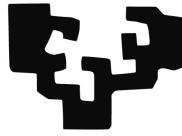


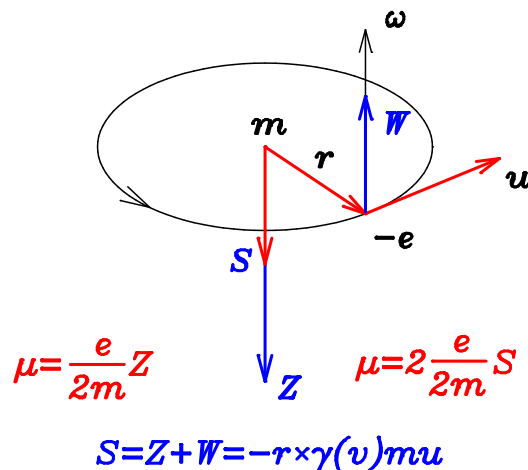
eman ta zabal zazu



Universidad  
del País Vasco

Euskal Herriko  
Unibertsitatea

# Teoría cinemática de partículas elementales con espín



Martín Rivas

e-mail: [martin.rivas@ehu.eus](mailto:martin.rivas@ehu.eus)  
<http://tp.lc.ehu.es/martin.htm>

Departamento de Física Teórica  
e Historia de la Ciencia

UPV/EHU Bilbao, Septiembre 2019

Estas notas son una versión actualizada del libro:  
Kinematical Theory of Spinning Particles. Classical and Quantum Mechanical  
Formalism of Elementary Particles.  
Fundamental Theories of Physics Series, vol 116 Kluwer, Dordrecht 2001.

- If I can't picture it, I can't understand it.  
You know, it would be sufficient to really understand the electron.

A. Einstein <sup>1</sup>

- Everything should be as simple as possible, but not simpler.

A. Einstein?, William of Ockham? <sup>2</sup>

- If a spinning particle is not quite a point particle, nor a solid three dimensional top, what can it be? What is the structure which can appear under probing with electromagnetic fields as a point charge, yet as far as spin and wave properties are concerned exhibits a size of the order of the Compton wavelength?

A.O. Barut <sup>3</sup>

- La figura de la portada representa el movimiento, a la velocidad de la luz, del centro de carga del electrón para el observador del centro de masa. Este movimiento relativo no es modificado por ninguna interacción. El centro de masa es siempre un punto distinto del centro de carga. El radio de este movimiento es  $R = \hbar/2mc \approx 2 \times 10^{-13}$  m, la mitad de la longitud de onda Compton, lo que sugiere el tamaño aparente que menciona Barut. La frecuencia de este movimiento, cuando el centro de masa está en reposo, es  $\nu = 2mc^2/h \approx 2,5 \times 10^{20}$  s<sup>-1</sup>. El período es de  $T \approx 4 \times 10^{-21}$ s. Esta frecuencia, doble que la que postula De Broglie, disminuye cuando el centro de masa se desplaza. El reloj local va más despacio cuando está en movimiento. La materia elemental posee una estructura periódica, como las ondas, desde el punto de vista temporal. El espín total  $\mathbf{S}$  tiene dos partes: Una  $\mathbf{Z}$  debida a este movimiento relativo y otra  $\mathbf{W}$  en sentido contrario y debida a la rotación con velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$ , de un sistema cartesiano local ligado al centro de carga, y que no ha sido dibujado en la figura. Como el momento magnético del electrón es producido por el movimiento de la carga, entonces está relacionado con la parte  $\mathbf{Z}$  del espín, por lo que es esta doble estructura del espín la que produce el concepto de relación giromagnética  $g = 2$ .
- La física de partículas, al usar de forma exhaustiva el modelo de partícula puntual para describir experimentos hechos con partículas con espín, está simplificando en exceso el modelo, contrario al espíritu de la segunda de las citas anteriores. Hay que utilizar modelos de partículas con espín para analizar experimentos reales, porque en la naturaleza no existen partículas elementales sin espín.  
En este orden de cosas, la Relatividad General como teoría de la gravitación, también hace una simplificación excesiva al asumir que el espacio-tiempo tiene una métrica Riemanniana, cuando debería mantener que la métrica es necesariamente Finsleriana, como analizaremos en la sección 1.6.

<sup>1</sup>H. Dehmelt, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **86**, 8618–19 (1989).

<sup>2</sup>Ver la discusión en <http://quoteinvestigator.com/2011/05/13/einstein-simple/#more-2363>, sobre la autoría de esta frase.

<sup>3</sup>A.O. Barut, *Brief History and recent developments in electron theory and Quantum electrodynamics*, in The electron, New Theory and Experiment, D. Hestenes and A. Weingartshofer (ed.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1991).

©Martín Rivas, 2019

DOI:10.13140/RG.2.1.1900.3284

# Índice general

<b>Prefacio</b>	<b>1</b>
<b>Preámbulo</b>	<b>5</b>
El centro de carga . . . . .	5
El centro de carga de una partícula elemental . . . . .	6
Argumentos de sólido rígido . . . . .	7
Argumentos de invariancia . . . . .	9
Argumentos geométricos . . . . .	9
Movimiento libre . . . . .	10
Dos centros, dos espines . . . . .	12
Tres constantes universales en una sola . . . . .	14
Teoría de partículas elementales . . . . .	14
Predicciones del formalismo . . . . .	15
Apéndice: Partículas elementales (Modelo Estándar) . . . . .	21
<b>1. Formalismo Lagrangiano</b>	<b>23</b>
1.1. Formulación de Newton . . . . .	23
1.2. Principios Fundamentales . . . . .	24
1.2.1. Principio de Relatividad Restringido . . . . .	25
1.2.2. Principio Variacional . . . . .	27
1.2.3. Principio Atómico . . . . .	27
1.2.4. Principio de Cuantización . . . . .	28
1.3. Principio variacional: Formalismo Lagrangiano . . . . .	29
1.3.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange . . . . .	30
1.3.2. Espacio Cinemático . . . . .	32
1.3.3. Cambio del tiempo por otro parámetro de evolución . . . . .	33
1.3.4. Homogeneidad de la Lagrangiana . . . . .	34
1.3.5. Obtención de la Lagrangiana a partir de la función Acción . . . . .	35
1.3.6. Simetría de un sistema dinámico . . . . .	35
1.3.7. Funciones gauge de la Lagrangiana . . . . .	36
1.4. Teorema de Noether generalizado . . . . .	38
1.5. Principio atómico: Partículas elementales . . . . .	44
1.5.1. Aplicación del formalismo a grupos cinemáticos sencillos . . . . .	46
1.6. Estructura métrica del espacio cinemático . . . . .	47
1.6.1. Geodésicas en un espacio de Finsler . . . . .	49
1.6.2. Ejemplo: partícula puntual en un campo electromagnético . . . . .	51
1.6.3. Otros ejemplos de espacios de Finsler . . . . .	53
1.7. Principio de Causalidad . . . . .	57
1.8. Formalismo canónico generalizado . . . . .	57
1.8.1. Ecuaciones de Hamilton-Jacobi . . . . .	60

