, polar y acimutal θ y ϕ , respectivamente, de tal manera que $\mathbf{n} \equiv (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$, los anteriores generadores W_i toman la forma

$$W_1 = \frac{1}{2i} \left[2\sin\theta \cos\phi \frac{\partial}{\partial\alpha} + \left(\frac{\cos\theta \cos\phi}{\tan(\alpha/2)} - \sin\phi \right) \frac{\partial}{\partial\theta} - \left(\frac{\sin\phi}{\tan(\alpha/2)\sin\theta} + \frac{\cos\theta \cos\phi}{\sin\theta} \right) \frac{\partial}{\partial\phi} \right], \quad (4.74)$$

$$W_2 = \frac{1}{2i} \left[2\sin\theta \sin\phi \frac{\partial}{\partial\alpha} + \left(\frac{\cos\theta \sin\phi}{\tan(\alpha/2)} + \cos\phi \right) \frac{\partial}{\partial\theta} - \left(\frac{\cos\theta \sin\phi}{\sin\theta} - \frac{\cos\phi}{\tan(\alpha/2)\sin\theta} \right) \frac{\partial}{\partial\phi} \right], \quad (4.75)$$

$$W_3 = \frac{1}{2i} \left[2\cos\theta \frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{\sin\theta}{\tan(\alpha/2)} \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\phi} \right], \quad (4.76)$$

$$W^2 = - \left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\tan(\alpha/2)} \frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{1}{4\sin^2(\alpha/2)} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right\} \right], \quad (4.77)$$

$$W_+ = W_1 + iW_2 = \frac{e^{i\phi}}{2i} \left[2 \sin \theta \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\cos \theta}{\tan(\alpha/2)} \frac{\partial}{\partial \theta} + i \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{i}{\tan((\alpha/2)) \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right], \quad (4.78)$$

$$W_- = W_1 - iW_2 = \frac{e^{-i\phi}}{2i} \left[2 \sin \theta \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\cos \theta}{\tan(\alpha/2)} \frac{\partial}{\partial \theta} - i \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{i}{\tan(\alpha/2) \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right], \quad (4.79)$$

y los generadores pasivos T_i toman la forma

$$T_1 = \frac{-i}{2} \left[2 \sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \alpha} + \left(\frac{\cos \theta \cos \phi}{\tan(\alpha/2)} + \sin \phi \right) \frac{\partial}{\partial \theta} - \left(\frac{\sin \phi}{\tan(\alpha/2) \sin \theta} - \frac{\cos \theta \cos \phi}{\sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \right], \quad (4.80)$$

$$T_2 = \frac{-i}{2} \left[2 \sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \alpha} + \left(\frac{\cos \theta \sin \phi}{\tan(\alpha/2)} - \cos \phi \right) \frac{\partial}{\partial \theta} - \left(-\frac{\cos \theta \sin \phi}{\sin \theta} - \frac{\cos \phi}{\tan(\alpha/2) \sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \right], \quad (4.81)$$

$$T_3 = \frac{-i}{2} \left[2 \cos \theta \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\sin \theta}{\tan(\alpha/2)} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \phi} \right]. \quad (4.82)$$

Los T_i están relacionados ahora con los W_i , por el cambio α por $-\alpha$ (sin cambio global de signo).

Con respecto a la parte $U(1)_Q$, de generador Q , que conmuta con todos los demás, la acción de un elemento infinitesimal $\delta\chi$ de este grupo sobre las variables cinemáticas es:

$$\delta t = 0, \quad \delta \beta = \delta \chi, \quad \delta r_i = 0, \quad \delta u_i = 0, \quad \delta \rho_i = 0,$$

por lo que el generador en la representación cuántica de este grupo es el

$$Q = -i \frac{\partial}{\partial \beta}$$

Como conmuta con todos los demás, podemos sacar de la función de onda la parte dependiente de esta variable

$$Qf(\beta) = qf(\beta), \quad f(\beta) \sim e^{iq\beta},$$

con lo que la función de onda general es

$$\psi(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}, \beta) = e^{iq\beta} \Psi(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}),$$

donde la variable β aparece dentro de una fase general.

Los vectores propios normalizados de $W^2 = T^2$, W_3 y T_3 para $w = t = 1/2$, si los escribimos en la forma $|w_3, t_3\rangle$, (que podemos verificar son también vectores propios de Z^2 con $z = 0$) se escriben como $|0; s_3, t_3\rangle$

$$\Phi_1 = |1/2, -1/2\rangle = i\sqrt{2} \sin(\alpha/2) \sin \theta e^{i\phi}, \quad (4.83)$$

$$\Phi_2 = |-1/2, -1/2\rangle = \sqrt{2} (\cos(\alpha/2) - i \cos \theta \sin(\alpha/2)) \quad (4.84)$$

$$\Phi_3 = |1/2, 1/2\rangle = -\sqrt{2} (\cos(\alpha/2) + i \cos \theta \sin(\alpha/2)), \quad (4.85)$$

$$\Phi_4 = |-1/2, 1/2\rangle = -i\sqrt{2} \sin(\alpha/2) \sin \theta e^{-i\phi}. \quad (4.86)$$

Los operadores de subida y bajada W_{\pm} y los correspondientes T_{\pm} , los transforman entre sí. Los $\{\Phi_1, \Phi_2\}$ están ligados por W_{\pm} , y análogamente los $\{\Phi_3, \Phi_4\}$, mientras que los conjuntos $\{\Phi_1, \Phi_3\}$ y $\{\Phi_2, \Phi_4\}$ están ligados cada uno de ellos por los T_{\pm} . Por ejemplo

$$W_- \Phi_1 = \Phi_2, \quad W_- \Phi_2 = 0, \quad W_- \Phi_3 = \Phi_4,$$

$$T_- \Phi_1 = \Phi_3, \quad T_- \Phi_3 = 0, \quad T_- \Phi_2 = \Phi_4.$$

Forman un conjunto ortonormal con respecto a la medida normalizada e invariante, definida sobre $SU(2)$

$$dg(\alpha, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi^2} \sin^2(\alpha/2) \sin \theta d\alpha d\theta d\phi,$$

$$\alpha \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [0, \pi], \quad \phi \in [0, 2\pi].$$

$$\int_{SU(2)} dg(\alpha, \theta, \phi) = 1.$$

La función de onda ψ se puede separar en la forma

$$\psi(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{i=4} \phi_i(t, \mathbf{r}) \chi_i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha})$$

donde las cuatro χ_i se pueden clasificar de acuerdo con los valores propios $|w_3, t_3\rangle$. Las funciones $\phi_i(t, \mathbf{r})$ se pueden escoger como vectores propios del operador de Klein-Gordon

$$p_{\mu} p^{\mu} \phi_i(t, \mathbf{r}) = m_i^2 \phi_i(t, \mathbf{r}).$$

Las funciones $\chi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha})$ se pueden a su vez separar en variables ya que el espín total \mathbf{S} con $s = 1/2$, es la suma de las dos partes $\mathbf{S} = \mathbf{Z} + \mathbf{W}$, con $[\mathbf{Z}, \mathbf{W}] = 0$, de tal manera que si la parte \mathbf{W} contribuye con $w = 1/2$ entonces la parte \mathbf{Z} contribuye con $z = 0$ o bien $z = 1$. La contribución con $z = 0$ corresponde a las funciones $\chi_i(\boldsymbol{\alpha})$ independientes de las variables de velocidad y el conjunto ortonormal son los anteriores Φ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, de (4.83)-(4.86) que pueden describirse en la forma $|z; s_3, t_3\rangle$, con $z = 0$.

Como $\mathbf{Z} = -i\mathbf{u} \times \nabla_{\mathbf{u}}$, para la parte $z = 1$ los vectores propios de Z^2 y Z_3 son los armónicos esféricos $Y_1^i(\beta, \lambda)$, $i = -1, 0, 1$. Las variables β y λ representan la dirección del vector velocidad \mathbf{u} . Como $[Z_i, W_j] = 0$, podemos separar de nuevo las variables en las funciones $\chi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha})$. En este caso las $\chi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum \phi_i(\beta, \lambda) \lambda_i(\boldsymbol{\alpha}, \theta, \phi)$. Lo cuatro vectores ortonormales, vectores propios de S_3 , Z^2 con $z = 1$ y T_3 , $|1; s_3, t_3\rangle$, son ahora

$$\Psi_1 = |1; 1/2, 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(Y_1^0(\beta, \lambda) \Phi_1 - \sqrt{2} Y_1^1(\beta, \lambda) \Phi_2 \right), \quad (4.87)$$

$$\Psi_2 = |1; -1/2, 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-Y_1^0(\beta, \lambda) \Phi_2 + \sqrt{2} Y_1^{-1}(\beta, \lambda) \Phi_1 \right), \quad (4.88)$$

$$\Psi_3 = |1; 1/2, -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(Y_1^0(\beta, \lambda) \Phi_3 - \sqrt{2} Y_1^1(\beta, \lambda) \Phi_4 \right), \quad (4.89)$$

$$\Psi_4 = |1; -1/2, -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-Y_1^0(\beta, \lambda) \Phi_4 + \sqrt{2} Y_1^{-1}(\beta, \lambda) \Phi_3 \right). \quad (4.90)$$

Los Φ_i son los mismos que en (4.83-4.86) y los armónicos esféricos $Y_1^i(\beta, \lambda)$ son

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\beta) e^{i\lambda}, \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\beta), \quad Y_1^{-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\beta) e^{-i\lambda}. \quad (4.91)$$

Los operadores Z_i vienen dados por

$$Z_1 = i \sin \lambda \frac{\partial}{\partial \beta} + i \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \cos \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda}, \quad Z_2 = -i \cos \lambda \frac{\partial}{\partial \beta} + i \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \sin \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda},$$

$$Z_3 = -i \frac{\partial}{\partial \lambda}.$$

y los operadores de subida y bajada Z_{\pm} son

$$Z_{\pm} = e^{\pm i \lambda} \left(\pm \frac{\partial}{\partial \beta} + i \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right),$$

de tal manera que

$$Z_- Y_1^1 = \sqrt{2} Y_1^0, \quad Z_- Y_1^0 = \sqrt{2} Y_1^{-1}.$$

Los cuatro espinores Ψ_i son ortonormales con respecto a la medida invariante

$$dg(\alpha, \theta, \phi; \beta, \lambda) = \frac{1}{4\pi^2} \sin^2(\alpha/2) \sin \theta \sin \beta d\alpha d\theta d\phi d\beta d\lambda$$

$$\alpha \in [0, 2\pi], \quad \beta, \theta \in [0, \pi], \quad \lambda, \phi \in [0, 2\pi].$$

Como anteriormente, los operadores de subida y bajada $S_{\pm} = Z_{\pm} + W_{\pm}$ y los correspondientes T_{\pm} transforman las Ψ_i entre sí. En particular $\{\Psi_1, \Psi_2\}$ están ligados por S_{\pm} , y análogamente $\{\Psi_3, \Psi_4\}$ mientras que el conjunto $\{\Psi_1, \Psi_3\}$ y $\{\Psi_2, \Psi_4\}$ se relacionan separadamente mediante T_{\pm} . Esta es la razón por la que el espinor más general en esta representación posee cuatro componentes.

En la base con $z = 0$, los Φ_i de (4.83-4.86), los operadores de espín y los vectores básicos del cuerpo, toman la forma

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} = \mathbf{W},$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i\mathbb{I} \\ i\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e}_1 = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -i\boldsymbol{\sigma} \\ i\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix},$$

en términos de las matrices de Pauli $\boldsymbol{\sigma}$ y de la matriz unidad 2×2 , \mathbb{I} .

En la base con $z = 1$ los Ψ_i vienen dados en (4.87-4.90), los operadores S_i y T_i toman la misma forma matricial que en el caso anterior, mientras que los vectores \mathbf{e}_i aparecen

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & -i\boldsymbol{\sigma} \\ i\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}.$$

En todos los casos, las 6 matrices Hermíticas de traza nula S_i, T_j , junto con las nueve matrices Hermíticas de traza nula e_{ij} y la matriz unidad 4×4 , son linealmente independientes y por lo tanto forman una base completa y Hermítica del álgebra de Dirac, de manera que cualquier otro observable que sea invariante por traslación, se expresará como una combinación lineal real de estas 16 matrices Hermíticas. Hemos hecho uso de este hecho para obtener la ecuación de Dirac en este modelo.

Ambas representaciones son ortogonales entre sí, $\langle \Phi_i | \Psi_j \rangle = 0$, y producen dos representaciones irreducibles diferentes, de donde podemos deducir que describen dos tipos distintos de partículas del mismo espín $1/2$. ¿Será que una de las representaciones corresponde a la descripción de hadrones, es decir quarks, y la otra lo que describe son los leptones? Esto está sin probar ya que aunque se ha avanzado alguna sugerencia en este sentido en la sección 4.4.3, no queda claro que una de las clases de partículas tenga color y la otra no.

La representación matricial de los operadores Z_i y W_i en la base Ψ_i vienen dados por

$$\mathbf{Z} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix},$$

a pesar de que los vectores Ψ_i no son vectores propios de Z_3 y W_3 .

Capítulo 5

Estructura electromagnética del electrón

5.1. Estructura electromagnética del electrón

Consideremos que un electrón clásico viene descrito por el modelo relativista en el que la carga se mueve en círculos, a la velocidad de la luz, alrededor del centro de masa, y en el sistema de referencia del centro de masa.

Una de las primeras preguntas que uno se plantea es: ¿Cuál es el campo electromagnético producido por esta partícula? Como la carga está acelerada, desde el punto de vista clásico el sistema debería radiar. Sin embargo, desde el punto de vista mecánico el sistema es estable y conserva tanto la energía como sus momentos lineal y angular. La radiación se deberá producir cuando el centro de masa se acelere, es decir, cuando la partícula deje de ser libre.

Existen soluciones no radiativas de las ecuaciones de Maxwell asociadas a puntos cargados que se mueven a la velocidad de la luz. Una posibilidad es considerar soluciones derivadas a partir de los potenciales de Liénard-Wiechert en la forma $(A_{ret}^\mu + A_{adv}^\mu)/2$, donde A_{ret}^μ y A_{adv}^μ son los potenciales retardados y avanzados, respectivamente. Pero incluso aunque el campo eléctrico fuese $(\mathbf{E}_{ret} + \mathbf{E}_{adv})/2$, no es ni estático ni siquiera de comportamiento Coulombiano. No parece reproducir lo que habitualmente consideramos que es el campo asociado a un electrón en reposo.

Sin embargo, vamos a considerar a continuación una solución estática: el campo promedio temporal durante una vuelta completa de la carga. La sorpresa va a ser su comportamiento Coulombiano en cualquier dirección.

5.1.1. El campo promedio temporal de una partícula de Dirac

Supongamos una carga de prueba en el entorno de nuestro electrón. La frecuencia del zitterbewegung es muy alta, del orden de $\sim 10^{21} \text{ s}^{-1}$. Si nuestra partícula de prueba se mueve lentamente, entonces el campo eléctrico detectado en una primera aproximación será una especie de promedio temporal del campo durante una vuelta completa de la carga.

El campo eléctrico retardado(o avanzado) de una carga puntual en el punto de observación \mathbf{x} y en el instante t viene dado por ¹

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\beta + \mathbf{E}_a,$$

donde

$$\mathbf{E}_\beta(t, \mathbf{x}) = \frac{e(1 - \beta^2)}{R^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}), \quad (5.1)$$

¹ A.O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*, Dover, N.Y. (1980).

$$\mathbf{E}_a(t, \mathbf{x}) = \frac{e}{Rc^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{a}), \quad (5.2)$$

son los campos de velocidad y aceleración, respectivamente. Los observables \mathbf{r} , $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$ y $\mathbf{a} = d\mathbf{u}/dt$, son la posición, velocidad y aceleración de la carga, evaluados en el instante retardado(o avanzado) $\tilde{t} = t - R/c$, (o $\tilde{t} = t + R/c$). El vector $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{u}/c$, y

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|}, \quad R = |\mathbf{x} - \mathbf{r}|.$$

El campo magnético es $\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}/c$. Como la carga del electrón se mueve a la velocidad de la luz, $\beta = 1$, el campo de velocidad \mathbf{E}_β es nulo. De aquí resulta que la única contribución al campo es la (5.2) que va como $1/R$.

La expresión general del campo promedio temporal en un punto cualquiera es difícil de obtener. Para obtener una estimación vamos a calcularlo analíticamente en un punto en la dirección del espín y en un punto cualquiera de forma numérica. Consideremos que el electrón está en reposo, es decir su centro de masa se encuentra en el origen del sistema de referencia. El espín es constante y apunta en la dirección del eje OZ . Vamos a calcular el campo promedio en un punto P de coordenada z en el eje OZ . En la Figura 5.1, representamos las diferentes magnitudes en el instante retardado \tilde{t} , para hacer el cálculo de la ecuación (5.2).

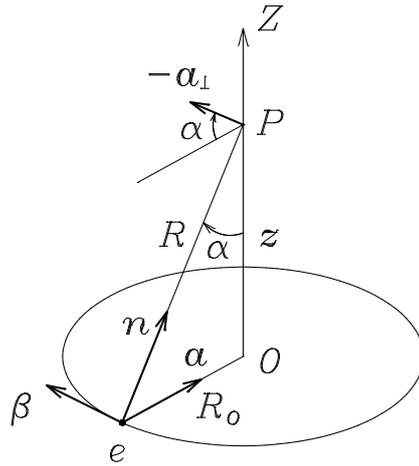


Figura 5.1: El campo eléctrico Instantáneo del electrón en el punto P posee una componente a lo largo de $-a_\perp$ y $-\beta$.

Para ese punto particular de la figura, $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0$, y por lo tanto

$$\mathbf{E} = \frac{e}{c^2 R} (\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{a}) - \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{a})) = \frac{e}{c^2 R} (-\mathbf{a}_\perp - \boldsymbol{\beta}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})),$$

donde el vector $\mathbf{a}_\perp = \mathbf{a} - \mathbf{n}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})$, es la componente de la aceleración perpendicular al vector unidad \mathbf{n} . Para el punto de observación P , la expresión $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}$ es constante en cualquier punto retardado, el valor medio temporal de $\boldsymbol{\beta}$ durante una vuelta completa de la carga es cero, y el vector \mathbf{a}_\perp se reduce a su componente z , $a_\perp \sin \alpha$. Como la aceleración en este sistema de referencia vale $a = c^2/R_0$, $a_\perp = a \cos \alpha$ y además $\sin \alpha = R_0/R$ y $\cos \alpha = z/R$, el campo eléctrico promedio temporal en el punto P es

$$\mathbf{E}(z) = \frac{ez}{(R_0^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}, \quad (5.3)$$

donde \hat{z} es un vector unidad a lo largo del eje OZ . El campo promedio avanzado tiene exactamente la misma expresión. Es un campo estático y radial a partir del origen del sistema de referencia, con un comportamiento Coulombiano de tipo $1/z^2$, para z grande, pero que además no diverge en el origen. En la Figura 5.2, comparamos este campo con el campo de Coulomb de una carga puntual en el origen. La figura ha sido reescalada de tal manera que la unidad es el radio R_0 del movimiento interno.

Vemos claramente el comportamiento Coulombiano de este campo promedio temporal para z grande, a partir de $|z| \geq 5R_0$. El máximo del campo tiene lugar a la distancia $z = R_0/\sqrt{2}$. Si realmente lo que mide una carga de prueba es este campo promedio temporal, su energía no diverge, con lo que la energía electrostática del electrón estaría renormalizada. Para encontrar esta energía tendríamos que encontrar la expresión general del campo e integrarla, pero esta tarea, de momento, va a ser solamente de tipo numérico. De todas formas, el campo instantáneo diverge donde está la carga, pero diverge como $1/R$, luego la energía va como $1/R^2$ y como el elemento de volumen va como $4\pi R^2 dR$, resulta que no existe divergencia de la energía del campo instantáneo, en la posición de la carga. Veremos que existen otros puntos, contenidos en el plano del zitterbewegung, en los que el campo instantáneo también diverge, por lo que el proceso de cálculo de la energía, no parece conducir a infinitos. Este cálculo está sin hacer.

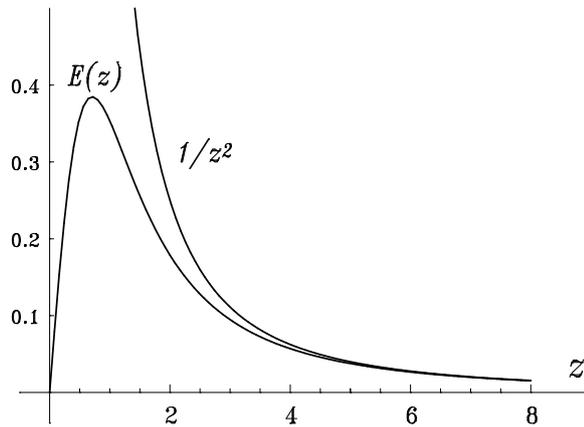
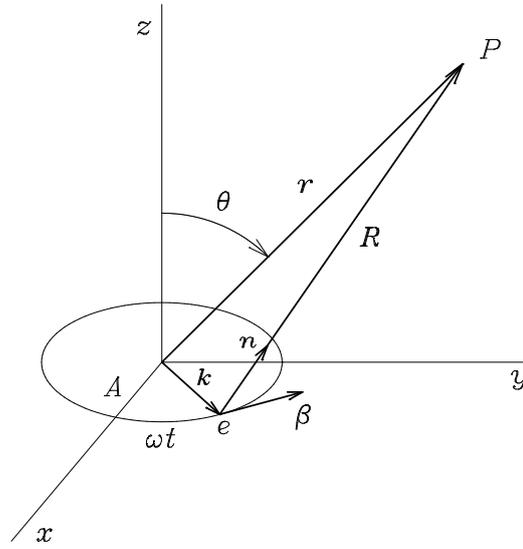


Figura 5.2: Campo eléctrico retardado(o avanzado), promedio temporal (5.3) y campo Coulombiano a lo largo del eje OZ .

Sin embargo, si estamos analizando procesos de alta energía y nuestra partícula de prueba se mueve suficientemente rápido con respecto al electrón, entonces el campo que detecta es el campo instantáneo que va como $1/R$. Es superior al campo promedio para $R > 1$, es menor que el Coulombiano para $R < 1$, haciéndose infinito en la posición de la carga. Esto da a entender, que desde el punto de vista integral, la contribución de la energía eléctrica debida al campo instantáneo, para $R > 1$, es superior a la energía electrostática Coulombiana y que la del campo promedio temporal. Esta diferencia la podríamos interpretar clásicamente, de forma ingenua, como el exceso de energía en el entorno del electrón debida a la nube de fotones virtuales que rodean a la partícula. En cualquier caso, el cálculo de la energía electromagnética del electrón requiere el conocimiento preciso de los campos instantáneos, una tarea que está todavía sin hacer.

Para calcular de forma numérica el campo promedio temporal en un punto arbitrario, consideremos las diferentes magnitudes que aparecen en la Figura 5.3.

Si en el instante $t = 0$ la carga se encuentra en el punto A del eje OX , entonces, en el instante t , los observables que se muestran en la figura están expresados en coordenadas cartesianas y

Figura 5.3: Movimiento de la carga y punto de observación P .

para el sistema de referencia del laboratorio, por

$$\mathbf{k} = R_0[\cos \omega t, \sin \omega t, 0] \equiv R_0 \tilde{\mathbf{k}}, \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{u}}{c} = [-\sin \omega t, \cos \omega t, 0],$$

$$\mathbf{r} = [x, y, z], \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{c^2}{R_0}[-\cos \omega t, -\sin \omega t, 0] = \frac{c^2}{R_0} \hat{\mathbf{a}},$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{k} = R_0(\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{k}}), \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad R = |\mathbf{R}| = R_0 \tilde{R}.$$

Con estas definiciones, el campo (5.2) se puede escribir como

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \left(\frac{e}{R_0^2} \right) \frac{\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \hat{\mathbf{a}})}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3 \tilde{R}}.$$

Vamos a comparar el valor promedio temporal de este campo con el campo Coulombiano instantáneo producido por una carga puntual en reposo e , en el origen del sistema de referencia

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \left(\frac{e}{R_0^2} \right) \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2},$$

donde $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unidad en la dirección radial. Vamos a quitar de ahora en adelante el factor constante e/R_0^2 entre corchetes, que aparece al comienzo de estas fórmulas. De esta manera, la unidad de longitud resulta ser el radio del zitterbewegung, R_0 .

Cuando la carga se encuentra en la posición de la Figura 5.3, el campo retardado que produce en el punto P se evalúa en el tiempo de observación $t_o = t + R/c$. Por lo tanto $dt_o = dt + d\tilde{R}/\omega$, ya que $R_0/c = 1/\omega$. Si expresamos $d\tilde{R}$ en términos de dt , obtenemos $dt_o = (N(t)/\tilde{R}(t))dt$, donde N y \tilde{R} están explícitamente dados por

$$\tilde{R}(t) = \sqrt{(\tilde{x} - \cos \omega t)^2 + (\tilde{y} - \sin \omega t)^2 + \tilde{z}^2},$$

$$N(t) = \tilde{R}(t) + \tilde{x} \sin \omega t - \tilde{y} \cos \omega t.$$

Vamos a calcular el campo promedio en P con respecto al tiempo de observación en ese punto y durante una vuelta completa de la carga de duración T . Si definimos el tiempo adimensional $\tau = \omega t$, entonces $\omega T = 2\pi$ y por lo tanto

$$\frac{1}{T} \int_0^T E(t_o) dt_o = \frac{1}{T} \int_0^T E(t) \frac{N(t)}{\tilde{R}(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E(\tau) \frac{N(\tau)}{\tilde{R}(\tau)} d\tau. \quad (5.4)$$

En términos del parámetro adimensional τ , las diferentes expresiones aparecen como

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{a}}) = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{a}}) - \hat{\mathbf{a}},$$

y

$$\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{a}}) = \frac{1 - \tilde{x} \cos \tau - \tilde{y} \sin \tau}{\tilde{R}^2} [\tilde{x} - \cos \tau, \tilde{y} - \sin \tau, \tilde{z}],$$

$$\hat{\mathbf{a}} = [-\cos \tau, -\sin \tau, 0],$$

mientras que

$$\mathbf{n} \times (\boldsymbol{\beta} \times \hat{\mathbf{a}}) = \frac{1}{\tilde{R}} [\tilde{y} - \sin \tau, -\tilde{x} + \cos \tau, 0],$$

y

$$1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} = \frac{1}{\tilde{R}} (\tilde{R} + \tilde{x} \sin \tau - \tilde{y} \cos \tau).$$

Nos interesan medir las componentes radial y transversales del campo, $E_r = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{r}}$, $E_\theta = \mathbf{E} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}}$, y $E_\phi = \mathbf{E} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}$, respectivamente. Los vectores $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ y $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ son los vectores unidad habituales en coordenadas esféricas. Si consideramos que el punto de observación P se encuentra en el plano XOZ , entonces $\tilde{x} = r \sin \theta$, $\tilde{y} = 0$ y $\tilde{z} = r \cos \theta$, donde r es la distancia radial al origen en unidades de R_0 .

Las expresiones finales para las distintas componentes del campo son

$$E_r(r, \theta, \tau) = \frac{(\tilde{R}^2 - r^2 - 1) \sin \theta \cos \tau + \tilde{R} \sin \theta \sin \tau + r(1 + \sin^2 \theta \cos^2 \tau)}{(\tilde{R} + r \sin \theta \sin \tau)^3},$$

$$E_\theta(r, \theta, \tau) = \frac{[(\tilde{R}^2 - 1) \cos \tau + \tilde{R} \sin \tau + r \sin \theta \cos^2 \tau] \cos \theta}{(\tilde{R} + r \sin \theta \sin \tau)^3},$$

$$E_\phi(r, \theta, \tau) = \frac{(\tilde{R}^2 - 1) \sin \tau + \tilde{R}(r \sin \theta - \cos \tau) + r \sin \theta \sin \tau \cos \tau}{(\tilde{R} + r \sin \theta \sin \tau)^3},$$

con

$$\tilde{R} = \sqrt{r^2 - 2r \sin \theta \cos \tau + 1}.$$

Para calcular el promedio temporal de estos campos tenemos que realizar la integración (5.4) de tal manera que estas expresiones de E_r , E_θ y E_ϕ , deben ser multiplicadas por $N(\tau)/\tilde{R}(\tau)$, siendo ahora

$$N(\tau) = \tilde{R} + r \sin \theta \sin \tau.$$

El campo eléctrico radial promedio para $\theta = 0$ está ya dibujado en la Figura 5.2, pero lo hemos recalculado numéricamente en la siguiente Figura 5.4. Vemos el comportamiento Coulombiano de la componente radial en las direcciones $\theta = 0, \pi/3, \pi/4, \pi/6$. Análogamente, en la Figura 5.5 se representa la componente transversal del campo eléctrico promedio retardado $\langle E_\theta(r, \theta) \rangle$ en las mismas direcciones, que vemos que tiende a cero muy rápidamente. Para

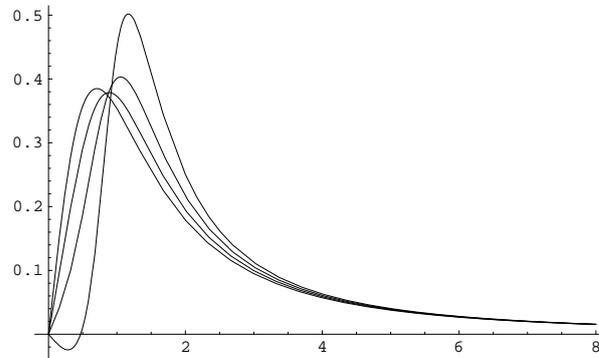


Figura 5.4: Promedio temporal de la componente radial $\langle E_r(r) \rangle$ del campo eléctrico retardado en las direcciones $\theta = 0, \pi/3, \pi/4$ y $\pi/6$.

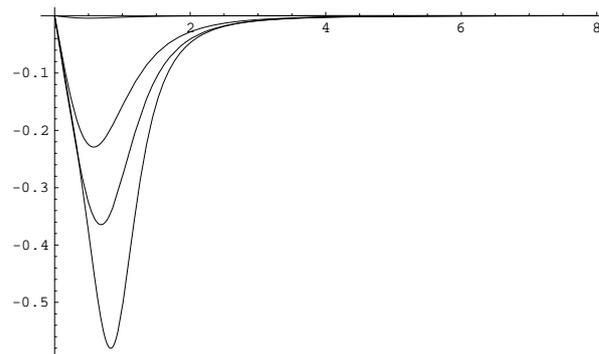


Figura 5.5: Promedio temporal de la componente $\langle E_\theta(r) \rangle$ del campo eléctrico retardado en las direcciones $\theta = 0, \pi/3, \pi/4$ and $\pi/6$. Tiende a cero muy rápidamente. Para $\theta = \pi/2$, se anula por doquier.

$\theta = \pi/2$, es claro que $\langle E_\theta(r, \pi/2) \rangle = 0$. El campo promedio $\langle E_\phi(r, \theta) \rangle$ se anula por doquier para todo $\theta \neq \pi/2$. Sobre el plano $\theta = \pi/2$ la rutina numérica no funciona.

El campo magnético promedio se calcula de la misma manera. Vamos a considerar solamente el campo retardado y lo vamos a comparar con el campo magnético producido por un momento dipolar magnético $\boldsymbol{\mu}$, situado en el origen del sistema de referencia. El campo de este dipolo es ²

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \frac{3\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\mu}) - \boldsymbol{\mu}}{c^2 r^3}.$$

Para esta corriente, el momento magnético producido por la carga es de valor $ecR_0/2$ en la dirección OZ , de tal manera que en unidades de R_0 se puede escribir como

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \left(\frac{e}{2cR_0^2} \right) \frac{3\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{z}}) - \hat{\mathbf{z}}}{\hat{r}^3}.$$

Las componentes no nulas de este campo son

$$B_{0r}(r, \theta) = \left(\frac{e}{cR_0^2} \right) \frac{\cos \theta}{\hat{r}^3}, \quad B_{0\theta}(r, \theta) = \left(\frac{e}{cR_0^2} \right) \frac{\sin \theta}{2\hat{r}^3}. \quad (5.5)$$

En este modelo, el campo magnético instantáneo es $\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}/c$. Sus diferentes componentes, una vez que el factor constante e/cR_0^2 , ha sido suprimido, se escriben como:

$$B_r(r, \theta, \tau) = \frac{(1 - r \sin \theta \cos \tau) \cos \theta}{(\tilde{R} + r \sin \theta \sin \tau)^3},$$

$$B_\theta(r, \theta, \tau) = \frac{r \cos \tau (1 + \sin^2 \theta) - (1 + r^2) \sin \theta - \tilde{R} r \sin \tau}{(\tilde{R} + r \sin \theta \sin \tau)^3},$$

$$B_\phi(r, \theta, \tau) = \frac{(\tilde{R} \cos \tau + \sin \tau) r \cos \theta}{(\tilde{R} + r \sin \theta \sin \tau)^3}.$$

Para el cálculo del promedio temporal del campo retardado, tenemos que multiplicar estas componentes por $N(t)/\tilde{R}(t)$, como en el caso anterior. La integración numérica se compara con la expresión de las componentes del campo de dipolo (5.5) en las diferentes direcciones.

El campo del dipolo (5.5) va a infinito cuando $r \rightarrow 0$. En las Figuras 5.6-5.8 comparamos las componente de $B_{0r}(r)$ con la componente del campo promedio temporal $\langle B_r(r, \theta) \rangle$, para $r > R_0$ y en las direcciones $\theta = \pi/6, \pi/4$ y $\pi/3$. Análogamente, en las Figuras 5.9-5.11, las componentes $B_{0\theta}(r, \theta)$ y $\langle B_\theta(r, \theta) \rangle$.