1.8.2.	Sobre la equivalencia entre la formulación variacional y la canónica . . . . .	63
1.9.	Apéndice: Grupos de Lie de transformaciones . . . . .	64
1.9.1.	Operadores de Casimir . . . . .	66
1.9.2.	Espacios homogéneos de un grupo . . . . .	66
1.9.3.	Ejemplos de grupos continuos . . . . .	67
1.10.	Apéndice: Sumario de Mecánica Clásica . . . . .	69
1.10.1.	Cinemática . . . . .	69
1.10.2.	Dinámica . . . . .	69
1.10.3.	Principio Variacional: Formulación Lagrangiana . . . . .	69
1.10.4.	Principio de Relatividad Restringido: Grupo cinemático . . . . .	71
1.10.5.	Principio Atómico: Existencia de partículas elementales . . . . .	71
1.10.6.	Resumen del formalismo . . . . .	72
<b>2.</b>	<b>Ejemplos de partículas con espín</b> . . . . .	<b>75</b>
	<b>PARTÍCULAS NO RELATIVISTAS</b> . . . . .	<b>75</b>
2.1.	Partícula puntual no relativista . . . . .	75
2.1.1.	Partícula puntual libre . . . . .	76
2.1.2.	Observador del centro de masa . . . . .	78
2.1.3.	Interacción con el exterior . . . . .	79
2.2.	Partícula Galileana con espín . . . . .	82
2.2.1.	Partícula libre con espín . . . . .	85
2.2.2.	Constantes del movimiento Noetherianas . . . . .	85
2.2.3.	Espín respecto del centro de masa . . . . .	88
2.2.4.	Dinámica del espín . . . . .	89
2.2.5.	Transformación de diversos observables . . . . .	90
2.2.6.	Partícula Galileana con espín (anti)orbital . . . . .	91
2.2.7.	Interacción con un campo electromagnético externo . . . . .	94
2.2.8.	Interacción con un campo magnético uniforme externo . . . . .	96
2.2.9.	Partícula Galileana con orientación . . . . .	104
	<b>PARTÍCULAS RELATIVISTAS</b> . . . . .	<b>105</b>
2.3.	Partícula puntual relativista . . . . .	105
2.3.1.	Partícula puntual libre . . . . .	106
2.4.	Partículas relativistas con espín . . . . .	108
2.5.	Luxones . . . . .	109
2.5.1.	Partículas sin masa. (El fotón) . . . . .	110
2.5.2.	Partículas con masa. (el electrón) . . . . .	115
2.5.3.	Movimiento del electrón para el observador del CM . . . . .	117
2.5.4.	El espín y el centro de masa para un observador arbitrario . . . . .	119
2.5.5.	Invariancia Poincaré del Hamiltoniano de Dirac . . . . .	121
2.5.6.	Análisis de Dirac . . . . .	121
2.6.	La ecuación dinámica del electrón con espín . . . . .	122
2.6.1.	El electrón relativista con espín . . . . .	123
2.6.2.	El centro de masa . . . . .	127
2.6.3.	Interacción con un campo externo . . . . .	131
2.6.4.	Condiciones de contorno . . . . .	132
2.6.5.	Unidades naturales . . . . .	135
2.6.6.	Propiedades invariantes . . . . .	135
2.7.	Partículas y antipartículas . . . . .	136
2.7.1.	Detección de antimateria cósmica . . . . .	140
2.8.	Apéndice: Grupo de Rotaciones $SO(3)$ . . . . .	141

2.8.1.	Parametrización normal o canónica del grupo $SO(3)$	143
2.8.2.	Ley de composición de las rotaciones	145
2.8.3.	Cinemática de la rotación	147
2.8.4.	Dinámica de la rotación	149
2.9.	Apéndice: Grupo de Galileo $\mathcal{G}$	151
2.10.	Apéndice: Grupo de Poincaré $\mathcal{P}$	155
2.10.1.	Grupo de Lorentz $\mathcal{L}$	158
<b>3.</b>	<b>Cuantización de los modelos</b>	<b>163</b>
3.1.	Cuantización Feynman de los sistemas Lagrangianos	164
3.1.1.	Transformación de la función de onda	166
3.1.2.	Espacio de Hilbert de las amplitudes de probabilidad	168
3.1.3.	Representación de los Observables	168
3.2.	Partículas no relativistas con espín	172
3.2.1.	Partículas no relativistas con espín. Bosones	172
3.2.2.	Partículas no relativistas con espín. Fermiones	174
3.3.	Cuantización del fotón	176
3.4.	Apéndice: Estados de polarización de la luz	178
3.4.1.	Parámetros de Stokes	179
3.4.2.	Superposición coherente	180
3.4.3.	Superposición incoherente	182
3.4.4.	Filtros	182
3.5.	Apéndice: Espinores	184
3.5.1.	Vectores unidad	184
3.5.2.	Proyección del espín en los vectores unidad	185
3.5.3.	Funciones de onda espinoriales	186
3.5.4.	Representaciones sobre la esfera unidad. Armónicos esféricos	187
3.5.5.	Representaciones espinoriales sobre $SU(2)$	188
3.5.6.	Representación matricial de los observables internos	193
3.5.7.	Teorema de Peter-Weyl para grupos compactos	194
3.5.8.	Espinores generales	196
3.6.	Resumen de Mecánica Clásica y Cuántica	200
<b>4.</b>	<b>Partícula de Dirac</b>	<b>203</b>
4.1.	Cuantización del modelo $u = c$	203
4.2.	Ecuación de Dirac	204
4.2.1.	Operador de Dirac	207
4.2.2.	Transformación gauge	213
4.2.3.	Dinámica de los observables	214
4.2.4.	Conservación de la probabilidad	216
4.2.5.	Invariancia PCT	217
4.2.6.	Dos experimentos plausibles	220
4.2.7.	Quiralidad	221
4.3.	Álgebra de Dirac	222
4.4.	Simetrías espacio-temporales adicionales	224
4.4.1.	Análisis del grupo de simetrías ampliado	225
4.4.2.	Ampliación del espacio cinemático	227
4.4.3.	Relación con el modelo estándar	228
4.5.	Una Lagrangiana de interacción de dos partículas de Dirac	229
4.5.1.	Descripción síncrona	231
4.6.	Apéndice: El grupo $\mathcal{S} = \mathcal{W} \otimes SU(2)_T \otimes U(1)_Q$	234

<b>5. Estructura electromagnética del electrón</b>	<b>241</b>
5.1. Estructura del electrón con espín . . . . .	241
5.1.1. Formulación covariante . . . . .	241
5.1.2. Campo de radiación según Dirac . . . . .	245
5.1.3. El campo instantáneo de una partícula de Dirac . . . . .	246
5.1.4. El campo promedio temporal de una partícula de Dirac . . . . .	250
5.1.5. Energía y momento angular electromagnético . . . . .	258
<b>6. Propiedades y efectos asociados con el espín</b>	<b>263</b>
6.1. Relación giromagnética . . . . .	263
6.2. El reloj del electrón . . . . .	266
6.2.1. Midiendo el reloj del electrón . . . . .	266
6.3. Dipolo eléctrico instantáneo . . . . .	270
6.4. Efecto Compton . . . . .	273
6.4.1. Contribución del espín . . . . .	275
6.4.2. Modelo de electrón con espín . . . . .	279
6.5. Efecto túnel clásico . . . . .	281
6.5.1. Efecto túnel de polarización del espín . . . . .	288
6.6. Formación de pares de electrones ligados . . . . .	289
6.6.1. El Positronium . . . . .	295
6.7. Efecto Hall . . . . .	295
6.7.1. Efecto Hall cuántico . . . . .	297
6.7.2. Efecto Hall de espín . . . . .	299
6.8. Enfriamiento de un gas por láser . . . . .	299
6.9. El espín del protón . . . . .	301
6.10. El grupo cinemático . . . . .	303
6.10.1. El espacio cinemático . . . . .	303
6.10.2. Grupo de Weyl . . . . .	304
6.10.3. Transformaciones pasivas y activas . . . . .	306
6.10.4. Descripción cuántica . . . . .	307
<b>Referencias</b>	<b>309</b>

# Prefacio

Estas notas contienen materiales de naturaleza matemática y física del formalismo general que bajo el título de **Teoría Cinemática de Partículas Elementales con Espín** he venido trabajando en los últimos años. El adjetivo *cinemática* hace referencia a la íntima relación del formalismo con el grupo *cinemático* de transformaciones espacio-temporales asociado al Principio de Relatividad Restringido, que como toda teoría con un cierto carácter universal, debe necesariamente satisfacer.

Son una revisión de principios fundamentales, como el formalismo Lagrangiano que conduce a las ecuaciones de Euler-Lagrange, teorema de Noether, etc., pero buscando soluciones de las correspondientes ecuaciones diferenciales que pasen por los puntos inicial y final de la evolución. El formalismo no es equivalente a la formulación canónica. De ahí que las soluciones contendrán, desde el punto de vista clásico, información no de los datos de un único punto inicial, sino de los puntos extremos de la evolución. Esto nos produce un formalismo clásico más próximo, formalmente, a la dinámica cuántica la cual se expresa también en términos de los estados inicial y final de la evolución. Veremos que es a través del método de cuantización de Feynman de Integrales de Caminos, donde las similitudes de ambos formalismos, clásico y cuántico, se complementan.

A las variables clásicas que definen los puntos extremos de la evolución en la formulación variacional, propongo denominarlas **variables cinemáticas**, y, veremos, que en el caso de las partículas elementales, necesariamente forman un espacio homogéneo del grupo cinemático. De esta forma, el grupo cinemático no solamente nos suministra las simetrías espacio-temporales del formalismo, sino que también suministra las variables clásicas de las que debe depender un sistema material para ser considerado como una partícula elemental. Es por lo tanto crucial, desde un punto de vista teórico, precisar convenientemente cuál es este grupo cinemático. En estas notas trabajaremos principalmente con los grupos de Galileo y de Poincaré, dependientes de diez parámetros, que nos suministrarán respectivamente, modelos no relativistas y relativistas de partículas elementales con espín, pero el formalismo es lo suficientemente general para que funcione con cualquier otro grupo cinemático que consideremos. Veremos que el grupo cinemático de transformaciones espacio-temporales más general, que describa la cinemática de un punto en un espacio tridimensional depende como máximo de doce parámetros. Si la partícula elemental posee un centro de carga y un centro de masa como puntos diferentes, entonces necesariamente el grupo cinemático es el grupo de Weyl, que consiste en el grupo de Poincaré junto con las dilataciones espacio-temporales que conservan la velocidad de la luz.