Los promedios temporales $\langle B_r(r) \rangle$ y $\langle B_\theta(r) \rangle$ no divergen en el origen sino que tienen el comportamiento que se describe en las figuras 5.12 y 5.13, respectivamente, cuando los representamos a lo largo de las direcciones $\theta = 0, \pi/3, \pi/4$ and $\pi/6$, y toman los valores $\cos \theta$ y $-\sin \theta$ respectivamente, en el punto $r = 0$.

El promedio temporal de la componente transversal $\langle B_\phi(r, \theta) \rangle$ se anula en todas las direcciones.

Para terminar esta sección vamos a hacer el mismo cálculo, pero para los campos avanzados en vez de los retardados.

En este caso, el tiempo de observación y el tiempo del laboratorio están relacionados por $t_o = t - R/c$, y por lo tanto $dt_o = (M(t)/\tilde{R}(t))dt$, donde $\tilde{R}(t)$ es el mismo de antes, pero

$$M(t) = \tilde{R}(t) - \tilde{x} \sin \omega t + \tilde{y} \cos \omega t.$$

² J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley and Sons, NY 3rd. ed. (1998).

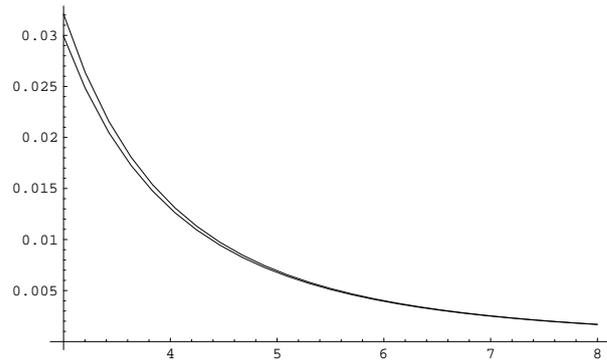


Figura 5.6: Componentes radiales del campo de dipolo $B_{0r}(r)$ y del campo magnético promedio temporal retardado $\langle B_r(r) \rangle$, en la dirección $\theta = \pi/6$.

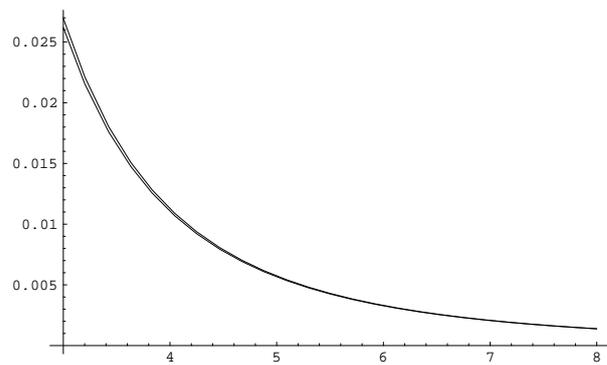


Figura 5.7: Componentes radiales del campo de dipolo $B_{0r}(r)$ y del campo magnético promedio temporal retardado $\langle B_r(r) \rangle$, en la dirección $\theta = \pi/4$.

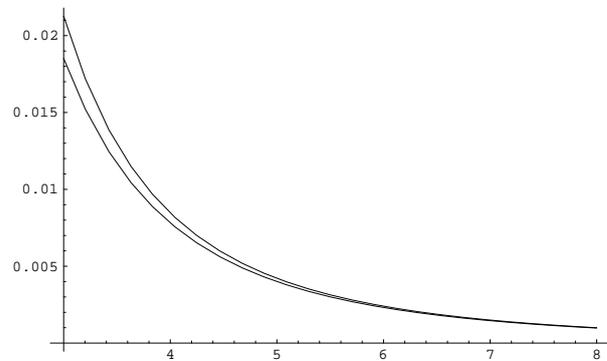


Figura 5.8: Componentes radiales del campo de dipolo $B_{0r}(r)$ y del campo magnético promedio temporal retardado $\langle B_r(r) \rangle$, en la dirección $\theta = \pi/3$.

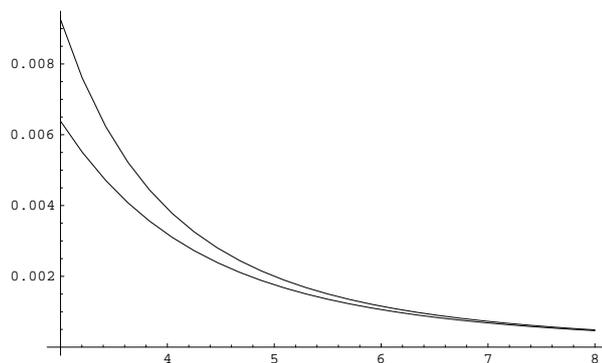


Figura 5.9: Componente promedio temporal retardada $\langle B_\theta(r) \rangle$ y componente $B_{0\theta}(r)$ del campo de dipolo, en la dirección $\theta = \pi/6$.

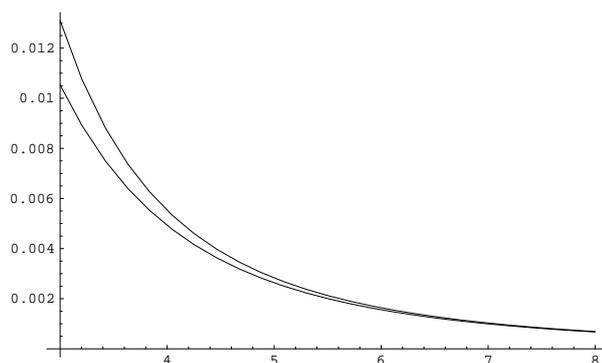


Figura 5.10: Componente promedio temporal retardada $\langle B_\theta(r) \rangle$ y componente $B_{0\theta}(r)$ del campo de dipolo, en la dirección $\theta = \pi/4$.

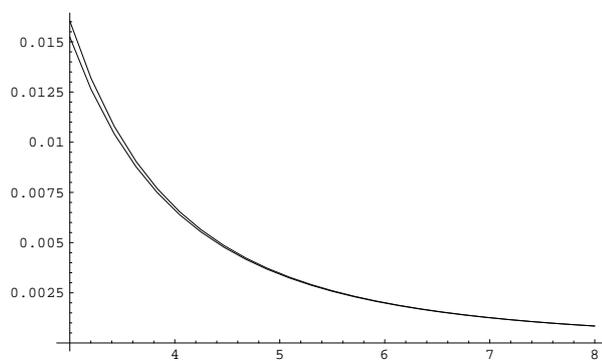


Figura 5.11: Componente promedio temporal retardada $\langle B_\theta(r) \rangle$ y componente $B_{0\theta}(r)$ del campo de dipolo, en la dirección $\theta = \pi/3$.

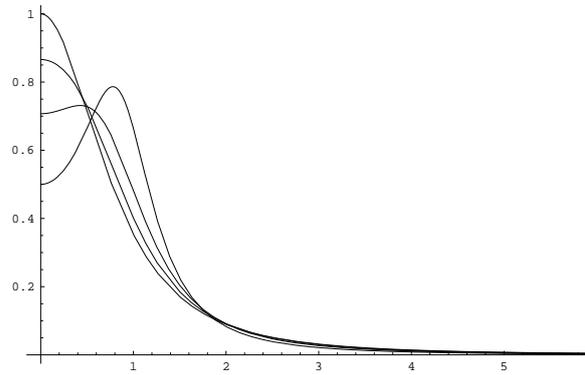


Figura 5.12: **Componente promedio temporal retardada $\langle B_r(r) \rangle$ en las direcciones $\theta = 0, \pi/3, \pi/4$ y $\pi/6$ y su comportamiento en $r = 0$. Para $\theta = \pi/2$ se anula por doquier.**

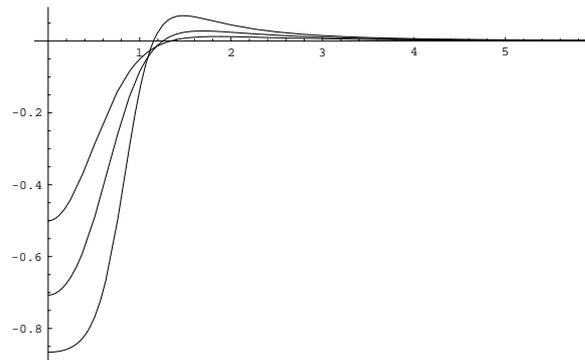


Figura 5.13: **Componente promedio temporal retardada $\langle B_\theta(r) \rangle$ en las direcciones $\theta = 0, \pi/3, \pi/4$ y $\pi/6$ y su comportamiento en $r = 0$.**

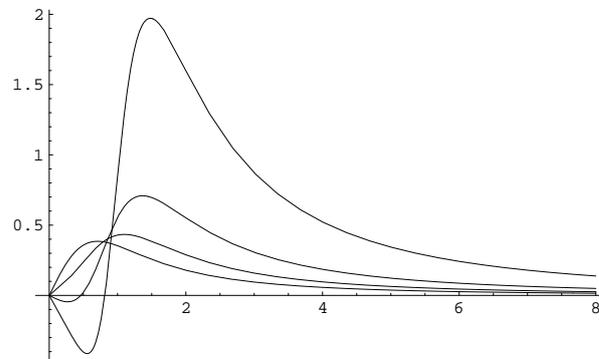


Figura 5.14: **Componente promedio temporal $\langle E_r(r) \rangle$ del campo eléctrico avanzado, en las direcciones $\theta = 0, \pi/3, \pi/4$ y $\pi/6$.**

Si representamos en la figura 5.14, el campo eléctrico radial avanzado, promedio temporal, en las mismas direcciones que el de la Figura 5.4, vemos un comportamiento diferente de estas componentes avanzadas, y aunque el campo decrece a largas distancias, no tiene un comportamiento Coulombiano.

La rutina numérica falla al realizar las integrales para $\theta = \pi/2$. Tenemos aquí algunas indefiniciones de los integrandos cuando los puntos de observación están sobre el plano XOY . No existen singularidades dentro del círculo de radio R_0 . Tenemos una divergencia de orden de $1/r$ para puntos sobre el círculo, que se puede remover tomando la integral en valor principal. Finalmente, el término del cociente $1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}$, puede hacerse cero para algunos puntos de observación del plano XOY , fuera del círculo de radio R_0 , cuando en el punto retardado correspondiente los vectores unidad \mathbf{n} y $\boldsymbol{\beta}$ sean vectores paralelos. Pero esto puede suceder solamente en un punto de la posición retardada de la carga, y tal vez se podría calcular una especie de valor principal para obtener un valor finito.

Estas dificultades para obtener una solución analítica y una integración numérica satisfactoria, hacen que este análisis sea incompleto. Sin embargo, el buen acuerdo del campo eléctrico promedio con el campo Coulombiano, y el campo magnético promedio con el campo de un dipolo magnético, para distancias $r > 5R_0$, excepto sobre el plano $\theta = \pi/2$ donde no ha sido posible realizar las integraciones, sugiere realizar un esfuerzo de cálculo para renormalizar el modelo a nivel clásico.

5.1.2. Energía y momento angular electromagnético

Si calculamos la energía electromagnética asociada al campo instantáneo (5.2), como $\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}/c$, resulta que la densidad de energía

$$\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \epsilon_0 E^2,$$

por lo que la energía en cualquier instante del tiempo de observación t_o vale

$$\mathcal{E}(t_o) = \int_{\mathbb{R}^3} \epsilon_0 E^2(t_o) dV.$$

El valor de $E^2(t_o)$ del campo, debe ser evaluado a partir de la localización de la carga en el correspondiente tiempo retardado t , con $t_o = t + R/c$, sabiendo que $\mathbf{a} = (c^2/R_0)\hat{\mathbf{a}}$, $a^2/c^4 = 1/R_0^2$, y que

$$E^2 = \frac{[\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{a})]^2}{R^2 c^4 (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^4} = \frac{e^2 a^2}{R^2 R_0^2 (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^4} = \frac{e^2}{R_0^4 \tilde{R}^2 (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^4}$$

habiendo definido la distancia adimensional $\tilde{R} = R/R_0$. Para reescribirlo en el Sistema Internacional de Unidades, deberemos reemplazar $e \rightarrow e/4\pi\epsilon_0$,

$$\mathcal{E}(t_o) = \int_{\mathbb{R}^3} \epsilon_0 E^2 dV = \frac{\epsilon_0 e^2 R_0^3}{(4\pi\epsilon_0)^2 R_0^4} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\tilde{V}}{\tilde{R}^2 (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^4} = \frac{\epsilon_0 e^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 R_0} M$$

donde en la integral, el elemento de volumen $dV = R_0^3 d\tilde{V}$ se hace en términos de variables adimensionales y por lo tanto es un número finito y adimensional M . Como el centro de masa del electrón está en reposo, $R_0 = \hbar/2mc$ y si suponemos que toda su energía es puramente electromagnética, podemos identificar esta energía con la energía en reposo,

$$mc^2 = \frac{e^2 2mc}{4\pi\epsilon_0 4\pi\hbar} M, \quad 1 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 hc} M = \alpha M, \quad \alpha \simeq \frac{1}{137}, \quad (5.6)$$

siendo α la constante de estructura fina, por lo que el valor de e^2 quedaría unívocamente determinado (salvo un signo) una vez realizada la anterior integral, que no está exenta de dificultades, y que si esto fuera correcto nos debería dar el valor $M \simeq 137$.

$$e^2 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar c}{M}.$$

Una partícula cuya estructura fuera puramente electromagnética, tendría un único valor de la carga eléctrica salvo un signo, lo que correspondería a que electrones, muones y partículas tau, y sus correspondientes antipartículas, que solamente interaccionan de forma electro-débil, poseerían la misma carga eléctrica, independientemente de su masa. En el caso de un quark, no toda la estructura es puramente electromagnética, ya que también interacciona de forma fuerte, por lo que en la ecuación (5.6) implicaría una energía electromagnética fracción k de su energía total en reposo mc^2 , con lo que

$$e^2 = k \frac{4\pi\epsilon_0\hbar c}{M}, \quad k < 1.$$

Los quarks tendrían una carga eléctrica menor que la de los objetos que solamente interaccionan de forma electrodébil. De hecho la teoría nos debería llevar a que $k = 1/9$ o bien $4/9$ para los quarks down y up, respectivamente.

El valor de la energía debe ser independiente del tiempo de observación t_o , ya que el movimiento de la carga es estacionario, por lo que también debe coincidir con su valor medio temporal,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E}(t_o) dt_o = \frac{\epsilon_0}{T} \int_{\mathbb{R}^3} dV \int_0^T E^2 dt_o,$$

para cualquier valor de T , en particular para el período de una vuelta completa.

Por otra parte, si t_o es el tiempo de observación, el correspondiente tiempo retardado t en el que hay que determinar la posición de la carga es $t_o = t + R/c$, $dt_o = dt + dR/c = dt + R_0 d\tilde{R}/c = dt + d\tilde{R}/\omega$. Como

$$\tilde{R} = \sqrt{(\tilde{x} - \cos \omega t)^2 + (\tilde{y} - \sin \omega t)^2 + \tilde{z}^2},$$

nos lleva a

$$\frac{1}{\omega} d\tilde{R} = \frac{1}{\tilde{R}} (\tilde{x} \sin \omega t - \tilde{y} \cos \omega t) dt, \quad dt_o = \frac{1}{\tilde{R}} (\tilde{R} + \tilde{x} \sin \omega t - \tilde{y} \cos \omega t) dt.$$

$$1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} = 1 - \frac{1}{\tilde{R}} \tilde{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta} = \frac{1}{\tilde{R}} (\tilde{R} + \tilde{x} \sin \omega t - \tilde{y} \cos \omega t).$$

Por eso en el cálculo de la energía media, con $\omega t = \theta$, $\omega T = 2\pi$,

$$\mathcal{E} = \frac{K}{T} \int_{\mathbb{R}^3} d\tilde{V} \int_0^T \frac{dt_o}{\tilde{R}^2 (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^4} = \frac{K}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d\tilde{V} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\tilde{R}^2 (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3}, \quad K = \frac{e^2 mc}{4\pi\epsilon_0 \hbar},$$

Si calculamos el momento angular electromagnético con respecto al origen, y lo proyectamos en la dirección OZ y lo identificamos con el momento angular mecánico $\hbar/2$, obtenemos otra ecuación

$$\frac{\hbar}{2} = \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{r} \times \mathbf{g})_z dV, \quad \mathbf{g} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\epsilon_0}{c} \mathbf{n} E^2,$$

ya que \mathbf{E} es perpendicular a \mathbf{n} . Como $\mathbf{r} \times \mathbf{g} \simeq \mathbf{r} \times \mathbf{n} \simeq -\mathbf{r} \times \mathbf{k}$, de la figura 5.3 vemos que la componente z de esta expresión es

$$\frac{\hbar}{2} = \frac{\epsilon_0}{c} \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{r} \times \mathbf{n})_z E^2 dV = \frac{\epsilon_0 e^2}{c} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\tilde{y} \cos \omega t - \tilde{x} \sin \omega t}{\tilde{R}^3 (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^4} d\tilde{V},$$

que nos da, en el sistema internacional de unidades

$$1 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 hc} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\tilde{y} \cos \omega t - \tilde{x} \sin \omega t}{\tilde{R}^3 (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^4} d\tilde{V} = \alpha N$$

siendo N el valor de la anterior integral que debe brindar el mismo valor que la integral M .