Además, al expresar el formalismo variacional en términos de las variables cinemáticas, nos convierte el propio formalismo variacional en un formalismo geodésico sobre este espacio cinemático. El espacio cinemático es siempre un **espacio métrico Finsleriano**, lo que nos orienta sobre la posibilidad de que cuando establecemos una interacción sobre el sistema material, la nueva métrica tiene que seguir siendo Finsleriana. En este sentido, si analizamos la partícula puntual, cuyo espacio cinemático es el espacio-tiempo, cualquier interacción nos modifica la métrica Minkowskiana de la partícula libre y nos producirá, en general, una métrica Finsleriana y no pseudo-Riemanniana como postula la teoría general de la relatividad. En este sentido



consideramos que la Relatividad General es una teoría demasiado restrictiva.

El formalismo es por lo tanto muy general, pero al mismo tiempo es muy restrictivo, porque una vez que quede inicialmente fijado el grupo cinemático, las variables clásicas que pueden definir los estados inicial y final de una partícula elemental en su formulación variacional, deben formar una variedad que sea un espacio homogéneo de este grupo. Este grupo cinemático es el objeto fundamental del formalismo y debe quedar fijado como un postulado inicial.

Para los grupos de Galileo y de Poincaré, vamos a ver que una partícula elemental con espín es un sistema material localizado y orientado, es decir, que se desplaza y rota. Por **localizado** queremos decir que para analizar su evolución nos basta con seguir el desplazamiento de un sólo punto  $\mathbf{r}$ , que representará la localización del centro de carga, y donde los diferentes campos externos estarán definidos a la hora de calcular sobre la partícula las fuerzas externas. Este punto  $\mathbf{r}$  también representará la localización del centro de masa  $\mathbf{q}$  para partículas sin espín, mientras que ambos puntos serán necesariamente distintos para objetos con espín, como el electrón. El centro de masa  $\mathbf{q}$ , quedará unívocamente determinado en términos de la posición  $\mathbf{r}$  del centro de carga y su movimiento. Es precisamente el movimiento del centro de carga alrededor del centro de masa el que nos dará una idea clásica del denominado *zitterbewegung*, o *movimiento tembloroso* del electrón, en palabras de Schroedinger, y también de la estructura dipolar eléctrica y magnética de la partícula.

Por **orientado** queremos significar que también deberemos describir los cambios de orientación de la partícula, además de la evolución de su centro de carga, mediante el análisis de la evolución y rotación de un sistema cartesiano local, con su origen en el centro de carga. Este sistema local de ejes no posee realidad física, por lo que podemos escogerlo de forma arbitraria en cualquier instante, lo que va a dar lugar a un grupo adicional de simetrías pasivas.

Si consideramos que el grupo cinemático es el grupo de Weyl,  $\mathcal{W}$ , entonces toda partícula elemental, además de ser un objeto localizable y orientable, debe ser un objeto **reescalable**. Es decir, contiene otro grado de libertad que da cuenta de un posible cambio de escala. Por lo tanto, el grupo de simetrías más general de la dinámica de una partícula, además del grupo cinemático que afecta a las variables espacio-temporales, debe incluir las transformaciones específicas de los otros grados de libertad, es decir rotaciones locales y cambios de escala local. Veremos que es posible encontrar una Lagrangiana que es invariante bajo el grupo  $\mathcal{W} \otimes SU(2) \otimes U(1)$ .

Estas notas pretenden ser autocontenidas por lo que hemos incluido al final de cada capítulo algunos apéndices matemáticos que contienen materiales que no suelen aparecer en libros de texto. Están organizadas de la siguiente forma: Comenzamos con un Preámbulo que podría haberse escrito a finales del siglo XIX, en el que se da una definición plausible de centro de carga de una partícula elemental y se demuestra que este centro de carga se mueve siguiendo un movimiento helicoidal a la velocidad de la luz, de tal manera que este punto satisface, en general, ecuaciones diferenciales de cuarto orden. Efectivamente, la geometría nos muestra que la trayectoria más general de un punto en el espacio tridimensional, satisface un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de cuarto orden. Si pretendemos hacer una descripción Lagrangiana de esta partícula, la Lagrangiana debe depender, al menos, hasta la derivada segunda de la posición de este punto. Estamos en el marco de sistemas Lagrangianos generalizados con dependencia de las derivadas hasta segundo orden. En este Preámbulo, la consideración más importante es que una partícula elemental puede tener un centro de masa CM y un centro de carga CC, que son dos puntos distintos. Si esto es así, entonces necesariamente debe existir un límite máximo para la velocidad del CM de las partículas elementales masivas, y por extensión, para el centro de masa de cualquier cuerpo masivo.

En vez de postular un modelo de partícula con un centro de carga como el mencionado anteriormente, comenzaremos en el primer capítulo con el análisis de los principios fundamentales que una teoría de partículas elementales debe satisfacer. Entre estos principios está un principio variacional por lo que dedicaremos este primer capítulo al análisis de los sistemas Lagrangianos

generalizados, sobre todo para realzar el papel que van a jugar las variables de contorno, que denominaremos variables cinemáticas, en la definición de partícula elemental. En el capítulo dos se analizarán diferentes modelos Lagrangianos de partículas relativistas y no relativistas para mostrar cómo los métodos estándar del análisis de las simetrías nos conducen a la definición de los observables relevantes. En particular, prestaremos atención a la definición del espín, a través de la invariancia de las ecuaciones dinámicas bajo el grupo de rotaciones. El espín, como cualquier otro observable, estará ligado con los diferentes grados de libertad y sus derivadas, y analizaremos su estructura matemática. Aunque partimos de un formalismo Lagrangiano, veremos que es innecesario transformarlo al formalismo Hamiltoniano equivalente, ya que aquí estamos interesados no solo en obtener las ecuaciones dinámicas, sino también exigir que se cumplan las condiciones de contorno de la formulación variacional en los extremos de la evolución. Con estas condiciones de contorno, el formalismo canónico y el formalismo variacional no son formalismos equivalentes.

Los dos capítulos siguientes contienen la cuantización del formalismo y el análisis de algunos ejemplos relativistas y no relativistas. En particular, el cuarto capítulo se dedica al modelo relativista que satisface la ecuación de Dirac y que nos brinda la descripción pictórica de la cubierta. Prestaremos especial atención al análisis cuántico del álgebra de observables de Dirac y su relación con los correspondientes observables clásicos. Veremos una interpretación geométrica de la diferencia en la **quiralidad** entre materia y antimateria. Se podría decir, remedando a Asimov<sup>4</sup>, que el electrón es zurdo y el positrón es diestro, o bien, que la materia, es de izquierdas y solamente la antimateria es de derechas. Este capítulo acaba con el análisis de la **ampliación del grupo cinemático** de la partícula de Dirac, pasando del grupo de Poincaré a una extensión del grupo de Weyl, ya que este modelo posee un grupo de simetrías espacio-temporales más amplio que el grupo de Poincaré. Encontraremos una Lagrangiana de interacción invariante bajo este grupo, que nos describiría la interacción entre dos partículas de Dirac. Esta interacción presenta un comportamiento Coulombiano entre las dos cargas cuando el espín de las partículas desaparece, y muestra, entre otras cosas, que es posible la existencia de estados ligados metaestables entre electrones, cuando se cumplen ciertas condiciones. La intensidad de esta interacción viene controlada por el valor de la constante de estructura fina, cuando el análisis se reduce a variables sin dimensiones.

En el capítulo 5 se analiza la estructura del campo electromagnético de una partícula de Dirac, que, claramente no es un campo estático para el observador del centro de masa, pero produce campo eléctrico y campo magnético. Veremos que el campo eléctrico promedio temporal a una vuelta de la carga tiene un comportamiento Coulombiano en cualquier dirección y su campo magnético es el campo de un dipolo, pero a diferencia de los de una partícula puntual, estos campos no se hacen infinitos en el origen. Presentan singularidades en puntos del plano del movimiento de la carga que no hemos sido capaces de renormalizar.