Las dos integrales adimensionales a evaluar, y que en principio deberían dar lo mismo son

$$N = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\tilde{R} (\tilde{y} \cos \omega t - \tilde{x} \sin \omega t)}{(\tilde{R} - (\tilde{y} \cos \omega t - \tilde{x} \sin \omega t))^4} d\tilde{V}$$

$$M = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\tilde{R}^2}{(\tilde{R} - (\tilde{y} \cos \omega t - \tilde{x} \sin \omega t))^4} d\tilde{V}$$

Si esto es así, $M - N$ debería ser nula,

$$M - N = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\tilde{R}}{(\tilde{R} - (\tilde{y} \cos \omega t - \tilde{x} \sin \omega t))^3} d\tilde{V}$$

Si tenemos presente el promedio temporal, e integramos primero en el tiempo local de la partícula, la integral que hay que realizar haciendo $\omega t = \theta$, es

$$M - N = \int_{\mathbb{R}^3} d\tilde{V} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(\sqrt{1 + r^2 - 2x \cos \theta - 2y \sin \theta + x \sin \theta - y \cos \theta})^2}$$

También, $1 = \alpha(M + N)/2$, por lo que

$$M + N = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\tilde{R}(\tilde{R} + \tilde{y} \cos \omega t - \tilde{x} \sin \omega t)}{(\tilde{R} - \tilde{y} \cos \omega t + \tilde{x} \sin \omega t)^4} d\tilde{V}$$

Capítulo 6

Algunas propiedades asociadas con el espín

6.1. Relación giromagnética

Si tenemos un punto cargado de masa m y carga e que se mueve en el espacio, su momento angular \mathbf{J} y su momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ respecto de un punto, satisfacen la relación

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2m} \mathbf{J}$$

En el caso del electrón, la relación entre su espín con respecto al centro de masa y su momento magnético, resulta ser

$$\boldsymbol{\mu} = g \frac{e}{2m} \mathbf{S}, \quad g = 2.$$

A la magnitud adimensional g es a lo que se denomina relación giromagnética, por ser un número que relaciona la capacidad de producir campo magnético con la propiedad mecánica ligada con la rotación.

Uno de los éxitos de la ecuación de Dirac fue el que predecía el valor $g = 2$ de la relación giromagnética del electrón ¹. Más tarde, Levy-Leblond ² obtuvo también la predicción $g = 2$ pero para un objeto no relativista de espín $s = 1/2$, con lo que zanjaba la cuestión de que $g = 2$ no era una propiedad exclusivamente relativista. Proca ³ predijo que para partículas con espín 1, tendría que ser $g = 1$, lo que condujo a Belinfante ⁴ a conjeturar que la relación giromagnética de las partículas elementales estaría ligada con el espín por la regla $g = 1/s$, cualesquiera que fuera s . Encontró modelos cuánticos de espín 3/2 en que esto se cumplía y unos años más tarde Moldauer y Case ⁵ desarrollaron un formalismo donde corroboraban esto para cualquier espín semientero. Tumanov ⁶ encontró esto mismo pero para el valor entero $s = 2$. En todas estas predicciones teóricas se supuso que la interacción electromagnética venía dada por el acoplamiento mínimo.

Sin embargo, Weinberg ⁷ al estudiar la interacción electrodébil hizo la predicción de que $g = 2$ para los bosones intermedios de espín 1 que median en la interacción débil. Lo obtuvo al analizar la interacción de los bosones W con el campo electromagnético, requiriendo que la

¹ P.A.M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. London* **A117**, 610 (1928).

² J.M. Levy-Leblond, *Comm. Math. Phys.* **6**, 286 (1967).

³ A. Proca, *Compt. Rend.* **202**, 1420 (1936); *Journ. Phys. Radium*, **49**, 245 (1988).

⁴ F.J. Belinfante, *Phys. Rev.* **92**, 997 (1953).

⁵ P.A. Moldauer and K.M. Case, *Phys. Rev.* **102**, 279 (1956)

⁶ V.S. Tumanov, *Sov. Phys. JETP*, **19**, 1182 (1964).

⁷ S. Weinberg, in *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory*, edited by S. Deser, M. Grisaru and H. Pendleton, MIT press, Cambridge, MA (1970), p. 283.

amplitud de dispersión del proceso tuviera un buen comportamiento a altas energías. Cuando se descubren experimentalmente en 1983 en el CERN, los bosones cargados W^\pm de espín 1 y se encuentra que para ellos $g = 2$, contrario a la conjetura de Belinfante y corroborando la predicción de Weinberg, se planteó la cuestión de hasta qué punto el valor de g sería siempre 2 para cualquier tipo de partícula elemental, independientemente del valor de su espín.

Jackiw⁸ ha dado otro argumento de tipo dinámico, confirmando que para campos vectoriales de espín 1, la relación giromagnética debe ser $g = 2$, aceptando una invariancia gauge de tipo no electromagnético. Da también, algunos argumentos *ad hoc* para campos de espín $s = 2$, que también son consistentes con la predicción $g = 2$.

Por encima de todo esto, las únicas partículas cuya relación giromagnética se haya medido con precisión, encontrándose que $g = 2$, además de las correcciones radiativas, son los leptones cargados (e^\pm , μ^\pm y τ^\pm) y los bosones W^\pm . Por otra parte, el modelo estándar no prevé la existencia de partículas elementales de espín superior a 1, con lo que conjeturas del tipo de la de Belinfante, carecen de sentido.

El objeto de esta sección es dar argumentos no de tipo dinámico, como en estos trabajos previos, sino argumentos de tipo cinemático, aprovechando la estructura del espín de los modelos que surgen del formalismo⁹. Estos argumentos están basados en la doble estructura del espín con una parte rotativa y otra, en sentido contrario, debida al movimiento orbital del centro de carga con respecto al centro de masa y que sería la que produciría o estaría relacionada con el momento magnético.

El operador momento angular de una partícula elemental más general, con respecto al origen del sistema de referencia, tanto relativista como no relativista, es

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \frac{\hbar}{i} \nabla + \mathbf{S} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{S}, \quad (6.1)$$

donde el operador espín es

$$\mathbf{S} = \mathbf{u} \times \frac{\hbar}{i} \nabla_u + \mathbf{W}, \quad (6.2)$$

siendo ∇_u el operador gradiente con respecto a las variables de velocidad, y \mathbf{W} es un operador diferencial lineal que deriva con respecto a las variables de orientación $\boldsymbol{\alpha}$, y que por lo tanto, conmuta con el otro. Por ejemplo, en la parametrización de la orientación dada por $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{n} \tan(\alpha/2)$, el operador \mathbf{W} se escribe como

$$\mathbf{W} = \frac{\hbar}{2i} [\nabla_\rho + \boldsymbol{\rho} \times \nabla_\rho + \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_\rho)]. \quad (6.3)$$

La parte primera del espín (6.2), que está relacionada con el movimiento orbital de la carga, solamente posee valores propios enteros, sus funciones propias son los armónicos esféricos, ya que su estructura diferencial es la de un momento angular orbital que en realidad deriva solo sobre las variables de orientación del vector velocidad \mathbf{u} . La parte de espín semientero proviene del operador (6.3). Este operador \mathbf{W} , que deriva con respecto a las variables de orientación del triedro ligado a la carga, lo que tiene en cuenta es la rotación de la partícula.

Hemos visto tanto en los ejemplos relativistas como en los no relativistas que si la contribución al espín es de naturaleza orbital, relacionada con la parte del zitterbewegung, \mathbf{Z} , entonces la relación entre el espín y el momento magnético viene dada por

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2} \mathbf{k} \times \frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\frac{e}{2m} \mathbf{Z}, \quad (6.4)$$

donde $\mathbf{k} = \mathbf{r} - \mathbf{q}$, es decir con una relación giromagnética normal $g = 1$. Si el electrón tiene una relación giromagnética $g = 2$, esto implica que debe existir otra parte del espín proveniente de la velocidad angular, pero que no produzca contribución al momento magnético.

⁸ R. Jackiw, *Phys. Rev. D* **57**, 2635 (1998).

⁹ M. Rivas, J.M. Aguirregabiria and A. Hernández, *Phys. Lett. A* **257**, 21 (1999).

De aquí resulta que, para el electrón, ambas partes \mathbf{W} y \mathbf{Z} contribuyen al espín total. La parte \mathbf{W} está relacionada con las variables angulares que describen la orientación del electrón y que no contribuye a la separación \mathbf{k} entre el centro de masa y el centro de carga. Si el momento magnético está relacionado con este movimiento por la fórmula (6.4), está relacionado con la parte \mathbf{Z} pero no con el espín total \mathbf{S} . Es precisamente cuando tratamos de expresarlo en términos del espín total cuando surge el concepto de relación giromagnética.

Supongamos ahora que las dos partes \mathbf{Z} y \mathbf{W} contribuyen al espín total \mathbf{S} con sus valores cuánticos no nulos, más bajos y que además deben ser únicos, ya que al no poseer estados excitados, una partícula elemental solamente posee unos valores fijos de sus propiedades. Para partículas de Dirac hemos encontrado que el espín total es $s = 1/2$ y que las dos partes tienen orientaciones opuestas, teniendo el espín \mathbf{S} la misma orientación que la parte \mathbf{Z} . La parte orbital no puede tener un momento angular nulo porque el movimiento del centro de carga no pasa por el centro de masa, y su valor no nulo más bajo es desde el punto de vista cuántico, $z = 1$ y para la parte rotativa $w = 1/2$ en sentido contrario. Al expresar el momento magnético en términos del espín total, como resulta que $\mathbf{Z} = 2\mathbf{S}$, es donde nos aparece que $g = 2$.

6.2. El reloj del electrón

De Broglie en su tesis ¹⁰ postula que: Toda porción de materia aislada posee un movimiento periódico de naturaleza sin precisar, cuya frecuencia viene dada por $\nu = mc^2/h$. Dirac sin embargo encuentra que la posible frecuencia asociada al movimiento del punto \mathbf{r} en el caso del electrón, es el doble que la que le asocia De Broglie. Esta frecuencia es la del movimiento a la velocidad de la luz del centro de carga alrededor del centro de masa en el análisis clásico y que describe un objeto de espín $1/2$ al ser cuantizado y que además satisface la ecuación de Dirac. Este modelo se describe en la figura de la portada para el observador del centro de masa. El centro de carga efectúa un movimiento circular a la velocidad de la luz, de radio $R = \hbar/2mc$ y frecuencia $\nu_0 = 2mc^2/h$, en este sistema de referencia.

6.2.1. Midiendo el reloj del electrón

Si efectivamente el electrón tuviera un movimiento interno periódico del estilo que hemos mencionado, al desplazarse con velocidad constante obtendríamos una trayectoria del centro de carga que poseería también una periodicidad espacial. Se podría hablar de su *longitud de onda* como el valor de su período espacial, o bien la longitud que su centro de masa recorre durante una vuelta de su centro de carga. Pero la periodicidad temporal depende de la velocidad de su centro de masa. En efecto, supongamos que vemos moverse al centro de masa con velocidad \mathbf{v} como se indica en la figura 6.1. Como el centro de carga se sigue moviendo a la velocidad de la luz, su velocidad transversal $u_{\perp} = \sqrt{c^2 - v^2}$, por lo que un electrón en movimiento tarda más tiempo en completar una vuelta, el reloj del electrón en movimiento va más despacio. Si llamamos $T_0 = 2\pi R/c$ al tiempo que tarda en dar una vuelta para el observador del centro de masa, entonces para el que lo ve moverse con la velocidad \mathbf{v} tarda $T = 2\pi R/u_{\perp} = \gamma(v)T_0$, siendo $\gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

Si lanzamos un haz de electrones con una velocidad de su centro de masa \mathbf{v} a través de un cristal, por ejemplo de Silicio, y la velocidad es la adecuada de tal manera que la periodicidad espacial del haz $\lambda = vT$ y la periodicidad espacial de la red, $d = 3,84\text{\AA}$ para el Si, sean comensurables, esto es, o bien $d = k\lambda$, o bien $\lambda = nd$, con k y n sendos enteros, entonces puede tener lugar una dispersión resonante con los átomos. Si en la interacción de cada electrón con

¹⁰L. de Broglie, Thèse de doctorat (1924). Sommaire: ... nous admettons dans le présent travail l'existence d'un phénomène périodique d'une nature encore à préciser qui serait lié à tout morceau isolé d'énergie et qui dépendrait de sa masse propre par l'équation de Planck-Einstein.

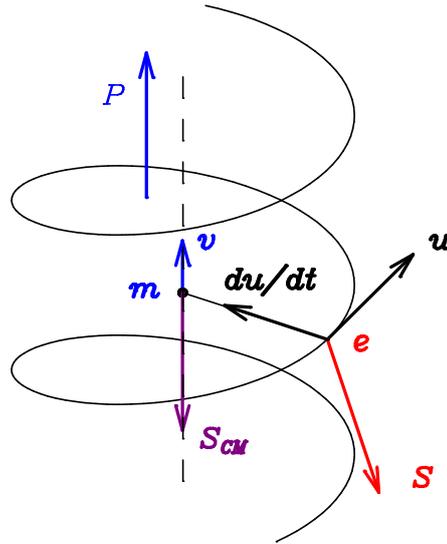


Figura 6.1: Movimiento del centro de masa con velocidad v y movimiento helicoidal a la velocidad de la luz del centro de carga de un electrón libre. Se representan los dos momentos angulares S y S_{CM} , que muestran que S_{CM} es conservado, mientras que S precesa alrededor del momento lineal. La velocidad transversal del centro de carga $u_{\perp} = \sqrt{c^2 - v^2}$, por lo que tarda más en dar una vuelta. El reloj del electrón móvil va más despacio.

un átomo de la red, recibe un impulso transversal Δp y un impulso longitudinal despreciable frente a p , cuando haya atravesado una longitud que contenga N átomos el impulso transversal total recibido será $N\Delta p$. Por lo tanto este electrón se desviará un ángulo del orden de $N\Delta p/p$. Si, como proponen y realizan Gouanère et al.¹¹, medimos la intensidad del haz que atraviesa el cristal en la propia dirección de incidencia, existirán unos momentos lineales para los que se detectará una disminución de esta intensidad, debido a la dispersión resonante transversal. En la figura 6.2 se representa el movimiento de dos electrones polarizados longitudinalmente y transversalmente con respecto al movimiento de su centro de masa. Se compara esta descripción con la red de átomos de silicio con los que va a interactuar.

Cuando $d = k\lambda$, el electrón interactúa con cada átomo que se encuentra en su camino, mientras que en el caso $\lambda = nd$, sufrirá una interacción resonante cada n átomos. Una mayor λ implica también un mayor momento lineal, y por lo tanto el ángulo de dispersión será menor. Como

$$d = k\lambda = kvT = k\gamma(v)vT_0 = \frac{k\gamma(v)v}{\nu_0} = \frac{km\gamma(v)v}{m\nu_0} = \frac{kp}{m\nu_0}$$

existirán unos momentos lineales resonantes

$$p_{Dk} = \frac{m\nu_0 d}{k} = \frac{161,748}{k} \text{MeV}/c, \quad k = 1, 2, \dots \text{ (frecuencia de Dirac)}$$

para los que se detectará una disminución en la intensidad del haz de salida en la dirección frontal. En el mencionado experimento de Gouanère et al., utilizaron un detector situado a 3 m del cristal de silicio con una ventana de 3×3 mm, por lo que los electrones desviados un ángulo superior a 0.001 rad no se detectaban. Pretendían medir la frecuencia de De Broglie que es la mitad que la de Dirac, para la que los momentos lineales resonantes satisfacen

$$p_{Bk} = \frac{m\nu_0 d}{k} = \frac{80,874}{k} \text{MeV}/c, \quad k = 1, 2, \dots \text{ (frecuencia de De Broglie)}$$

¹¹M Gouanère, M. Spighel, N. Cue, MJ. Gaillard, R. Genre, R. Kirsch, JC. Poizat, J. Remillieux, P. Catillon and L. Roussel *Found. Phys.* **38**, 659, (2008).