Finalmente, en el último capítulo, se analizan algunos efectos físicos relacionados con el espín. El electrón, al tener una frecuencia interna, resulta ser un reloj. ¿Puede medirse de forma indirecta esta frecuencia? Se analizará la estructura de dipolo eléctrico del electrón, que en el caso cuántico nos lleva al término de Darwin del Hamiltoniano de Dirac. Veremos cómo la estructura del espín permite justificar, incluso a nivel clásico, el denominado efecto túnel, el cual sería responsable de la magnetorresistencia colosal de ciertos materiales. Estamos entrando en los albores de la manipulación de corrientes de electrones mediante el control de su espín, lo que en la tecnología actual se empieza a denominar como **espintrónica**. El efecto Compton analiza la dispersión de fotones por electrones libres y en su análisis utiliza simplemente la ley de conservación de la energía y del momento lineal. Pero la interacción electromagnética también conserva el momento angular. Esta nueva conservación implica considerar los espines tanto del fotón como del electrón, lo que conduce a que si controlamos la orientación del espín

---

<sup>4</sup>Isaac Asimov, *El electrón es zurdo*, Alianza Editorial, 1980

del electrón libre, podremos determinar la frecuencia del fotón dispersado. Para terminar con esta exposición, analizaremos la posibilidad de que dos electrones con sus espines paralelos, bajo ciertas condiciones de proximidad y de velocidad relativa, puedan formar un estado ligado de carga  $2e$  y espín 1, por lo que tendríamos un mecanismo clásico de formación de bosones a temperatura finita, que podría ser la base de la formación de condensados de Bose-Einstein conducentes a la fase superconductora del material a esta temperatura. Consecuencia de este apareamiento puede estar ligado el efecto Hall cuántico. Como último análisis consideramos la formación de un protón como un estado ligado de tres partículas de Dirac, los tres quarks. En el estado actual de este tema vemos que falta un término en el cálculo del espín del protón.

En definitiva hay que hacer las cosas sencillas pero no más sencillas. No conviene simplificar en exceso en el arranque del formalismo. Las simplificaciones se deben hacer en los análisis de fenómenos particulares y dependiendo de los valores de los parámetros físicos que intervienen. Y si, de acuerdo con la primera de las frases de la contraportada, lo que queremos es al menos llegar a entender al electrón deberíamos ser capaces de poner un electrón, por ejemplo en una jaula de Penning, someterlo a campos electromagnéticos externos y lograr que emitiera un fotón de energía determinada, en una dirección de salida prefijada y con su espín orientado hacia adelante o hacia atrás a nuestra elección. Como la descripción precisa de una partícula elemental debe hacerse en un marco cuántico, los anteriores valores estarían sometidos a las imprecisiones del principio de incertidumbre. Todavía estamos lejos de lograr este objetivo.

Martín Rivas  
Bilbao, Septiembre 2019.

# Preámbulo: Movimiento helicoidal del centro de carga

En este capítulo preliminar vamos a dar tres clases diferentes de argumentos, para que supuestos el centro de masa y el centro de carga de una partícula elemental puntos diferentes, mostrar que el centro de carga se mueve en un movimiento helicoidal a la velocidad de la luz y su ecuación diferencial más general es de cuarto orden. Por una parte nos va a singularizar la formulación relativista frente a la no relativista, y el hecho de que las ecuaciones dinámicas de un punto en el espacio tridimensional, no son ecuaciones diferenciales de segundo orden, como algunos libros de mecánica parecen sugerir, sino de cuarto orden como demuestra la geometría diferencial. Por otra parte, va a sugerir desde el punto de vista mecánico, que debe existir un límite superior a la velocidad del centro de masa de cualquier cuerpo masivo.

Esto significa que un formalismo Lagrangiano que describa partículas elementales deberá depender por lo menos hasta la aceleración del centro de carga, para poder obtener ecuaciones dinámicas de cuarto orden. Es por esto que comenzaremos repasando en el primer capítulo la forma en que un formalismo Lagrangiano generalizado produce los resultados generales de las ecuaciones de Euler-lagrange, análisis de simetrías y teorema de Noether, el formalismo canónico generalizado, y, sobre todo, el papel que van a jugar las variables cinemáticas.

Comenzaremos este Preámbulo con una definición física, y por lo tanto restringida, de un concepto de centro de carga de una partícula elemental.

## El centro de carga de un sistema material arbitrario

En mecánica está bien definido el concepto de centro de masa de una distribución de masas, de valores  $m_i$ , localizadas en los puntos correspondientes  $\mathbf{r}_i$ , de tal manera que admitiendo la tercera ley de Newton, el centro de masa se mueve bajo la acción de la suma de todas las fuerzas externas. La definición es

$$\mathbf{R}_{CM} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}$$

Desde el punto de vista electromagnético, si tenemos una distribución arbitraria de cargas y corrientes, el campo electromagnético que generan se puede expresar como el producido a partir de un punto concreto, pero arbitrario, en el que localizaríamos como fuentes de ese campo, la carga total y un número, en principio infinito, de los diferentes momentos multipolares eléctrico y magnético asociados a esa distribución y definidos adecuadamente con respecto a ese punto. Si cambiamos de punto, la carga total asociada al nuevo punto es la misma, pero no así los diferentes momentos multipolares. Podríamos intentar definir un centro de carga de forma similar a como definimos el centro de masa, pero existe una dificultad. La distribución de masa es siempre positiva, en tanto que la distribución de carga eléctrica contiene ambos signos y una definición del tipo anterior

$$\mathbf{R}_{CC} = \frac{\sum q_i \mathbf{r}_i}{\sum q_i}$$

podría resultar que el denominador  $\sum q_i$  resultase cero. Se podría subsanar definiendo por separado el centro de cargas positivas por un lado  $\mathbf{R}_{CC}^{(+)}$ , y el centro de cargas negativas por otro  $\mathbf{R}_{CC}^{(-)}$ , determinando los campos que generan por separado las diferentes distribuciones positivas y negativas. Como las ecuaciones de Maxwell son lineales, su superposición lineal nos dará el resultado, pero ahora tendríamos dos puntos, junto con los correspondientes momentos multipolares, como localización de las fuentes del campo.

Otra cuestión es calcular, dada una distribución de cargas y corrientes, la fuerza que actúa sobre ellas, debido a un campo electromagnético externo, que es generado por fuentes diferentes de las de esta distribución. ¿Se podría escribir esta fuerza en términos de los valores de la carga total y de los diferentes multipolos asociados a un cierto punto, juntamente con los valores que los campos externos y sus derivadas toman en ese punto?

Supongamos para fijar ideas, que tenemos una distribución esférica de carga positiva. Si la distribución es estática en un cierto sistema de referencia inercial, el campo electrostático que genera es el campo Coulombiano de una carga puntual, la carga total de la distribución, localizada en el centro de simetría esférica. Si sobre esta distribución esférica actúa un campo eléctrico externo, y el sistema es un conductor, el campo modificará en general la propia distribución de las cargas al producir movimientos de éstas, apareciendo con respecto al centro de simetría anterior momentos multipolares que antes no existían. Si la distribución estuviera asociada con un aislante, este desplazamiento de cargas no se produciría. En este último caso, al no existir momentos multipolares, el valor del campo eléctrico externo en el centro de simetría por el valor total de la carga nos produce el valor de la fuerza total externa sobre esta distribución, si es que la variación del campo externo es suave. En Jackson,<sup>5</sup> se demuestra que el valor medio de un campo electrostático definido en una región esférica en la que no existen cargas que generen ese campo, es el valor que el campo toma en el centro de la esfera.

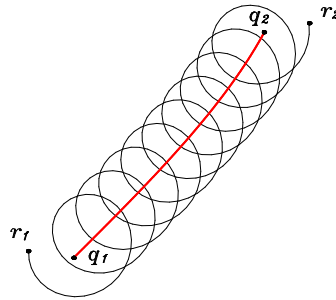
## El centro de carga de una partícula elemental

En el apartado anterior hemos hablado de distribuciones arbitrarias de cargas, las cuales para ciertos efectos se pueden reducir a un punto y respecto del cual los dipolos eléctrico y magnético se pueden anular. No sabemos si la materia es divisible de forma indefinida, pero si no lo es y llegamos a un último objeto indivisible, a éste le llamamos partícula elemental. Desconocemos si una partícula elemental se comporta como un conductor o un aislante, si es o no un sólido rígido desde el punto de vista mecánico, pero en el apartado de principios fundamentales haremos la hipótesis de que es un sistema mecánico indeformable (Principio atómico). Si su distribución de cargas y corrientes posee una distribución esférica con respecto a cierto punto, de tal manera que tomando ese punto como referencia, el campo electromagnético que la partícula elemental produce fuera como si toda la carga estuviera concentrada en él, entonces denominamos a ese punto el **centro de carga**. La supuesta indeformabilidad de una partícula elemental frente a un campo externo nos lleva a postular que la fuerza externa que actúa sobre ella es la fuerza de Lorentz definida en el centro de carga. Estamos haciendo la hipótesis de que desde el punto de vista electromagnético se comporta como una única carga puntual localizada en el centro de carga, sin ningún otro multipolo. Debido a su estructura mecánica, una partícula elemental tendrá otro punto característico, su centro de masa. Solo existen dos posibilidades: que ambos centros sean el mismo punto o que sean distintos. La hipótesis de la existencia de un centro de carga también se hace en el modelo de partícula puntual, pero en ese modelo se admite que el punto representa también la localización del centro de masa, hipótesis que aquí no vamos a aceptar. El modelo debe ser simple, pero admitir que ambos centros son el mismo punto es hacer el modelo más simple, demasiado simple, en contra de la segunda de las sentencias de la contraportada.

<sup>5</sup>J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley, NY 199, p. 148-149.

## Argumentos de sólido rígido

Supongamos que una partícula elemental se pudiera describir como un sólido rígido. Sería por lo tanto un sistema de seis grados de libertad, de los que tres representarían la posición de un punto y los otros tres la orientación de un sistema cartesiano ligado a ese punto. Habitualmente, se toma el punto como el centro de masa  $\mathbf{q}$ , y la orientación como los ejes principales de inercia localizados alrededor de  $\mathbf{q}$ . El centro de masa satisface ecuaciones Newtonianas de segundo orden y se mueve como un punto de masa  $m$ , la masa total del sistema, bajo la acción de la fuerza total externa. El cambio de orientación se produce por el momento de las fuerzas externas. Un sólido rígido se desplaza y rota.



Si en vez de considerar la descripción del centro de masa consideramos otro punto cualquiera  $\mathbf{r}$ , éste seguirá, en general, una trayectoria helicoidal alrededor del centro de masa, del estilo de la dibujada en la figura.

Si una partícula elemental fuese un sólido rígido cargado, necesitaríamos conocer también su estructura electromagnética. Ésta se reduce al conocimiento del centro de carga y los diferentes multipolos. Si el campo que genera tiene simetría esférica, entonces nos quedamos solamente con el centro de carga, para calcular desde ahí el campo que la partícula crea y las fuerzas que los campos externos hacen sobre ella.

En general, dependiendo de cómo esté distribuida la masa y la carga, el centro de masa y el centro carga serán en general puntos diferentes, que es lo que vamos a suponer aquí. Por lo tanto, para determinar el movimiento del centro de masa necesito conocer en todo instante la localización del centro de carga para conocer las fuerzas externas en él definidas. Las ecuaciones de Newton del centro de masa se escriben

$$m \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} = e \left( \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) \right) = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, d\mathbf{r}/dt). \quad (1)$$

La fuerza electromagnética  $\mathbf{F}$  depende, en general, del campo eléctrico y magnético externos definidos en la posición del centro de carga  $\mathbf{r}$  y de la velocidad de este punto  $d\mathbf{r}/dt$ , que es la que aparece en el término magnético.

Para el movimiento relativo del centro de carga alrededor del centro de masa, si el sistema es indeformable, efectuará un movimiento circular, por ejemplo en el caso libre. Si definimos el vector unidad  $\mathbf{n}$  en la dirección de la aceleración del centro de carga  $d^2\mathbf{r}/dt^2$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\omega^2 R} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2},$$

donde  $R$  es el radio del movimiento circular y  $\omega$  su velocidad angular. De esta forma, conocido el centro de carga, podemos determinar el centro de masa mediante

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{r}(t) + \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}. \quad (2)$$

Es por lo tanto más simple, desde el punto de vista teórico, describir la evolución de un solo punto, el centro de carga  $\mathbf{r}$ , en vez del centro de masa  $\mathbf{q}$ , ya que éste queda determinado en función del anterior mediante (2) una vez que se conoce la trayectoria de  $\mathbf{r}$ .

Si eliminamos  $d^2 \mathbf{q}/dt^2$  entre las ecuaciones (1) y (2) obtendremos, en general, una ecuación diferencial de cuarto orden en la variable vectorial  $\mathbf{r}$ . Además, como la velocidad angular es perpendicular al plano que contiene a la velocidad y a la aceleración del punto  $\mathbf{r}$ ,

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{u^2} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad (3)$$

hemos resuelto también el problema de la rotación del sólido rígido cargado, habiendo analizado solamente la evolución del centro de carga.

Una definición de la velocidad angular como ésta (3) implica que la  $u \neq 0$ , es decir la velocidad del punto  $\mathbf{r}$  debe ser inalcanzable para todo observador inercial. De hecho, en el modelo relativista el centro de carga se mueve con  $u = c$ .

Las ecuaciones dinámicas de segundo orden de la partícula libre, para la posición del centro de masa  $\mathbf{q}$  y la orientación de los ejes principales de inercia  $\boldsymbol{\alpha}$ , quedan

$$\ddot{\mathbf{q}} = 0, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = 0,$$

han sido reemplazadas por las ecuaciones dinámicas de cuarto orden del centro de carga,

$$\frac{d^4 \mathbf{r}}{dt^4} + \omega^2 \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = 0.$$

De esta forma, un sólido rígido puede ser interpretado como un sistema de tres grados de libertad, la posición del centro de carga  $\mathbf{r}$ , que satisface ecuaciones diferenciales de cuarto orden, y por lo tanto descrito por una Lagrangiana dependiente de la aceleración. La trayectoria del centro de masa del sólido queda determinada por la trayectoria del centro de carga mediante (2).

Las ecuaciones dinámicas en interacción quedan:

$$\frac{m}{\omega^2} \frac{d^4 \mathbf{r}}{dt^4} + m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = e \left( \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) \right), \quad (4)$$

en términos de los tres grados de libertad  $\mathbf{r}$  que es donde están definidos los campos externos.

Una formulación Lagrangiana dependiente de la aceleración del punto  $\mathbf{r}$ , podría dar lugar a la obtención de estas ecuaciones dinámicas. Por ejemplo, la Lagrangiana no relativista

$$L = \frac{m}{2} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 - \frac{m}{2\omega^2} \left( \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right)^2 - e\phi(t, \mathbf{r}) + e\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

nos reproduciría las anteriores ecuaciones dinámicas (4), donde el sólido rígido giraría a la velocidad constante  $\omega$ , que aquí aparecería como una propiedad intrínseca e inmodificable.

## Argumentos de invariancia

Consideremos que  $\mathbf{r}(t)$ ,  $t \in [t_1, t_2]$  es la trayectoria que sigue un punto de un sistema mecánico en el espacio tridimensional y para un cierto observador inercial arbitrario  $O$ . Cualquier otro observador inercial  $O'$ , está relacionado con  $O$  mediante una transformación  $g$  del grupo cinemático  $G$ , de tal manera que las medidas relativas de espacio y tiempo vienen relacionadas por

$$t' = T(t, \mathbf{r}; g_1, \dots, g_\alpha), \quad \mathbf{r}' = \mathbf{R}(t, \mathbf{r}; g_1, \dots, g_\alpha),$$

donde las funciones  $T$  y  $\mathbf{R}$  definen las correspondientes leyes de transformación del grupo cinemático  $G$ , de parámetros  $(g_1, \dots, g_\alpha)$ , entre ambos observadores. Por lo tanto, la descripción de esa trayectoria para el observador  $O'$  se obtiene de

$$t'(t) = T(t, \mathbf{r}(t); g_1, \dots, g_\alpha), \quad \mathbf{r}'(t) = \mathbf{R}(t, \mathbf{r}(t); g_1, \dots, g_\alpha), \quad \forall t \in [t_1, t_2].$$

que si logramos eliminar  $t$  como función de  $t'$  de la primera y lo sustituimos en la segunda, obtendremos

$$\mathbf{r}'(t') = \mathbf{r}'(t'; g_1, \dots, g_\alpha). \quad (5)$$

Como  $O'$  es un observador arbitrario, la ecuación (5) representa el conjunto completo o familia de trayectorias del punto para todos los observadores inerciales. Por eliminación de los  $\alpha$  parámetros del grupo entre la función  $\mathbf{r}'(t')$  y sus sucesivas derivadas temporales obtendremos la ecuación diferencial que satisface esta familia de trayectorias. Vamos a suponer que la trayectoria es completamente arbitraria y que los parámetros del grupo cinemático son esenciales, en el sentido de que no podemos obtener la misma familia de soluciones con un número menor de parámetros.