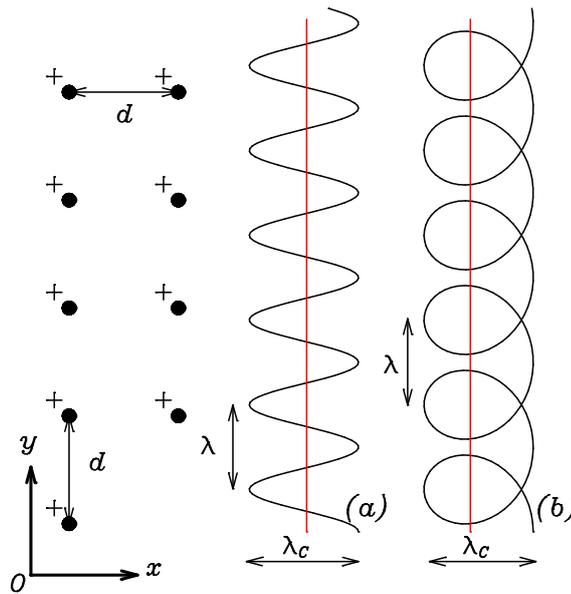


Figura 6.2: En la izquierda de la figura se representa la red de átomos de silicio, cuyos núcleos están separados una distancia $d = 3,84\text{\AA}$. A la derecha tenemos la proyección sobre el plano XOY de los movimientos del centro de carga de dos electrones polarizados, (a) longitudinalmente y (b) transversalmente, al movimiento de su centro de masa. En rojo aparece la correspondiente trayectoria de su centro de masa. Ambas descripciones no están a la misma escala que la red de átomos de Si. $\lambda_c = 2R \sim 10^{-13}\text{m}$ es la oscilación transversal del centro de carga, y $\lambda = vT$ es lo que recorre el centro de masa durante una vuelta de la carga.

por lo que establecieron en el experimento el rango de su momento lineal entre 54 y 110 MeV/c, para obtener, al menos, la primera frecuencia resonante. Lo que obtuvieron fue un pico resonante para el valor de $p = 81.1\text{ MeV}/c$ en vez del valor esperado de $p = 80.874\text{ MeV}/c$, (ver figura 6.5) que es el correspondiente a $k = 2$ para el caso de que la frecuencia del electrón fuera la de nuestro modelo.

Si el reloj del electrón tuviera la frecuencia de De Broglie $\nu_0 = mc^2/h$, entonces los picos resonantes que se obtendrían son los de la figura 6.3, mientras que en el supuesto de que la frecuencia fuera la de Dirac y del modelo que se presenta, que es el doble que la de De Broglie, se obtendrían los picos de la figura 6.4. Todos los picos inferiores asociados a la frecuencia de De Broglie aparecen en el caso de la frecuencia doble de Dirac, pero no a la inversa. La presencia de unos u otros permitirá discernir en un primer momento, entre estas dos posibles frecuencias. Una medida precisa de estos picos representa una medida precisa de la frecuencia interna del electrón ν_0 . Sería deseable, ampliar el rango del experimento de Gouanère et al. para permitir detectar los picos inferiores a 80.874 MeV/c. Se pondría de manifiesto la existencia de este movimiento periódico interno y nos permitiría determinar la frecuencia del reloj del electrón.

La medida precisa de esta frecuencia podría ser usada para definir una unidad natural de tiempo asociada a fenómenos físicos en los que intervienen los electrones. Juntamente con la constante universal c , nos permite tener también una unidad natural de longitud, por lo que todas las variables cinemáticas usadas en la descripción clásica del electrón se pueden tomar como adimensionales, en este sistema natural de unidades.

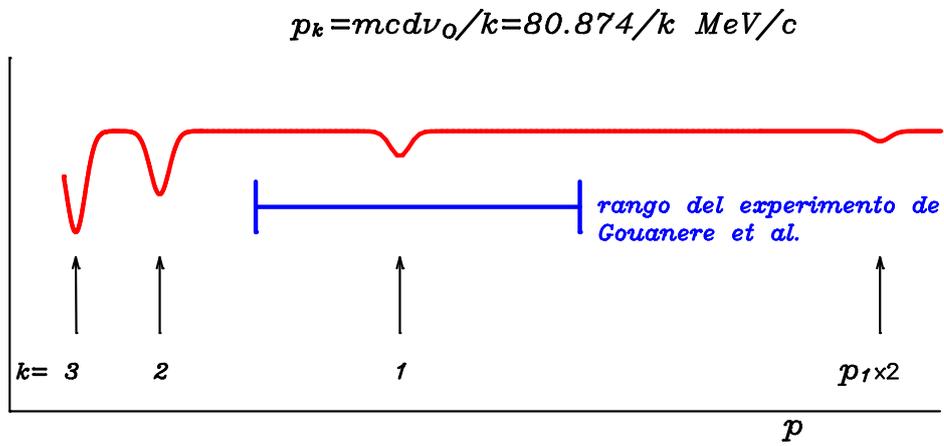


Figura 6.3: Diferentes picos de la dispersión resonante del haz de electrones en el supuesto de que la frecuencia interna del movimiento del centro de carga fuera la de De Broglie $\nu_0 = mc^2/h$.

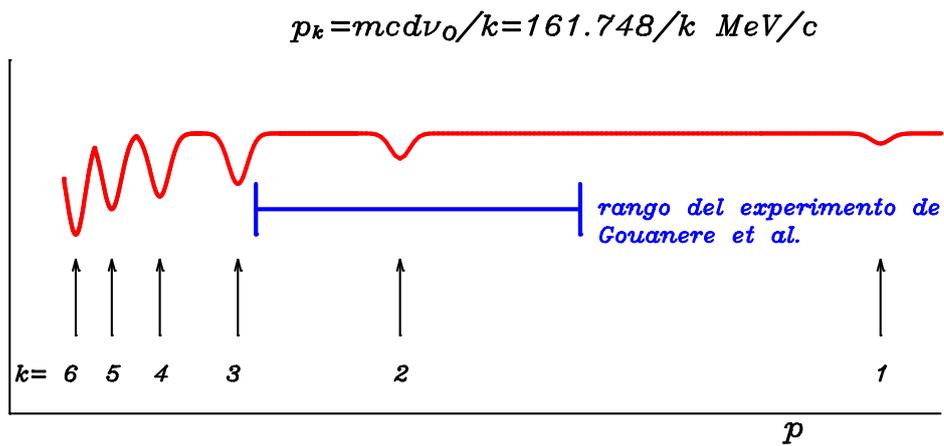


Figura 6.4: Diferentes picos de la dispersión resonante del haz de electrones en el supuesto de que la frecuencia interna fuera el doble que la de De Broglie $\nu_0 = 2mc^2/h$.

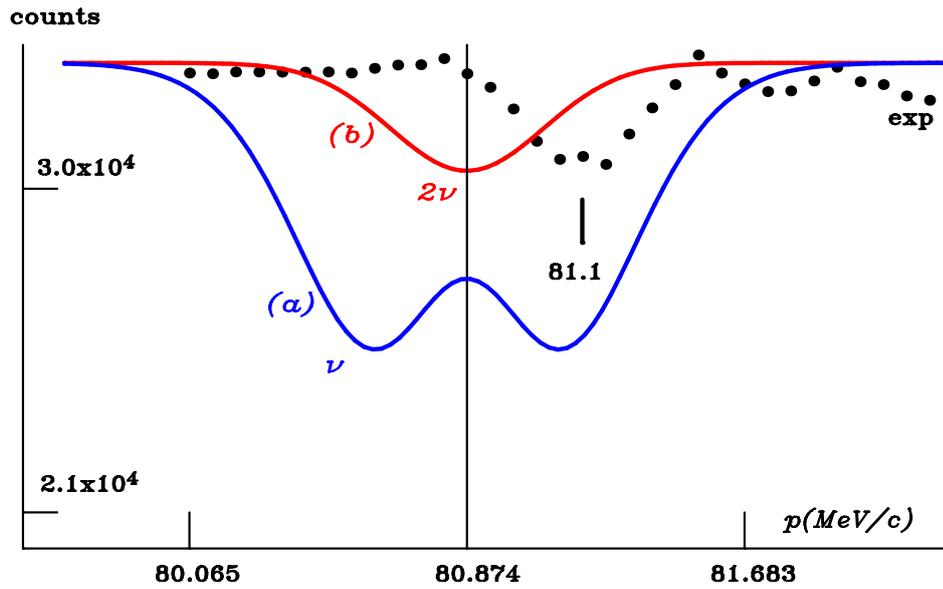


Figura 6.5: La línea de puntos es la medida del número de electrones detectados después de atravesar el cristal de Si, en el experimento realizado por Gouanère et al. (a) La línea azul representa el análisis numérico realizado por el método de Montecarlo, en el supuesto de que la frecuencia interna fuera la de De Broglie ν_0 . (b) La curva de color rojo por su parte, representa el análisis numérico realizado por el método de Montecarlo, en el supuesto de que la frecuencia interna fuera la de Dirac, el doble que la de De Broglie $2\nu_0$. El resultado experimental es más consistente con este análisis a frecuencia doble, solo que el pico aparece un poco desplazado hacia la derecha. Este desplazamiento de la energía de resonancia podría estar ligado con la temperatura de la muestra.

6.3. Dipolo eléctrico instantáneo

El movimiento interno de la carga para el observador del centro de masa es un círculo a la velocidad de la luz. La posición de la carga está relacionada con el espín por la ecuación

$$\mathbf{k} = \frac{1}{mc^2} \mathbf{S} \times \mathbf{u}, \quad (6.5)$$

donde \mathbf{S} es el espín constante en este referencial y $\mathbf{u} = d\mathbf{k}/dt$, con $u = c$ es la velocidad de la carga. Además de este movimiento del centro de carga, existe la rotación de un sistema de referencia local que produce una velocidad angular, pero esta rotación no tiene efecto en el momento dipolar de la partícula. (Ver la Fig. 6.6 donde no se han dibujado ni la velocidad angular ni el sistema de referencia local).

Desde el punto de vista del observador del centro de masa, la partícula se comporta como si tuviera un momento magnético producido por la corriente asociada a la carga y expresado por la expresión clásica habitual

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2} \int \mathbf{k} \times \mathbf{j} d^3\mathbf{r} = \frac{e}{2} \mathbf{k} \times \frac{d\mathbf{k}}{dt},$$

donde e es el valor de la carga y $\mathbf{j}(\mathbf{r} - \mathbf{k}) = e d\mathbf{k}/dt \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{k})$ es la densidad de corriente. El término orbital $\mathbf{k} \times d\mathbf{k}/dt$ está relacionado con la parte del espín asociada al zitterbewegung, la cual cuantiza con valores enteros, y que para las partículas de Dirac es dos veces el valor del espín total, como hemos visto en la sección anterior.

Pero para el observador del centro de masa, la partícula posee un momento dipolar eléctrico

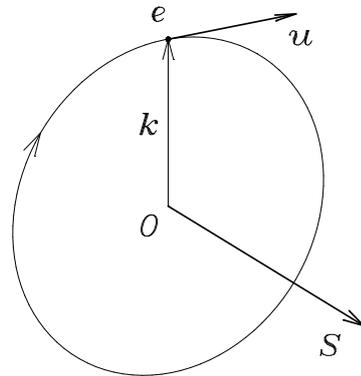


Figura 6.6: Movimiento de la carga del electrón en el sistema de referencia del C.M.

oscilante con respecto al centro de masa de valor $\mathbf{d} = e\mathbf{k}$. Está relacionado con el espín mediante

$$\mathbf{d} = \frac{e}{mc^2} \mathbf{S} \times \mathbf{u}. \quad (6.6)$$

En su artículo original, Dirac ¹² obtiene que el Hamiltoniano del electrón contiene, en presencia de un campo electromagnético externo, además de la parte libre dos términos

$$\frac{e\hbar}{2m} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B} + \frac{ie\hbar}{2mc} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}, \quad (6.7)$$

donde

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\alpha} = \gamma_0 \boldsymbol{\gamma},$$

se expresa en términos de las matrices $\boldsymbol{\sigma}$ de Pauli y $\boldsymbol{\alpha}$ es la matriz de Dirac que nos produce el operador velocidad.

Demostraremos que la versión cuántica de la expresión (6.6) es en efecto el dipolo eléctrico de Dirac (6.7).

La dificultad de relacionar la expresión clásica del momento dipolar con su versión cuántica consiste en interpretar adecuadamente cómo se expresa el producto vectorial de (6.6) en términos de las matrices de Dirac o en términos del producto matricial (o geométrico) de los elementos del álgebra de Dirac. Vamos a ver que como el álgebra de Dirac es un álgebra de Clifford dicho producto vectorial se va a interpretar en términos del producto interior y exterior de este álgebra.

El operador velocidad $\mathbf{u} = c\boldsymbol{\alpha}$ y el operador espín \mathbf{S} son bivectores del álgebra de Dirac considerados como elementos del álgebra geométrica del espacio-tiempo, en el sentido de Hestenes ¹³.

De hecho las matrices alpha de Dirac se escriben como productos de pares de matrices gamma $\alpha_i = \gamma_0 \gamma_i$ y lo mismo las componentes del espín $S_j = (i\hbar/2) \gamma_k \gamma_l$, j, k, l cíclico 1, 2, 3.

¹² P.A.M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. London*, **A117**, 610 (1928).

¹³ D. Hestenes, *Space-Time algebra*, Gordon and Breach, NY (1966); D. Hestenes and G. Sobczyk, *Clifford Algebra to Geometric Calculus*, D. Reidel Pub. Co. Dordrecht, (1984).

Este álgebra geométrica está generada por las cuatro matrices γ^μ de Dirac, $\mu = 0, 1, 2, 3$ que se interpretan como los cuatro vectores base del espacio-tiempo de Minkowski. Satisfacen la regla $\gamma_\mu \cdot \gamma_\nu = \eta_{\mu\nu}$, es decir, $\gamma_0^2 = 1$ y las $\gamma_i^2 = -1$, donde el punto representa el producto interior en el álgebra de Clifford. Vemos por lo tanto que tanto la velocidad como el espín pertenecen a la subálgebra par, o álgebra de Pauli del espacio tridimensional. Bajo inversiones espaciales $\gamma_0 \rightarrow \gamma_0$ y $\gamma_i \rightarrow -\gamma_i$, por lo que el operador velocidad cambia de signo, por lo que es un vector espacial, pero no así el espín, que es invariante y por lo tanto es y corresponde a un bivector espacial o pseudovector.

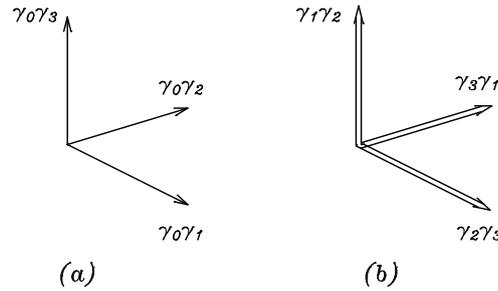


Figura 6.7: Base para los vectores (a) y bivectores (pseudovectores) (b) del álgebra de Pauli.

La relación entre el producto vectorial y el producto interior y exterior de dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} en el álgebra de Pauli es,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -i\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot (i\mathbf{a}), \quad (6.8)$$

donde \wedge representa el símbolo del producto exterior y la unidad imaginaria i representa al vector unidad pseudoescalar y $i\mathbf{a}$ es el bivector dual del vector \mathbf{a} .

El producto interior de un vector \mathbf{b} y un bivector A se expresa en términos del producto geométrico en la forma

$$\mathbf{b} \cdot A = \frac{1}{2}(\mathbf{b}A - A\mathbf{b}) \quad (6.9)$$

y tanto en el álgebra de Dirac como en la de Pauli, el producto geométrico $\mathbf{b}A$ viene dado por el producto matricial ordinario.

Si escogemos como bases de los vectores y pseudovectores las de la Fig. 6.7, donde los objetos con doble raya de la parte (b) representan los vectores duales de los correspondientes bivectores espaciales, y expresamos en estas bases los observables de la Fig. 6.6, entonces el vector espacial velocidad es $\mathbf{u} = c\gamma_0\gamma_2$ y el pseudovector espacial $\mathbf{S} = (\hbar/2)\gamma_2\gamma_3$ y por lo tanto, usando (6.8) y (6.9) obtenemos

$$\mathbf{S} \times \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot (i\mathbf{S}) = \frac{i\hbar}{2} \left(\frac{1}{2} (\gamma_0\gamma_2\gamma_2\gamma_3 - \gamma_2\gamma_3\gamma_0\gamma_2) \right) = \frac{-i\hbar}{2} \gamma_0\gamma_3.$$

El vector $\mathbf{k} = R\gamma_0\gamma_3$ donde $R = \hbar/2mc$, y haciendo la substitución en (6.6) obtenemos finalmente, el resultado deseado,

$$d_3 = -\frac{i\hbar}{2mc} \alpha_3.$$

6.4. Efecto Túnel clásico

Una consecuencia de la separación entre el centro de carga y el centro de masa de una partícula con espín, es que va a poder atravesar una barrera de potencial, a pesar de que su energía cinética sea inferior a la de la barrera.

Consideremos una partícula no relativista con espín de tipo (anti)orbital, como la descrita en la Sección 2.2, bajo una barrera de potencial. La Lagrangiana de este sistema es:

$$\tilde{L} = \frac{m \dot{\mathbf{r}}^2}{2} - \frac{m \dot{\mathbf{u}}^2}{2\omega^2} - eV(\mathbf{r})\dot{t}. \quad (6.10)$$

Como las barreras de potencial cuadradas, usadas habitualmente en mecánica cuántica son útiles para la resolución sencilla de algunos problemas, sin embargo, desde el punto de vista dinámico corresponden a dispositivos que producen una fuerza infinita en los bordes, lo cual no nos permite utilizarlas para estudios dinámicos clásicos. Debemos usar barreras de potencial que conduzcan a fuerzas finitas. Una barrera sencilla que da lugar a fuerzas finitas y constantes, puede ser del tipo de la de la figura Fig. 6.8, donde V_0 representa el valor máximo del potencial.