Esta ecuación diferencial es invariante bajo las transformaciones del grupo cinemático por construcción, ya que es independiente de todos los parámetros del grupo, y por lo tanto independiente de cualquier observador inercial. Como (5) es una expresión vectorial en el espacio tridimensional, cada vez que hacemos una derivada temporal establecemos tres nuevas condiciones. Si  $G$  es bien el grupo de Galileo o de Poincaré, como es un grupo dependiente de diez parámetros deberemos derivar hasta el orden cuatro para obtener suficientes ecuaciones para eliminar todos los parámetros. Por lo tanto el orden de la ecuación diferencial invariante depende del número de parámetros esenciales del grupo cinemático. Si el punto  $\mathbf{r}$  representa la posición del centro de carga de una partícula elemental, satisface, en general una ecuación diferencial de cuarto orden. Pero al mismo tiempo estos argumentos nos dicen que para obtener la ecuación diferencial invariante que satisface el centro de carga de una partícula elemental, nos basta con conocer su evolución para un observador particular, transformarla a cualquier otro observador inercial y seguir este procedimiento de eliminación de los parámetros. Utilizaremos este método en la sección 2.6 para obtener la ecuación diferencial que satisface el centro de carga del electrón con espín.

## Argumentos geométricos

Como es bien conocido en geometría diferencial en el espacio tridimensional, las ecuaciones de Frenet-Serret (1847) de la evolución de un punto  $\mathbf{r}(s)$ , viene dadas por la variación, por unidad de longitud de arco, de los tres vectores unidad  $\mathbf{t}$ , tangente,  $\mathbf{n}$ , normal y  $\mathbf{b}$  binormal asociados al punto:

$$\dot{\mathbf{t}} = \kappa \mathbf{n}, \quad \dot{\mathbf{n}} = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}, \quad \dot{\mathbf{b}} = -\tau \mathbf{n}$$

donde  $\kappa$  es la curvatura y  $\tau$  la torsión, y las derivadas se efectúan con respecto al elemento de longitud de arco  $s$ . El conocimiento de la curvatura  $\kappa(s)$  y de la torsión  $\tau(s)$ , juntamente con los valores iniciales  $\mathbf{r}(0)$ ,  $\mathbf{t}(0)$ ,  $\mathbf{n}(0)$  and  $\mathbf{b}(0)$ , determinan completamente la curva, puesto que



estas ecuaciones son integrables. Si se define el vector  $\boldsymbol{\omega} = \tau \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b}$ , conocido como vector de Darboux, las ecuaciones de Frenet-Serret se pueden reescribir

$$\dot{\mathbf{t}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{t}, \quad \dot{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}, \quad \dot{\mathbf{b}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b},$$

de tal manera que, en unidades de la longitud del arco, el vector de Darboux representa la velocidad angular instantánea del triedro local y referida a este mismo triedro.

Llamando  $\mathbf{r}^{(k)} = d^k \mathbf{r} / ds^k$ ,

$$\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{t}, \quad \mathbf{r}^{(2)} = \dot{\mathbf{t}} = \kappa \mathbf{n}, \quad \mathbf{r}^{(3)} = \dot{\kappa} \mathbf{n} + \kappa(-\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}),$$

podemos despejar entre estas tres ecuaciones los vectores unidad de la terna de Frenet-Serret en términos de las tres primeras derivadas del vector de posición

$$\mathbf{t} = \mathbf{r}^{(1)}, \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\kappa} \mathbf{r}^{(2)}, \quad \mathbf{b} = \frac{\kappa}{\tau} \mathbf{r}^{(1)} - \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2 \tau} \mathbf{r}^{(2)} + \frac{1}{\kappa \tau} \mathbf{r}^{(3)}$$

De esta forma

$$\kappa = |\mathbf{r}^{(2)}|, \quad \tau = \frac{1}{\kappa^2} (\mathbf{r}^{(1)} \times \mathbf{r}^{(2)}) \cdot \mathbf{r}^{(3)}$$

y se expresan a su vez en términos de las tres primeras derivadas de la posición del punto.

Volviendo a derivar  $\mathbf{r}^{(3)}$  y sustituyendo las expresiones de los vectores unidad, la ecuación diferencial más general de un punto en el espacio tridimensional es

$$\mathbf{r}^{(4)} - \left( \frac{2\dot{\kappa}}{\kappa} + \frac{\dot{\tau}}{\tau} \right) \mathbf{r}^{(3)} + \left( \kappa^2 + \tau^2 + \frac{\dot{\kappa}\dot{\tau}}{\kappa\tau} + \frac{2\dot{\kappa}^2 - \kappa\ddot{\kappa}}{\kappa^2} \right) \mathbf{r}^{(2)} + \kappa^2 \left( \frac{\dot{\kappa}}{\kappa} - \frac{\dot{\tau}}{\tau} \right) \mathbf{r}^{(1)} = 0, \quad (6)$$

donde todos los coeficientes se expresan a su vez en términos de las diferentes derivadas de la posición del punto hasta el orden 4.

Si una partícula elemental es un sistema localizado, y al menos la describimos por la evolución de un punto, éste, en general, deberá satisfacer una ecuación de cuarto orden de este tipo.

## Movimiento libre

Supongamos que este punto  $\mathbf{r}$  es el centro de carga de una partícula elemental. Este punto debe satisfacer en general una ecuación del tipo (6). La curvatura  $\kappa(s)$  y la torsión  $\tau(s)$  en cada momento  $s$ , dependerán de las fuerzas y pares externos que se ejercen sobre la partícula en ese momento. Supongamos ahora que la evolución es libre. Eso quiere decir que no es posible distinguir un instante de la evolución de cualquier otro. Como la anterior ecuación diferencial se expresa en términos del triedro local, esto significa que el desplazamiento del triedro, en la dirección del vector tangente  $\mathbf{t}$ , y la rotación del triedro, deben ser independientes del instante en el que lo analizamos, y fijado un observador inercial, deben ser independientes de su tiempo. Esto significa que se debe mover con velocidad de módulo constante y el vector de Darboux debe ser también constante. Si la velocidad es constante en módulo, el parámetro  $s$  y el tiempo  $t$  difieren en un factor multiplicativo. La curvatura y la torsión son constantes y la curva es, por lo tanto, una hélice. Para un observador inercial el triedro se desplaza con velocidad en valor absoluto constante y rota respecto de sí mismo con velocidad angular constante. Como  $\dot{\kappa} = \dot{\tau} = 0$ , lo que es constante para el observador inercial es  $ds/dt = u$  y el valor  $\omega^2 = \kappa^2 + \tau^2$  y la ecuación diferencial se puede factorizar en la forma

$$\mathbf{r}^{(4)} + (\kappa^2 + \tau^2) \mathbf{r}^{(2)} = \frac{d^2}{ds^2} \left( \mathbf{r}^{(2)} + \omega^2 \mathbf{r} \right) = 0.$$

El término entre paréntesis va definir el centro de la hélice  $\mathbf{q}$ , mediante

$$\mathbf{q} = \mathbf{r} + \frac{1}{\omega^2} \mathbf{r}^{(2)}, \quad \frac{d^2 \mathbf{q}}{ds^2} = 0$$

y la ecuación anterior corresponde a un punto  $\mathbf{q}$  que se mueve de forma libre, en línea recta, y el punto  $\mathbf{r}$  que satisface

$$\mathbf{r}^{(2)} + \omega^2(\mathbf{r} - \mathbf{q}) = 0,$$

efectúa un movimiento armónico de pulsación constante  $\omega = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$  alrededor de  $\mathbf{q}$ , quedando las anteriores ecuaciones acopladas en la forma

$$\mathbf{q}^{(2)} = 0, \quad \mathbf{r}^{(2)} + \omega^2(\mathbf{r} - \mathbf{q}) = 0.$$

Esta descripción del movimiento libre debe ser válida para todo observador inercial.

Una primera conclusión es que la velocidad del centro de carga debe ser una velocidad inalcanzable para cualquier observador inercial. Como su movimiento es acelerado y de velocidad en módulo constante, no es posible encontrar un observador inercial que esté en un instante en reposo respecto de la carga, porque en el instante siguiente vería moverse la carga con una velocidad distinta de cero y por lo tanto contradictorio con el hecho de que mide un movimiento con velocidad de módulo constante.

En un análisis no relativista, la relación de la medida de las velocidades entre dos observadores inerciales  $O$  y  $O'$ , está dada por  $\mathbf{u}' = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ , donde  $\mathbf{v}$  es la velocidad constante de  $O$  medida por  $O'$ . Así,

$$u'^2 = u^2 + v^2 + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}.$$

Si  $u'$  tiene que ser también constante para el observador  $O'$ , independientemente de los valores del vector  $\mathbf{v}$ , esto implica que  $\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0$ , y el vector  $\mathbf{u}$  debe ser constante. El centro de carga se debe mover necesariamente a lo largo de una recta con velocidad constante para todo observador inercial. De esta forma, la hélice general degenera en una línea recta y  $\mathbf{q} = \mathbf{r}$ , el centro de masa y el centro de carga son necesariamente el mismo punto. Esta es la descripción habitual de la partícula puntual o partícula sin espín.