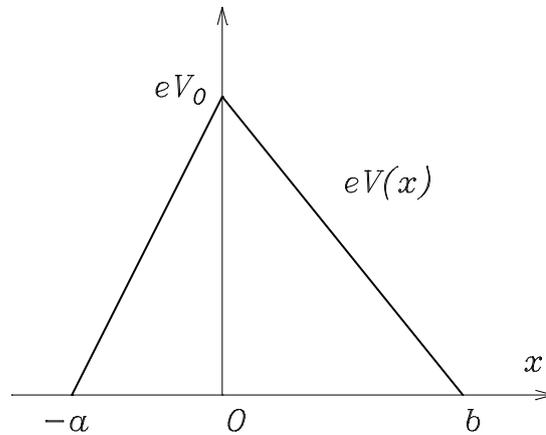


Figura 6.8: **Triangular potential barrier.**

La fuerza externa que produce sobre la partícula $F(x)$, es constante y dirigida hacia la izquierda en la región $x \in (-a, 0)$ y hacia la derecha en $x \in (0, b)$, siendo nula fuera de estas zonas.

Potenciales de este tipo se pueden construir como en el experimento que se indica en la figura 6.9, en el cual un haz de electrones, que ha sido acelerado con un potencial de aceleración V_a , se lanza sobre la región del campo, de potencial V_0 contenido entre las placas A , C y B .

En la Figura 6.9, desde un punto de vista clásico, un electrón puntual sin espín (el centro de carga y el centro de masa son el mismo punto) se detiene en la línea de puntos y la fuerza hacia la izquierda lo expulsa. Pero un electrón con espín de naturaleza (anti)orbital puede cruzar la barrera, si está polarizado perpendicularmente al campo y si su energía cinética es mayor que un cierto valor mínimo, que está por debajo del máximo del potencial. Este potencial mínimo depende de la separación entre placas.

Supongamos una partícula polarizada con el espín hacia arriba o hacia abajo, en la dirección OZ . El movimiento de la carga tiene lugar en el plano XOY . Sean $q_x, q_y, q_z = 0$, las coordenadas del centro de masa y x, y and $z = 0$, las del centro de carga.

Las ecuaciones dinámicas son

$$\frac{d^2 q_x}{dt^2} = \frac{1}{m} F(x), \quad \frac{d^2 q_y}{dt^2} = 0, \quad (6.11)$$

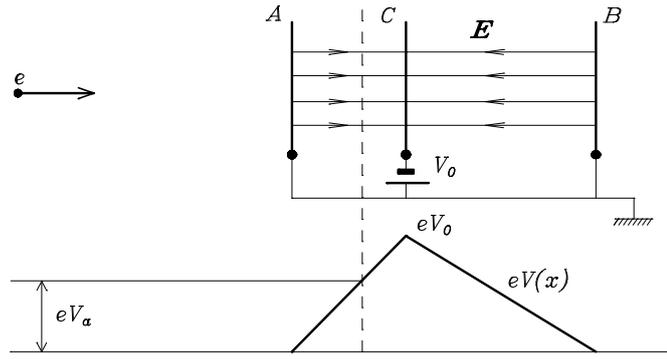


Figura 6.9: **Haz de electrones sobre una barrera de potencial. Un electrón puntual sin espín con $V_a < V_0$ no puede pasar de la línea de puntos. Un electrón con espín, polarizado transversalmente, y de la misma energía, puede cruzar la barrera.**

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(x - q_x) = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2(y - q_y) = 0, \quad (6.12)$$

donde

$$F(x) = \begin{cases} -eV_0/a, & \text{para } x \in (-a, 0), \\ eV_0/b, & \text{para } x \in (0, b), \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Las ecuaciones (6.11) son no lineales y no hemos encontrado de ellas una solución analítica. Vamos a hacer el cálculo de forma numérica. Vamos a definir diferentes variables adimensionales. Sea R el radio del movimiento interno. Entonces definimos

$$\hat{q}_x = q_x/R, \quad \hat{q}_y = q_y/R, \quad \hat{x} = x/R, \quad \hat{y} = y/R, \quad \hat{a} = a/R, \quad \hat{b} = b/R.$$

La nueva variable temporal $\alpha = \omega t$ es la fase del movimiento interno, siendo ω la pulsación de este movimiento. Las ecuaciones en las nuevas variables quedan:

$$\frac{d^2\hat{q}_x}{d\alpha^2} = A(\hat{x}), \quad \frac{d^2\hat{q}_y}{d\alpha^2} = 0,$$

$$\frac{d^2\hat{x}}{d\alpha^2} + \hat{x} - \hat{q}_x = 0, \quad \frac{d^2\hat{y}}{d\alpha^2} + \hat{y} - \hat{q}_y = 0,$$

donde $A(\hat{x})$ es

$$A(\hat{x}) = \begin{cases} -eV_0/\hat{a}m\omega^2R^2, & \text{para } \hat{x} \in (-\hat{a}, 0), \\ eV_0/\hat{b}m\omega^2R^2, & \text{para } \hat{x} \in (0, \hat{b}), \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Para el electrón relativista la velocidad de la carga es c , de tal manera que $\omega R = c$, y el parámetro $e/mc^2 = 1,9569 \times 10^{-6} \text{V}^{-1}$, tal que para potenciales del orden de 1 voltio podemos tomar el parámetro adimensional $eV_0/m\omega^2R^2 = 1,9569 \times 10^{-6}$.

Si tomamos como condiciones iniciales para el centro de masa

$$\hat{q}_y(0) = 0, \quad d\hat{q}_y(0)/d\alpha = 0,$$

entonces el centro de masa se mueve en línea recta a lo largo del eje OX . El sistema anterior se reduce al análisis de un sistema unidimensional, donde las únicas incógnitas son \hat{q}_x y \hat{x} .

Denominemos a estas variables por q y x , quitando todos los sombreros de las demás variables. Las ecuaciones a resolver quedan:

$$\frac{d^2q}{d\alpha^2} = A(x), \quad \frac{d^2x}{d\alpha^2} + x - q = 0, \quad (6.13)$$

donde $A(x)$ es

$$A(x) = \begin{cases} -1,9569 \times 10^{-6} a^{-1} V_0, & \text{para } x \in (-a, 0), \\ 1,9569 \times 10^{-6} b^{-1} V_0, & \text{para } x \in (0, b), \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases} \quad (6.14)$$

La integración numérica ha sido hecha con el programa *Dynamics Solver*¹⁴, y debido a que las ecuaciones son adimensionales, las energías quedan reescaladas tomando la máxima energía potencial de valor 1.

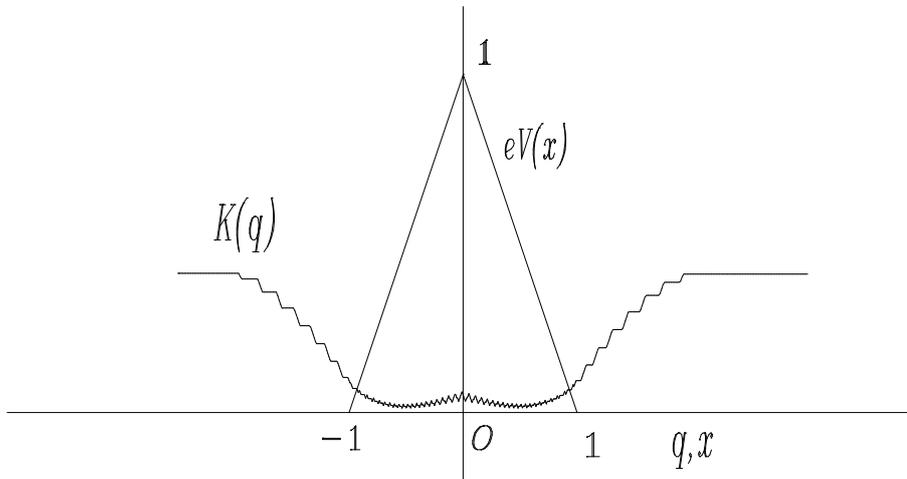


Figura 6.10: Energía cinética durante el cruce para $a = b = 1$.

Con $a = b = 1$, y suponiendo que la altura de la barrera es 1, tomando la energía cinética de la partícula K , por debajo de este valor, $K = m\dot{q}(0)^2/2eV_0 = 0,41$, es decir $K = 0,41eV_0$ para cualquier otro potencial, obtenemos para el movimiento del centro de masa la gráfica de la figura. 6.10, donde se indica la variación de la energía cinética $K(q)$, con la posición del centro de masa, durante el cruce de la barrera. Existe siempre cruce de la barrera con una energía cinética por encima de este valor. En la Figura 6.11, se dibuja la misma evolución pero con una barrera de anchuras $a = 1$ y $b = 10$ y $K = 0,9055$. Por debajo de una energía cinética de valores 0,4 y 0,9, en ambos ejemplos, las partículas nunca cruzan la barrera y son rechazadas hacia atrás.

Si en ambos ejemplos la anchura a se toma entre 1 y 0.05, haciendo que la pendiente, y por lo tanto la fuerza, sea mayor, no hay un cambio apreciable en la energía mínima de cruce. Por eso, con la anchura $a = 1$ fija, vamos a calcular las energías mínimas de cruce $K_c(b)$ para diversos valores de la anchura de la derecha b .

Para comparar estos resultados con el efecto túnel cuántico, vamos a cuantizar el sistema. La función de onda de este sistema es una función compleja de cuadrado integrable, de las variables cinemáticas, $\psi(t, \mathbf{r}, \mathbf{u})$. Los generadores del grupo de Galileo en esta representación son

$$H = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{P} = -i\hbar \nabla, \quad \mathbf{K} = m\mathbf{r} - t\mathbf{P} + i\hbar \nabla_u, \quad \mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{Z}, \quad (6.15)$$

¹⁴ J.M. Aguirregabiria, *Dynamics Solver*, disponible en la página web de su autor en el servidor del departamento de Física Teórica de la UPV/EHU, <<http://tp.lc.ehu.es/jma.html>>

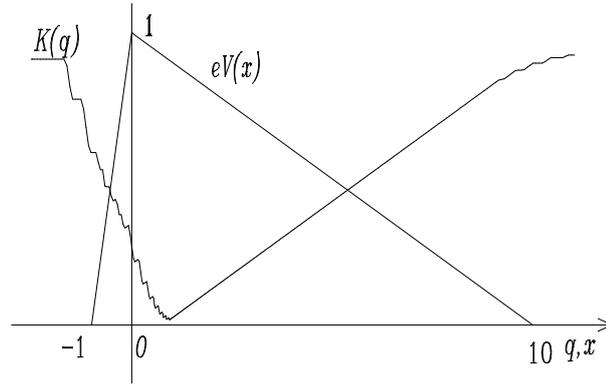


Figura 6.11: Energía cinética de la partícula durante el cruce con $a = 1$ y $b = 10$.

donde $\nabla_{\mathbf{u}}$ es el operador gradiente con respecto a las variables \mathbf{u} . Estos generadores satisfacen las reglas de conmutación del grupo de Galileo extendido¹⁵, y el operador espín está dado por $\mathbf{Z} = -i\hbar\mathbf{u} \times \nabla_{\mathbf{u}}$.

Uno de los operadores de Casimir del grupo de Galileo extendido es la energía interna \mathcal{E} , que en presencia de un campo electromagnético externo y con un acoplamiento mínimo se escribe como la diferencia entre la energía mecánica $H - eV$ menos la energía cinética

$$\mathcal{E} = H - eV - \frac{1}{2m}(\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2, \quad (6.16)$$

donde V y \mathbf{A} son los potenciales escalar y vectorial externos y donde $\mathbf{P} - e\mathbf{A}$ es el momento lineal mecánico.

En este caso no hay campo magnético, $\mathbf{A} = 0$, y V es únicamente función de x . Podemos buscar soluciones del siguiente conjunto completo de observables que conmutan: El operador de Casimir (6.16), H , P_y , P_z , Z^2 y Z_z . La partícula se mueve a lo largo del eje OX , con el espín en la dirección OZ , por lo que podemos buscar soluciones que sean funciones propias de los operadores anteriores, en la forma:

$$\left(H - eV(x) - \frac{1}{2m}\mathbf{P}^2 \right) \psi = \mathcal{E}\psi, \quad H\psi = E\psi, \quad P_y\psi = 0, \quad P_z\psi = 0, \quad (6.17)$$

$$Z^2\psi = s(s+1)\hbar^2\psi, \quad Z_z\psi = \pm s\hbar\psi. \quad (6.18)$$

Vemos que ψ es independiente de y y de z , y su dependencia temporal es de la forma $\exp(-iEt/\hbar)$. Como el operador espín deriva con respecto a las variables de velocidad, podemos buscar soluciones en variables separadas en la forma

$$\psi(t, x, \mathbf{u}) = e^{-iEt/\hbar}\phi(x)\chi(\mathbf{u}),$$

y por lo tanto

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + E - eV(x) - \mathcal{E} \right) \phi(x) = 0, \quad (6.19)$$

$$Z^2\chi(\mathbf{u}) = s(s+1)\hbar^2\chi(\mathbf{u}), \quad Z_z\chi(\mathbf{u}) = \pm s\hbar\chi(\mathbf{u}). \quad (6.20)$$

La parte espacial $\phi(x)$, está desacoplada de la parte del espín $\chi(\mathbf{u})$, y $E - eV(x) - \mathcal{E}$ representa la energía cinética de la partícula. La parte espacial satisface la ecuación de Schroedinger unidimensional, y la parte del espín es independiente de la interacción, por lo que la probabilidad

¹⁵ J.M. Levy-Leblond, *Galilei Group and Galilean Invariance*, in E.M. Loeb, *Group Theory and its applications*, Acad. Press, NY (1971), vol. 2, p. 221.

cuántica del efecto túnel está contenida en la parte espacial y no depende de la orientación particular del espín.

Si la partícula se encuentra inicialmente a la izquierda de la barrera, con una energía cinética inicial $E_0 = E - \mathcal{E}$, podemos entonces determinar la probabilidad de cruce para $a = 1$ y diferentes valores de la anchura del potencial b .

Este problema unidimensional con el potencial triangular de la figura Fig. 6.8 está resuelto en el libro de Landau: ¹⁶

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-ikx}, & x \leq -a, \\ C_1 \text{Ai}(D(1 - G + \frac{x}{a})) + C_2 \text{Bi}(D(1 - G + \frac{x}{a})), & -a \leq x \leq 0, \\ C_3 \text{Ai}(L(1 - G - \frac{x}{b})) + C_4 \text{Bi}(L(1 - G - \frac{x}{b})), & 0 \leq x \leq b, \\ Te^{ikx}, & x \geq b, \end{cases} \quad (6.21)$$

donde x es la misma variable adimensional que en el análisis clásico, y las constantes son

$$k = \sqrt{\frac{E}{2mc^2}}, \quad D = \sqrt[3]{\frac{eV_0 a^2}{2mc^2}}, \quad L = \sqrt[3]{\frac{eV_0 b^2}{2mc^2}}, \quad G = \frac{E}{eV_0}. \quad (6.22)$$

Las funciones $\text{Ai}(x)$ y $\text{Bi}(x)$ son las funciones de Airy de x . Las seis constantes de integración R , T , y $C_i, i = 1, 2, 3, 4$, se pueden obtener requiriendo la continuidad de las funciones y de sus primeras derivadas en los puntos de discontinuidad de la fuerza, esto es en $x = -a$, $x = 0$ y $x = b$. El coeficiente $|R|^2$ representa la probabilidad de que la partícula sea reflejada por la barrera y $|T|^2$ es la probabilidad de que se encuentre a la derecha de la barrera, esto es, que la cruce.

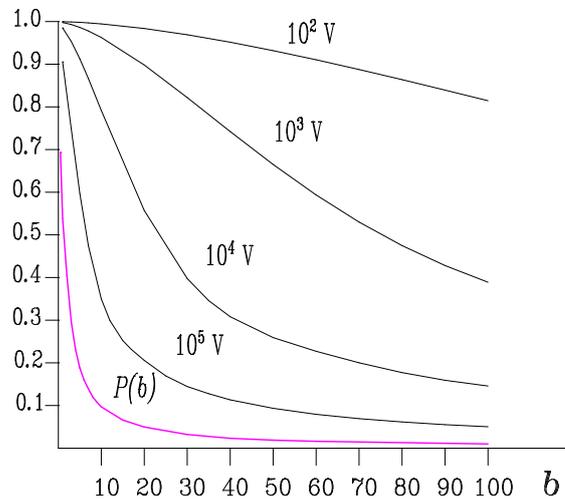


Figura 6.12: Probabilidad clásica $P(b)$ y cuántica de cruce de la barrera, para diferentes valores del potencial V_0 .

Si calculamos la amplitud T para $a = 1$ y diferentes valores de la anchura b , y para energías por debajo del umbral de la barrera eV_0 , vemos en la Fig. 6.12, la probabilidad media del efecto túnel cuántico para cuatro valores diferentes del potencial V_0 , de 10^2 , 10^3 , 10^4 y 10^5 Voltios. Esta probabilidad media se ha calculado suponiendo que a la izquierda de la barrera tenemos una distribución uniforme de partículas con energía inferior a eV_0 .

¹⁶ L. Landau and E. Lifchitz, *Mécanique quantique*, Mir Moscow (1988), 3rd. edition.

La correspondiente partícula clásica con espín, o pasa o no pasa. Para hacer una comparación probabilística, definimos la función $P(b) = 1 - K_c(b)$, donde $K_c(b)$ es la energía mínima de cruce calculada anteriormente, para cada valor de b . Este valor, si la distribución de partículas es uniforme en energía por debajo del umbral de la barrera, representa la probabilidad de que una partícula clásica escogida al azar, esté por encima de la energía de cruce y por lo tanto cruce la barrera.

Hemos representado también la función $P(b)$ en la Fig. 6.12. Vemos que la probabilidad clásica de cruce es siempre inferior a la probabilidad cuántica media, pero para potenciales altos se aproximan, por lo que la contribución al efecto túnel proveniente del espín, empieza a ser relevante. Podríamos justificar que la contribución cuántica es mayor que la clásica, ya que la energía media posee una incertidumbre ΔE ligada con el tiempo de cruce Δt , por la relación de Heisenberg $\Delta E \Delta t \geq \hbar$, con lo que la imprecisión ΔE en el conocimiento de la energía hace que esta pueda caer en la zona clásica de cruce aunque la energía media fuera inferior a K_c . Habría más casos cuánticos de cruce con energías inferiores a K_c , mientras que desde el punto de vista clásico no lo cruzarían.

Como el efecto túnel es una función de \hbar y el espín de las partículas elementales también es del orden de \hbar , es muy difícil separar en un experimento real qué parte del resultado que es de orden \hbar proviene de un efecto estrictamente cuántico o viene de la contribución del espín.

Si la partícula clásica estuviera polarizada longitudinalmente, es decir la orientación del espín fuera en la dirección del momento lineal o en sentido contrario, nunca cruzaría la barrera con energías inferiores al máximo eV_0 . Vemos que la orientación sí influye en el caso clásico pero no en el cuántico, ya que de (6.19) y (6.20) se ve que la probabilidad de cruce es independiente del espín.

De hecho sí existe una influencia que no ha sido considerada en el análisis cuántico. Por tener la partícula separados el centro de masa del centro de carga, posee un momento dipolar eléctrico $\mathbf{d} = e\mathbf{k}$, y por lo tanto una energía de interacción de este dipolo de valor $-\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}$. Si la partícula está polarizada longitudinalmente, \mathbf{d} y \mathbf{E} son ortogonales y esta contribución es nula. Si, como en el caso clásico analizado, la polarización es transversal al movimiento, el anterior producto escalar produce una energía de interacción de valor $-eER \cos \omega t$, donde E es el campo eléctrico uniforme de cada zona y R es el radio del movimiento interno o zitterbewegung. En la parte de la ecuación cuántica hay que reemplazar

$$H - eV_0 \quad \Rightarrow \quad H - eV_0 + eER \cos \omega t$$

y resolver la correspondiente función de onda. Este término es del orden de la separación R entre el centro de masa y el centro de carga, y por lo tanto de orden \hbar . Aunque este término puede ser pequeño, debido a que es oscilante y de valor temporal medio nulo, puede ser relevante en casos en los que los gradientes del campo sean grandes. Veremos en la sección siguiente una aplicación de este efecto túnel, en la que la polarización sí es importante.

6.4.1. Efecto túnel de polarización del espín

Vamos a ver que la estructura que hemos encontrado del electrón, nos permite hacer una interpretación de la denominada magnetoresistencia gigante de películas policristalinas¹⁷. Esto se conoce en la literatura como el **Efecto túnel de polarización del espín**¹⁸.

La cuestión de que si el efecto túnel es un efecto puramente cuántico o puede ser clásico, es un tema carente de sentido. Hemos visto que existe un efecto túnel clásico, pero para partículas

¹⁷Premio Nobel de Física 2007 a Albert Fert y Peter Grünberg por el descubrimiento en 1988 de la Magnetoresistencia Gigante.

¹⁸V.N. Dobrovolsky, D.I. Sheka and B.V. Chernyachuk, Surface Science **397**, 333 (1998); P. Raychaudhuri, T.K. Nath, A.K. Nigam and R. Pintor, cond-mat/9805258, preprint.

con espín, en las que sus centros de masa y de carga sean puntos diferentes. De todas formas, la materia elemental debe ser interpretada bajo las reglas de la mecánica cuántica, ya que es el cálculo cuántico el que produce un mejor acuerdo con las medidas experimentales.

La conducción eléctrica en materiales sinterizados es completamente diferente de la conducción en conductores ordinarios. Un material sinterizado no es un medio continuo. Está formado por pequeños granos que permanecen unidos al ser sometidos a compresión. La conducción eléctrica es pues, el salto de electrones de grano en grano, en un proceso túnel a través de un potencial efectivo en la región fronteriza entre los granos. Estos materiales presentan por lo tanto una alta resistividad, cuando se les compara con los conductores normales.

La forma del potencial en el intersticio es desconocida, pero podemos aproximarla mediante un potencial de tipo triangular como los de la sección anterior. Cuando un electrón se aleja de un grano, éste queda positivamente cargado y atrae al electrón. Cuando éste se ha alejado y queda más próximo al otro grano, induce un dipolo que lo atrae. En ambos casos no sabemos cómo son estas fuerzas, pero la aproximación anterior de suponerlas constantes justifica un potencial triangular en el intersticio. De todas formas, lo que hemos visto es que para cada barrera de potencial existe un mínimo de energía, por debajo del máximo del potencial, tal que electrones polarizados transversalmente por encima de esa energía la cruzan, incluso desde el punto de vista clásico. Este efecto no es predicho por la mecánica cuántica 'ordinaria', ya que la probabilidad de cruce por efecto túnel es independiente del espín.

Si tenemos un hilo de este material sometido a un potencial eléctrico, cuando introducimos un campo magnético externo transversal a la dirección de la corriente, los electrones de conducción se polarizan de forma transversal al campo eléctrico, y si el nivel de Fermi de estos electrones está por encima de la energía mínima de cruce, todos aquellos electrones por encima de esta energía la cruzarán, incluso clásicamente, como si fuera un verdadero conductor. La resistencia del material ha sido alterada por la presencia de un campo magnético externo transversal. Podemos diseñar dispositivos electrónicos en los que el control de las corrientes no se efectúa con campos eléctricos sino controlando la orientación del espín. Un dispositivo de este tipo se dice que pertenece a la nueva técnica de la **espintrónica**, pues se utiliza el control del espín para producir efectos electrónicos.

Se podría argumentar que la presencia del campo magnético externo que polariza a los electrones, pudiera modificar la probabilidad de cruce. Incluso con un campo externo del orden de 1 Tesla, y en una barrera potencial de 1 Voltio, el término de interacción magnética $-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ contribuye con una energía del orden de $\pm 5,7 \times 10^{-5} \text{eV}$, la cual no modifica la probabilidad cuántica de cruce.

6.5. Formación de pares de electrones ligados

Hemos visto en la sección 2.6.2, que las ecuaciones que describen la dinámica del electrón relativista con espín, son un sistema de ecuaciones diferenciales de cuarto orden para el centro de carga \mathbf{r} , que se puede descomponer en un sistema de ecuaciones de segundo orden acopladas, para el centro de masa \mathbf{q} y el centro de carga \mathbf{r} . Son de la forma de (2.186):

$$\ddot{\mathbf{q}} = 0, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \frac{1 - \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{(\mathbf{q} - \mathbf{r})^2} (\mathbf{q} - \mathbf{r}),$$

donde el punto representa la derivada temporal. La primera representa el movimiento libre del centro de masa, y la segunda, una especie de movimiento armónico relativista del punto \mathbf{r} alrededor del punto \mathbf{q} , manteniéndose constante para todo observador el valor absoluto de la velocidad $u = c$.

Es precisamente el factor $(1 - \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{r}})/(\mathbf{q} - \mathbf{r})^2$ el que previene de que si tomamos una solución con un valor de contorno tal que $\dot{\mathbf{r}}(0) = 1$, la solución no modifica el valor absoluto de la

velocidad de la carga. Si no imponemos esta condición inicial, el valor absoluto de la velocidad de cualquier otra solución no tiene por qué conservarse. En el caso de interacción entre dos partículas, tendríamos un sistema de ecuaciones del tipo anterior, donde \mathbf{r}_a y \mathbf{q}_a , $a = 1, 2$, serían las posiciones de cada una de ellas. Las segundas ecuaciones no se modifican, es decir el movimiento interno de cada partícula elemental no es alterado por ninguna interacción. La primera ecuación queda reemplazada por $d\mathbf{p}_a/dt = \mathbf{F}_a$ donde \mathbf{p}_a es el momento lineal de la partícula a que se expresa como es habitual, en términos de la velocidad de su centro de masa,

$$\mathbf{p}_a = \gamma(\dot{\mathbf{q}}_a)m\dot{\mathbf{q}}_a, \quad \gamma(\dot{\mathbf{q}}_a) = (1 - \dot{\mathbf{q}}_a^2)^{-1/2},$$

y la fuerza \mathbf{F}_a la podemos calcular por una Lagrangiana de interacción del tipo (4.70)

$$\mathbf{F}_a = \frac{\partial L_I}{\partial \mathbf{r}_a} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_I}{\partial \mathbf{u}_a} \right)$$

Para la partícula 1 toma la forma:

$$\mathbf{F}_1 = -g \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \sqrt{1 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2} + \frac{d}{dt} \left(\frac{g\mathbf{u}_2}{2|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|\sqrt{1 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}} \right) \quad (6.23)$$

Contiene términos de velocidad que van como $1/r^2$ y términos de aceleración que van como $1/r$ en términos de la distancia entre cargas $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. En esta notación, en la descripción sincrona, $\mathbf{u}_a = \dot{\mathbf{r}}_a$.

El sistema de ecuaciones a resolver es

$$\ddot{\mathbf{q}}_a = \frac{\alpha}{\gamma(\dot{\mathbf{q}}_a)} (\mathbf{F}_a - \dot{\mathbf{q}}_a(\mathbf{F}_a \cdot \dot{\mathbf{q}}_a)) \quad (6.24)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_a = \frac{1 - \dot{\mathbf{q}}_a \cdot \dot{\mathbf{r}}_a}{(\mathbf{q}_a - \mathbf{r}_a)^2} (\mathbf{q}_a - \mathbf{r}_a), \quad a = 1, 2 \quad (6.25)$$

donde α es la constante de estructura fina y todas las variables reescaladas son adimensionales. Para ello el factor de escala espacial es $R = \hbar/2mc$ y el temporal es $T = \hbar/2mc^2$. Todos los términos que dependen de la aceleración de las cargas de la ecuación (6.24), han sido reemplazados por las expresiones de (6.25).

Sería deseable, para hacer un análisis teórico, el encontrar soluciones analíticas de (6.24-6.25). Nos conformaremos con hacer un cálculo numérico. Vamos a usar el programa de integración numérica *Dynamics Solver*, el cual permite preparar ficheros para automatizar el proceso de cálculo, variando a voluntad las condiciones de contorno.

En la figura 6.13 se representa la dispersión de dos partículas de la misma carga, con sus espines paralelos. El movimiento de sus centros de masa se indica con una flecha. Si las partículas no se aproximan mucho, estas trayectorias se corresponden básicamente con las trayectorias de dos partículas sin espín, interaccionado a través de una fuerza Coulombiana. Cuando decimos que no se aproximan mucho queremos decir que su separación relativa es siempre mucho más grande que la longitud de onda Compton.

Esto se puede entender porque si las partículas están lejos una de otra, el comportamiento Coulombiano de la Lagrangiana lo justifica. Al calcular la interacción entre las correspondientes cargas, como la frecuencia del movimiento interno es muy alta, la posición media de cada carga es el correspondiente centro de masa. Sin embargo, en altas energías, las dos partículas se pueden aproximar por debajo de la longitud de onda Compton, y por lo tanto ese análisis promedio no funciona. Es necesario conocer las posiciones exactas de las cargas y sus velocidades para determinar las fuerzas sobre cada una de ellas.

Aquí, nuevos fenómenos físicos aparecen, cuando se compara con partículas sin espín. El fenómeno de la dispersión frontal, es decir que prácticamente ambas partículas siguen sus trayectorias iniciales sin desviarse, como la calculada en la figura 6.14, no se puede describir en

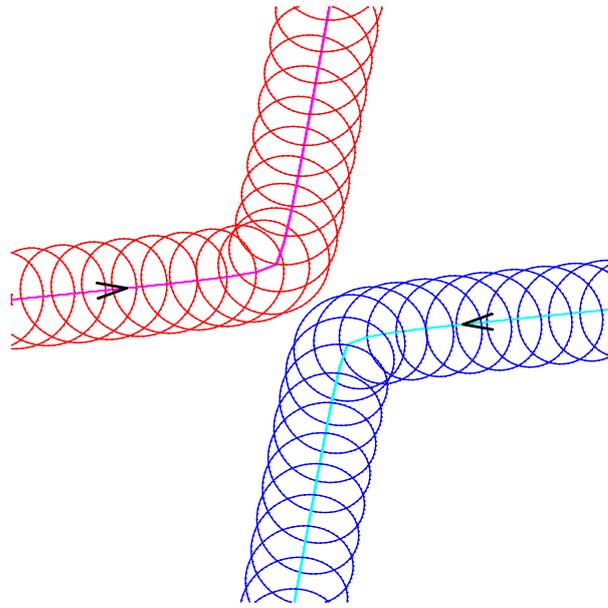


Figura 6.13: Trayectorias de los centros de masa y carga de dos partículas con espín con velocidad inicial de sus centros de masa $\dot{q}_a = 0,1$ y un parámetro de impacto pequeño.

el caso de partículas sin espín. La interacción Coulombiana hace que dos electrones en colisión frontal se desvíen siempre. Sin embargo, la experiencia demuestra que la dispersión frontal es el fenómeno más probable en la colisión de haces de partículas.

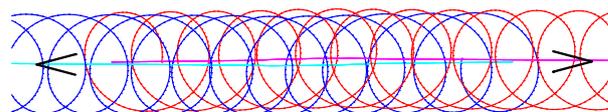


Figura 6.14: Dispersión frontal de dos partículas con espín, de la misma carga, y con una separación inicial $2q_a(0) = 10$, velocidad de sus centros de masa $|\dot{q}_a(0)| = 0,18$ y un parámetro de impacto pequeño. Los dos centros de masa pasan uno junto al otro, sin apenas desviarse.

Otro fenómeno que no aparece en partículas sin espín, es la formación de pares, es decir de estados ligados estables de partículas de la misma carga. En la figura 6.15, representamos la posición inicial de dos partículas de la misma carga con sus espines paralelos y tal que sus correspondientes centros de masa se encuentran a una distancia inferior a la longitud de onda Compton, esto es, inferior al diámetro de su movimiento interno. Hemos escrito los símbolos de

las cargas e_a en el correspondiente centro de carga \mathbf{r}_a y las correspondientes letras m_a en los respectivos centros de masa \mathbf{q}_a . En la parte (a) dibujamos la situación cuando ambas partículas poseen la misma fase inicial $\beta_1 = \beta_2$, de sus movimientos internos. Las fuerzas \mathbf{F}_a , sobre cada partícula $a = 1, 2$, se calculan en términos de las posiciones, velocidades y aceleraciones de las dos cargas, de acuerdo con (6.23), y dibujamos también esas mismas fuerzas en los correspondientes centros de masa, para poder plantear las ecuaciones (2.189). Vemos que una fuerza repulsiva entre las cargas produce también una fuerza repulsiva entre los correspondientes centros de masa. Sin embargo, si las fases iniciales de sus movimientos internos, fuesen opuestas, $\beta_1 = -\beta_2$, como en la parte (b) de la figura, una fuerza repulsiva entre cargas, calculada igual que en el caso anterior, produce una fuerza atractiva entre los centros de masa. Si la separación entre los centros de masa fuera superior a la longitud de onda Compton, la fuerza entre centros de masa sería siempre repulsiva, independientemente de las fases relativas de los movimientos internos.

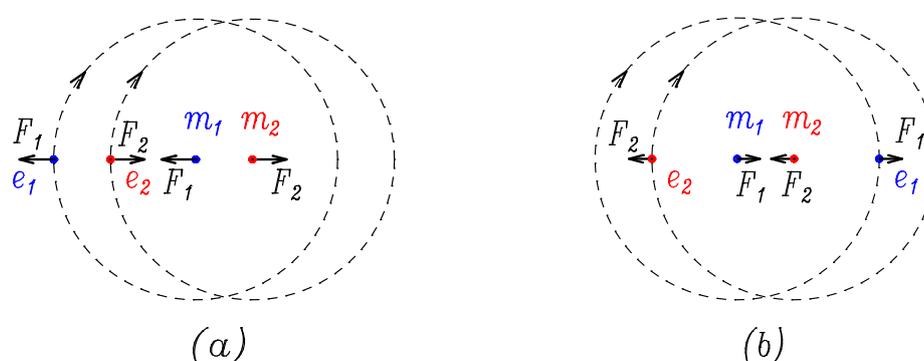


Figura 6.15: Posiciones iniciales de dos partículas de Dirac con sus espines paralelos y con una separación entre sus centros de masa inferior a la longitud de onda Compton. Las líneas de puntos representan las trayectorias previsibles de cada carga, si la partícula estuviera libre. Ambos movimientos tienen el mismo sentido como corresponde a partículas con sus espines paralelos. En (a) ambas partículas poseen la misma fase inicial y la fuerza repulsiva entre cargas, produce una fuerza repulsiva entre sus centros de masa, mientras que en (b), con fases opuestas, la fuerza entre sus centros de masa resulta ser atractiva.