En el caso relativista tenemos igualmente que

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u} + \gamma(v)\mathbf{v} + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)c^2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v}}{\gamma(1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}/c^2)}, \quad u'^2 = \frac{u^2 - c^2}{\gamma^2(1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}/c^2)^2} + c^2.$$

donde  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ , y tomando la derivada temporal de ambos miembros llegamos a  $\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0$ , independientemente de los valores de  $\mathbf{v}$  y por lo tanto  $\mathbf{u}$  tiene que ser un vector constante.

Sin embargo en este análisis relativista existe otra alternativa no contemplada en el caso no relativista. La posibilidad de que el centro de carga de una partícula elemental se esté moviendo a la velocidad de la luz  $c$ , y en ese caso,  $u = u' = c$ , para todo observador inercial. Esto significa que el centro de la hélice se mueve siempre con una velocidad  $|d\mathbf{q}/dt| < c$ , y, si representa el movimiento del centro de masa, la partícula es una partícula con masa. En una descripción variacional la Lagrangiana deberá depender hasta la aceleración del punto  $\mathbf{r}$  para obtener ecuaciones diferenciales de cuarto orden. El movimiento del centro de carga alrededor del centro de masa va a producir el momento magnético de la partícula.

Vemos que hay solo dos posibilidades para el movimiento libre del centro de carga de una partícula elemental: Una que la carga se mueva en línea recta a velocidad constante, la misma que la del centro de masa y además sin ningún límite superior a su velocidad. El observador del centro de masa no ve que la partícula rote. La partícula no posee momento magnético ni espín. En la otra, la carga se mueve a lo largo de una hélice a la velocidad de la luz. El centro de la hélice representa al centro de masa y es siempre un punto diferente y que se mueve con una velocidad inferior a la del centro de carga. Posee espín y momento magnético, pero el formalismo debe ser necesariamente relativista. Como todas las partículas elementales conocidas, quarks y leptones, tienen espín 1/2, solamente nos queda esta segunda posibilidad. Esto vamos a ver que

es consistente con la teoría de Dirac del electrón ya que el operador velocidad de Dirac posee como valores propios  $\pm c$ . Esto significa que la función de onda, o espinor de Dirac  $\psi(t, \mathbf{r})$ , se expresa en términos de la posición del centro de carga  $\mathbf{r}$ , que se mueve a la velocidad de la luz, y que es donde los campos externos están definidos.

En resumen, si una partícula elemental tiene dos centros diferentes, este análisis produce una solución tan restrictiva, que es única. En efecto:

1. Si describe una hélice, el movimiento de la carga es acelerado, de tal manera que si cambiamos de observador inercial, las velocidades no pueden sumarse como vectores, porque si el vector velocidad  $\mathbf{u}$  es distinto en dos instantes  $t_1$  y  $t_2$ , al añadirle un vector constante, no produce necesariamente dos vectores del mismo módulo en el nuevo referencial. La ley no relativista de adición de velocidades no se mantiene. Deberá existir otra ley de composición de velocidades que dé lugar, al añadir un vector constante al vector velocidad  $\mathbf{u}$ , otro vector velocidad de módulo constante, cualquiera que sea la orientación del vector velocidad del punto  $\mathbf{u}$ .
2. Como el movimiento de la carga es acelerado, la velocidad de ésta es necesariamente inalcanzable para cualquier observador inercial. En efecto, si en el instante  $t$  el observador inercial se sitúa en reposo con respecto a la carga, en el instante posterior  $t+dt$  la velocidad que mide no es cero, y por lo tanto contradictorio con el hecho de que la descripción que hace del movimiento es con velocidad de valor absoluto constante.

La física no relativista excluye la posibilidad de que una partícula elemental pudiera tener un centro de carga y un centro de masa como puntos diferentes, si admitimos que la descripción de su movimiento libre debe ser independiente del observador inercial.

La física relativista suministra una única solución. El centro de carga describe necesariamente una hélice a la velocidad de la luz.<sup>6</sup>

En este último caso, el centro de masa se mueve con una velocidad inferior a la del centro de carga, por lo que existe una velocidad límite para el desplazamiento del centro de masa de cualquier cuerpo masivo. Si la partícula no es libre, la condición de que es una partícula elemental nos va a llevar, al admitir el principio atómico, que su estructura interna no es modificada por una interacción, con lo que el centro de carga de un electrón en interacción se sigue moviendo a la velocidad de la luz.

## Dos centros, dos espines

Se suele denominar espín al momento angular de una partícula elemental. Pero un momento angular es una propiedad mecánica que está definida siempre con respecto a un punto prefijado. Si una partícula elemental posee dos puntos característicos, podemos determinar el momento angular de la misma con respecto de ambos. Sea un sistema material como un electrón que viene caracterizado por la localización de su centro de masa (CM)  $\mathbf{q}$ , su centro de carga (CC)  $\mathbf{r}$ , y sea  $\mathbf{k}$  un punto del electrón, distinto de los dos anteriores, en un cierto sistema de referencia inercial con origen en el punto  $O$  (ver figura 1).

Llamemos  $\mathbf{S}$  al momento angular de la partícula con respecto al centro de carga (CC)  $\mathbf{r}$ . Si es  $\mathbf{p}$  el momento lineal de la partícula, su momento angular  $\mathbf{S}_{CM}$  con respecto al centro de masa (CM)  $\mathbf{q}$  es

$$\mathbf{S}_{CM} = (\mathbf{r} - \mathbf{q}) \times \mathbf{p} + \mathbf{S}.$$

Llamemos  $\mathbf{v} = d\mathbf{q}/dt$  y  $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$ , a las velocidades del CM y del CC, respectivamente. Sea  $\mathbf{S}_k$  el momento angular con respecto al punto  $\mathbf{k}$ . El momento angular total de la partícula con

<sup>6</sup>H. Fizeau, realiza en 1851 un experimento que mide con precisión la velocidad de la luz.

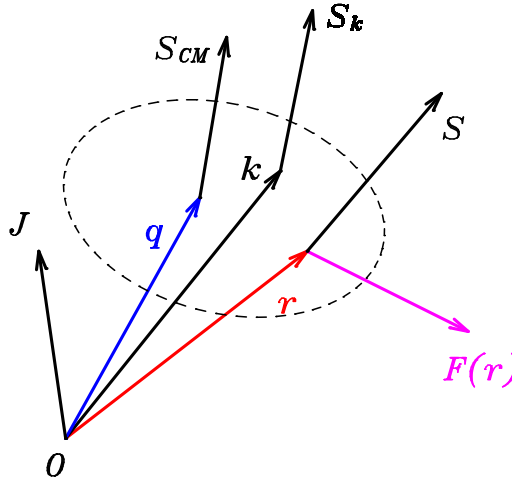


Figura 1: Diferentes momentos angulares  $S$ ,  $S_{CM}$ ,  $S_k$  y  $J$  del electrón definidos con respecto a diferentes puntos en un sistema de referencia inercial, con origen en el punto  $O$ . El punto  $r$  representa la localización del Centro de Carga,  $q$  la localización del Centro de Masa y  $k$  otro punto del electrón distinto de los anteriores, en los que hemos dibujado sus correspondientes momentos angulares. Se ha dibujado también, la fuerza electromagnética externa  $F$  definida en el Centro de Carga. La línea de puntos pretende sugerir un cierto tamaño arbitrario del electrón.

respecto al origen del sistema de referencia de cualquier observador inercial se puede escribir

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} + \mathbf{S}, \quad \text{o bien} \quad \mathbf{J} = \mathbf{q} \times \mathbf{p} + \mathbf{S}_{CM}, \quad \text{o bien} \quad \mathbf{J} = \mathbf{k} \times \mathbf{p} + \mathbf{S}_k.$$

Si la partícula es libre,  $\mathbf{p}$  se conserva y también  $\mathbf{J}$ . Como  $d\mathbf{J}/dt = 0$ , esto nos lleva a

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{p} \times \mathbf{u}, \quad \frac{d\mathbf{S}_{CM}}{dt} = 0,$$

ya que  $\mathbf{p}$  tiene la dirección de la  $\mathbf{v}$ , pero no la de  $\mathbf{u}$ .

El espín con respecto al centro de masa  $\mathbf{S}_{CM}$  es una magnitud conservada para la partícula libre, pero su espín con respecto al centro de carga no. Satisface una ecuación dinámica que implica que su variación temporal es ortogonal al momento lineal constante. De alguna manera está sugiriendo que  $\mathbf{S}$  precesa u oscila alrededor de  $\mathbf{p}$ . Además, para una partícula libre  $\mathbf{u}$  no puede ser un vector constante, ya que entonces el espín con respecto al centro de carga, crecería continuamente.