En la figura 6.16 vemos otra situación de fases opuestas pero donde la separación entre los centros de masa es mayor aunque sigue siendo inferior a la longitud de onda Compton.

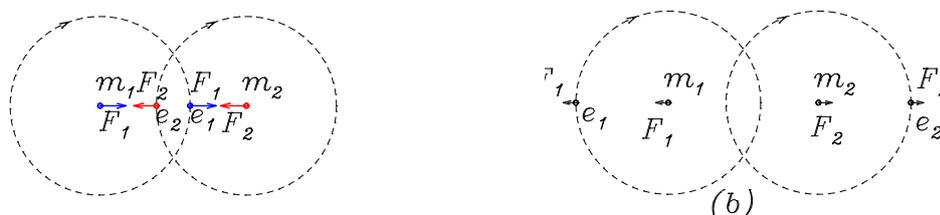


Figura 6.16: (a) Posición inicial de dos partículas con fases opuestas, que produce una fuerza atractiva entre sus centros de masa, que están separados menos que la longitud de onda Compton. En la parte (b), después de medio ciclo de las cargas, la fuerza entre los centros de masa resulta ser repulsiva, pero su intensidad es menor que en la situación anterior por estar las cargas más alejadas, por lo que el movimiento resultante es también un movimiento de pares ligados.

Para analizar esta situación en la que se van a producir movimientos ligados de pares de partículas de la misma carga, vamos a proceder de la siguiente forma: Comenzamos la integración numérica imponiendo la condición de que ambos centros de masa se encuentran en reposo y localizados en el origen del sistema de referencia, es decir $\mathbf{q}_a(0) = \dot{\mathbf{q}}_a(0) = 0$. Para la partícula 2 tomamos como fase inicial $\beta_2(0) = 0$ y para la partícula 1, empezamos con $\beta_1(0) = 0$, y la vamos incrementando de grado en grado en cada proceso de integración, hasta alcanzar el valor final de 2π radianes. Los valores de contorno de las variables $\mathbf{r}_a(0)$ y $\dot{\mathbf{r}}_a(0)$, con la ligadura $|\dot{\mathbf{r}}_a(0)| = 1$, se escogen de tal manera que sean compatibles con estas fases. El sistema total es analizado en su centro de masa, de tal manera que $\mathbf{q}_1(0) = -\mathbf{q}_2(0)$ y $\dot{\mathbf{q}}_1(0) = -\dot{\mathbf{q}}_2(0)$. El proceso de integración se automatiza de tal forma que cuando los centros de masa de las partículas se separan por encima de la longitud de onda Compton, la integración se interrumpe y comienza de nuevo con un nuevo valor de la fase $\beta_1(0)$ de un grado más, y los correspondientes valores nuevos de las variables $\mathbf{r}_a(0)$ y $\dot{\mathbf{r}}_a(0)$.

Si las partículas no se separan durante un tiempo de integración correspondiente a 10^6 vueltas de las cargas alrededor del correspondiente centro de masa, se vuelve a parar el proceso, se guardan los valores iniciales de las variables que dan lugar a este movimiento ligado y se comienza de nuevo con nuevos valores de contorno. Este tiempo ligado corresponde, en el caso de electrones, a un estado ligado de duración superior a 10^{-15} segundos. Para algunos valores particulares de las variables, con fases opuestas, hemos dejado el programa de integración funcionando durante una semana, y el estado ligado se mantiene. Esto representa una vida superior a 10^{-9} segundos. Si dejásemos el programa funcionando durante un año, esto incrementaría el tiempo de vida solamente en dos órdenes de magnitud. La sensación general es que los estados ligados son suficientemente estables, ya que ni siquiera los posibles errores numéricos en la integración destruyen la ligadura entre las partículas, ni la estabilidad del movimiento. El proceso se ha repetido de nuevo, cambiando ligeramente las condiciones iniciales de las variables del centro de masa $\mathbf{q}_a(0)$ y $\dot{\mathbf{q}}_a(0)$, en pasos de valor 0,0001 en estas variables adimensionales, y con $\beta_2(0) = 0$, y el mismo proceder con la fase $\beta_1(0)$, como el comentado anteriormente. Para verificar la fiabilidad del método, cada 10^3 pasos de integración, se mide el que las velocidades de las cargas sigan siendo de valor absoluto 1, dentro de un error numérico menor que 10^{-20} .

Se ha realizado el proceso tomando como fase inicial $\beta_2(0)$ cualquier otro valor arbitrario. Se trataba de poner de manifiesto si había diferencias en función de las diferencias de fases iniciales $\beta_2(0) - \beta_1(0)$, y de las posiciones y velocidades de los centros de masa $\mathbf{q}_a(0)$ y $\dot{\mathbf{q}}_a(0)$. Después de recolectar todos los datos que conducen a movimientos ligados, hemos encontrado los siguientes resultados:

1. La velocidad inicial de los centros de masa debe ser $|\dot{\mathbf{q}}_a(0)| < 0,01c$. En caso contrario, el movimiento entre las dos partículas no es estable y al cabo de unas pocas vueltas se separan.
2. Para cada velocidad $|\dot{\mathbf{q}}_a(0)| < 0,01c$ existe un rango Δ de la fase $\beta_1(0) = \beta_2(0) + \pi \pm \Delta$ para el cual el movimiento es estable. Cuanto mayor sea la velocidad de los centros de masa, más estrecho es este margen, de tal manera que los movimientos más estables se producen con las fases prácticamente opuestas.
3. Se han encontrado movimientos ligados para una separación inicial entre los centros de masa, hasta 0,8 veces la longitud de onda Compton, como la que se representa en la figura 6.16, siempre que las fases y velocidades se encuentren dentro de los rangos mencionados anteriormente.

En la figura 6.17, mostramos el cálculo del movimiento ligado de las dos partículas con una separación inicial de sus centros de masa de $q_{1x} = -q_{2x} = 0,2 \times (\text{long. de onda Compton})$, $\dot{q}_{1x} = -\dot{q}_{2x} = 0,008$ y $\dot{q}_{1y} = -\dot{q}_{2y} = 0,001$, $\beta_2 = 0$ y $\beta_1 = \pi$. La fuerza entre cargas es repulsiva

pero sin embargo, si las fases internas β_1 y β_2 son opuestas, produce una fuerza atractiva entre los centros de masa de acuerdo con el mecanismo mostrado en la figura 6.15 (b).

Esta posibilidad de formación de pares ligados, metaestables, de baja energía, de partículas de la misma carga, no es exclusivo de la Lagrangiana de interacción utilizada. Si usamos una interacción electromagnética o bien una interacción Coulombiana instantánea entre las cargas de dos partículas de Dirac, hemos encontrado también este comportamiento en ¹⁹. Este movimiento ligado no lo destruyen campos eléctricos externos ni tampoco campos magnéticos externos de la misma dirección que los espines. Sin embargo, un campo magnético transversal al espín, destruye el movimiento ligado.

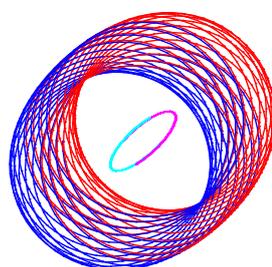


Figura 6.17: **Movimiento ligado de los centros de masa y centros de carga de dos partículas con espín, de espines paralelos y con una velocidad de sus centros de masa $v \simeq 0,0082$. La separación inicial entre sus centros de masa es de $0,2 \times$ (long. de onda Compton).**

Cuando calculamos el valor medio de la posición \mathbf{r}_a , resulta ser el valor del centro de masa \mathbf{q}_a , y de esta forma, la fuerza repulsiva entre cargas resulta también una fuerza repulsiva entre los correspondientes centros de masa, por lo que suprimir el contenido de la parte del espín asociada al zitterbewegung, elimina la posibilidad de formación de pares ligados.

A pesar de que este resultado nos muestra un mecanismo clásico que justifica la formación de un sistema ligado de espín 1, y por lo tanto un bosón a partir de dos fermiones cargados iguales, hemos de tener cuidado con el tipo de conclusiones que podemos sacar. En primer lugar es un análisis clásico, y aunque el rango de energías en las que el fenómeno es estable es bastante grande, esto no significa que dos electrones puedan quedar ligados hasta esa energía de ligadura. De ser así, vamos a estimar desde un punto de vista térmico, a qué temperatura máxima corresponde la posibilidad de formación de estados ligados. En efecto, si consideramos desde el punto de vista clásico que el electrón es un sistema de 7 grados de libertad, 3 representan la posición \mathbf{r} , otros 3 la orientación $\boldsymbol{\alpha}$ y finalmente una fase interna β . Si aceptamos el teorema de equipartición de la energía, entonces para ese máximo de energía cinética que produce el estado ligado $mv^2/2 = 7\kappa T/2$, siendo κ la constante de Boltzmann y $v = 0,01c$ la velocidad máxima de cada partícula, entonces un gas de electrones polarizados (como los electrones de conducción en un efecto Hall cuántico) pueden formar estados ligados hasta una temperatura por debajo de $T = 8,47 \times 10^5 \text{K}$, que es en efecto una temperatura muy alta.

¹⁹M. Rivas *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** 4703 (2003), (*Preprint physics/0112005*)

En segundo lugar, la materia a este nivel se comporta de acuerdo con los postulados de la mecánica cuántica y, por lo tanto, debemos resolver dentro del marco cuántico, el correspondiente estado ligado y establecer para qué energías es posible. En particular, el movimiento relativo entre electrones tiene que tener el momento angular orbital cuantizado. Este problema no ha sido resuelto todavía, pero la existencia de una posibilidad clásica de formación de pares y un rango de energía tan alto, justifica el que se realice un esfuerzo en esa dirección. Un electrón y un protón pueden formar estados ligados dentro de un margen continuo y muy amplio de energías. Es solamente la teoría cuántica la que da la respuesta correcta para qué energías los estados ligados son estacionarios.

Si las fases de las dos partículas fuesen las mismas (o casi las mismas) no hay posibilidad, ni siquiera clásica, de formación de estados ligados. Como los dos fermiones que forman el estado ligado poseen el mismo espín y la misma energía, ¿no será que el exigir que sus fases sean contrarias, es una forma clásica de superar el principio de exclusión de Pauli y justificar la existencia de estos estados ligados?

6.6. El grupo cinemático

Como la ecuación diferencial más general de un punto en el espacio tridimensional es de cuarto orden, su solución general involucra hasta 12 constantes de integración independientes. Si todas estas soluciones corresponden a las posibles descripciones que de la evolución del punto hacen los diferentes observadores inerciales, esto implica que el grupo cinemático de transformaciones espacio-temporales, asociado al principio de relatividad restringido, debe ser un grupo dependiente, como máximo, de 12 parámetros. Sin embargo, si lo que estamos describiendo es la evolución del punto en el que localizamos las propiedades interactivas de la partícula, hemos visto que necesariamente ese punto, que lo hemos denominado el centro de carga, se mueve con la velocidad de la luz, por lo que al establecer la ligadura de que $|\mathbf{r}^{(1)}| = c$, eso hace que solamente 11 parámetros sean esenciales, pues esta ecuación establece una relación entre los 12. Además, este grupo debe describir un espacio-tiempo en el que exista una velocidad inalcanzable para todo observador. El grupo de transformaciones espacio-temporales dependiente de 11 parámetros, que establece la relación entre observadores inerciales es el grupo de Weyl, que se compone de las 10 transformaciones del grupo de Poincaré (4 traslaciones+3 rotaciones+3 transformaciones de Lorentz puras o boosts), más las dilataciones espacio-temporales que conservan la velocidad, esto es las transformaciones dependientes de un parámetro λ , $t' = e^{\lambda}t$, $\mathbf{r}' = e^{\lambda}\mathbf{r}$.

Pero como veremos, una partícula elemental tiene 7 grados de libertad, esto es, es un punto \mathbf{r} , más un sistema cartesiano ligado a él $\boldsymbol{\alpha}$, más una variable adimensional λ , que representa una especie de fase o *gauge* interna, de tipo adimensional. Por lo tanto, el grupo de simetrías de la Lagrangiana libre de la partícula elemental es el grupo de Weyl como grupo cinemático cuya variedad nos va a suministrar los espacios homogéneos para definir sobre él las partículas elementales, juntamente con los grupos que conmutan con él, el de rotaciones locales $SO(3)$ del sistema cartesiano, y el de cambio de fase o de gauge $\{\mathbb{R}, +\}$. Esto, en el caso cuántico, se reduce a $\mathcal{W} \otimes SU(2) \otimes U(1)$.

Los operadores de Casimir de este grupo completo de simetrías son S^2 , el momento angular con respecto al centro de masa, que es el único operador de Casimir del grupo \mathcal{W} , T^2 que es el momento angular debido a la rotación del sistema cartesiano ligado al punto. De hecho, los operadores T_i , $i = 1, 2, 3$, son las componentes del momento angular de rotación, proyectadas en los ejes del sistema cartesiano local. Finalmente, el generador Q del grupo $U(1)$, cuyo significado físico está por determinar.

Referencias

Éstas son las principales referencias del autor y colaboradores acerca de este formalismo y que pueden obtenerse a través de la página web <http://tp.lc.ehu.es/martin.htm>. Referencias a otros trabajos aparecen en el texto principal como notas de pie de página.

Libro

M. Rivas,
Kinematical theory of spinning particles,
Classical and quantum mechanical formalism of elementary particles.
Fundamental Theories of Physics Series, vol 116, Kluwer, Dordrecht 2001.
ISBN 0-7923-6824-X

The spinning electron
Capítulo de contribución al libro:
What is the electron?,
editado por V. Simulik, Apeiron, Montreal 2005.
ISBN 0-9732911-2-5

Artículos

M. Rivas,

- *Classical Particle Systems: I. Galilei free particles*, J. Phys. A **18**, 1971 (1985).
- *Classical Relativistic Spinning Particles*, J. Math. Phys. **30**, 318 (1989).
- *Quantization of generalized spinning particles. New derivation of Dirac's equation*, J. Math. Phys. **35**, 3380 (1994).
- *Is there a classical spin contribution to the tunnel effect?*, Phys. Lett. A **248**, 279 (1998).
- *Are the electron spin and magnetic moment parallel or antiparallel vectors?*, ArXiv:physics/0112057.
- *The dynamical equation of the spinning electron*, J. Phys. A, **36**, 4703, (2003), ArXiv:physics/0112005.
- *The spacetime symmetry group of a spin 1/2 elementary particle*, J. Phys. A, **39**, 4291, (2006). ArXiv:hep-th/0511244.
- *A vueltas con el espin*, Rev. Esp. de Física **20**, no.3 (2006) 14.

- *An interaction Lagrangian for two spin 1/2 elementary Dirac particles*
J. Phys. A, **40**, 2541, (2007). ArXiv:hep-th/0702172.
- *The atomic hypothesis: Physical consequences*
J. Phys. A, **41** 304022 (2008).
- *On the kinematics of the centre of charge of a spinning particle*
ArXiv:0807.2512
- *Measuring the internal clock of the electron*
ArXiv:0809.3635.
- *A lacking term in the proton spin* Contribution to the SPIN-2010 Conference, Julich (Germany) Sept 27-Oct 3, 2010. J. Phys:Conference Series **295** (2011) 012040.
- *Is General Relativity a simplified theory?* J. Phys:Conference Series **437** (2013) 012008.
ArXiv:1203.4076
- *The center of mass and center of charge of the electron* J. Phys:Conference Series **615** (2015) 012017
Una versión previa puede verse en ArXiv:1211.3253

M. Rivas, J.M. Aguirregabiria and A. Hernández,

- *A pure kinematical explanation of the gyromagnetic ratio $g = 2$ of leptons and charged bosons*, Phys. Lett. **A 257**, 21 (1999).

J.M. Aguirregabiria, M. Rivas and M.A. Valle,

- *Composition law and contractions of the Poincaré group*, Eur. J. Phys.**7**, (1986) 1.

Conferencias

Conferencia impartida en el Instituto de Astrofísica de Canarias (Noviembre 2014):

<http://iactalks.iac.es/talks/view/703>

Conferencia impartida en el Virtual Institute of Astroparticle Physics (Enero 2015):

http://viavca.in2p3.fr/martin_rivas.html

Web didáctica

<http://www.spinningparticles.com>

y un Gedanken experiment que sugiere cómo describir a un electrón

<http://tp.lc.ehu.es/documents/electron.pps>