Sea  $\mathbf{F}$  la fuerza electromagnética externa aplicada en el centro de carga  $\mathbf{r}$ . Ahora  $\mathbf{J}$  no es una magnitud conservada, ni tampoco  $\mathbf{p}$ . Pero el momento de la fuerza con respecto al origen nos produce un par, tal que

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \quad \frac{d\mathbf{J}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$

lo que nos lleva a

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{p} \times \mathbf{u}, \quad \frac{d\mathbf{S}_{CM}}{dt} = (\mathbf{r} - \mathbf{q}) \times \mathbf{F}, \quad \frac{d\mathbf{S}_k}{dt} = \mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{k}}{dt} + (\mathbf{r} - \mathbf{k}) \times \mathbf{F}.$$

Podemos distinguir entre estos espines por su diferente comportamiento dinámico. La dinámica del espín no solamente nos da información sobre cómo evoluciona dicho espín sino que también nos indica respecto de qué punto está definido ese espín. Está claro que si  $\mathbf{r} = \mathbf{q}$ , el espín con respecto al centro de masa se debe conservar siempre. Recíprocamente, si  $\mathbf{S}_{CM}$  no es conservado

eso implica que  $\mathbf{r} \neq \mathbf{q}$  y por lo tanto la partícula elemental posee un CC y un CM que son puntos distintos, como aquí estamos suponiendo.

En la literatura encontramos ya ejemplos de los dos primeros espines. El observable espín de Bargmann, Michel y Telegdi <sup>7</sup>, satisface una ecuación dinámica que es la generalización covariante sobre el espacio-tiempo, de la ecuación dinámica del  $\mathbf{S}_{CM}$ . Es lineal en los campos externos y se conserva para la partícula libre. Este simple argumento de su no conservación y el análisis anterior de la dinámica del espín es suficiente para llegar a la conclusión de que los dos centros son puntos necesariamente distintos. El espín con respecto al centro de carga  $\mathbf{S}$ , satisface la misma ecuación dinámica que el operador espín de Dirac en el caso cuántico, tanto en el caso libre como en interacción, como veremos a lo largo del curso.

En este curso vamos a postular una definición de partícula elemental que produce modelos relativistas y no relativistas de partículas con espín una de cuyas características es que son modelos en los que los centros de masa y de carga son puntos diferentes. Finalmente, solo aquel modelo relativista cuyo centro de carga se mueve a la velocidad de la luz, va a satisfacer la ecuación de Dirac al ser cuantizado.

## Tres constantes universales en una sola

Las tres constantes universales  $\hbar$ ,  $c$  y  $e$  forman parte de propiedades básicas del electrón. La primera  $\hbar$ , está ligada con una propiedad mecánica, el valor único del espín  $s = \hbar/2$ , de esta partícula. La segunda  $c$ , está ligada con la velocidad límite a la que se tiene que mover su centro de carga si es que es un punto diferente de su centro de masa. Finalmente la tercera  $e$ , es su característica de interacción. Es el valor de la carga eléctrica, que resulta ser un valor único para las partículas que solamente interaccionan de forma electromagnética. Estas tres constantes universales configuran una constante universal adimensional  $\alpha$ , la denominada por Arnold Sommerfeld **constante de estructura fina**, definida en el sistema internacional de unidades mediante

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137},$$

y que toma ese valor numérico en cualquier sistema de unidades. Es una característica independiente de la masa de las partículas cargadas con espín. Si demostramos que el valor de esta constante es único para las partículas que solamente interaccionan de forma electromagnética, entonces resulta que estas tres constantes universales no son independientes. Según Pauli<sup>8</sup> una teoría que no sea capaz de determinar esta constante, es una teoría incompleta.

## Teoría de partículas elementales

Vamos a desarrollar en estas notas un formalismo general que describa partículas elementales desde el punto de vista clásico y cuántico. La mecánica clásica es un formalismo que describe las leyes de la dinámica de los sistemas materiales, leyes que, en general, se traducen en ecuaciones diferenciales ordinarias para las variables que definen los diferentes grados de libertad del sistema material. Desde un punto de vista reduccionista hoy en día sabemos que los diferentes sistemas materiales están compuestos por sistemas materiales indivisibles, que denominamos partículas elementales. Es por eso necesario que el propio formalismo contenga la posibilidad de distinguir cuándo un sistema mecánico es elemental o no lo es. Esto lo vamos a reducir a postular un principio fundamental, que lo denominamos principio atómico, el cual establecerá la forma

<sup>7</sup>V. Bargmann, L. Michel y V.L. Telegdi, *Precession of the polarization of particles moving in a homogeneous electromagnetic field*, Phys. Rev. Lett. **2**, 435 (1959).

<sup>8</sup>W. Pauli, Nobel Lectures, vol 13, 1942-1962, Elsevier, Amsterdam (1964)

física, y su traducción matemática, de distinguir entre sistemas elementales y no elementales o compuestos. Se nos fijarán cuáles son los grados de libertad que distinguen a una partícula elemental de otro sistema material que no lo es.

En este preámbulo hemos analizado qué implicaría si el centro de carga de una partícula elemental fuera distinto de su centro de masa. Estamos sugiriendo que las partículas elementales son sistemas dinámicos localizables, localización que viene determinada por el conocimiento de tres grados de libertad, la posición de un punto, el centro de carga. Los argumentos dados en los apartados anteriores indican que el centro de carga debe satisfacer un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de cuarto orden. Este análisis sugiere que conocida la evolución del centro de carga se determinaría la evolución del centro de masa. ¿Son suficientes estos tres grados de libertad para describir una partícula elemental? Claramente no. Los diferentes sistemas materiales, elementales o no, están localizados en ciertas regiones espaciales, pero además poseen propiedades y grados de libertad de orientación, como momentos magnéticos, momentos angulares, etc., es decir los sistemas materiales conocidos se mueven y rotan. Poseen grados de libertad que describen, al menos, su localización y su orientación en el espacio tridimensional. Las partículas elementales también poseen las propiedades orientables anteriores y por lo tanto se mueven y rotan, por lo que además de ser objetos materiales localizables son también orientables. Tendremos que utilizar variables clásicas para describir su orientación, como por ejemplo, asociar al punto donde la carga de la partícula está localizada, un sistema cartesiano de tres vectores unidad ortogonales, cuya orientación va cambiando a medida que la partícula evoluciona. Esto implica que, al menos, una partícula elemental tendrá seis grados de libertad, cuya dinámica hay que determinar. Surge una pregunta: ¿Pueden existir más grados de libertad que la posición de un punto y la orientación de un sistema cartesiano comóvil? Esto va a depender de otro de los principios fundamentales que postularemos en el siguiente capítulo, pero en este preámbulo lo que queremos remarcar es que, al menos, una partícula elemental parece ser un sistema mecánico localizable y orientable.

## Predicciones del formalismo

El formalismo que vamos a desarrollar en este curso no es completo. No hemos sido capaces de obtener el valor de la constante de estructura fina  $\alpha$ . Sin embargo produce un conjunto de predicciones que son consistentes con los planteamientos del modelo estándar y la formulación relativista y otras que habría que verificar de forma experimental. Muchas de estas predicciones no aparecen en la descripción habitual de las partículas elementales consideradas como partículas puntuales. Están desarrolladas a lo largo de las notas en las secciones y capítulos que se indican y que aquí, simplemente, las pasamos a enumerar:

1. Para una partícula elemental masiva, con dos centros CC y CM distintos, la velocidad del CC es inalcanzable para todo observador inercial. Como la velocidad de su centro de masa no puede superar la velocidad del centro de carga, existe para todo cuerpo masivo un límite superior de la velocidad de desplazamiento de su centro de masa. (**Preámbulo**)
2. Si una partícula elemental fuera una partícula puntual, no existiría límite a la velocidad de su centro de masa, y podría alcanzar cualquier velocidad. Este criterio por sí solo, contradictorio con la experiencia, descarta la posibilidad de que una partícula elemental se pueda describir como el modelo de partícula puntual. (**Preámbulo**)
3. El centro de carga y el centro de masa de una partícula elemental masiva que satisface la ecuación de Dirac, son dos puntos distintos, separados por una distancia  $R_0 = \hbar/2mc$ , para el observador del centro de masa. (Sec. **2.5.2**)

4. La separación entre estos dos puntos no es constante para un observador arbitrario, y depende de la velocidad con que se mueve el centro de masa con respecto al observador y su orientación con respecto al espín. (Sec. **2.6.2**)
5. Si la partícula se mueve en línea recta a la velocidad de la luz, es una partícula sin masa, y si representa un cuanto de energía electromagnética, entonces necesariamente su espín, que tiene necesariamente la dirección del movimiento hacia adelante o hacia atrás, solo puede tomar los valores  $S_z = \pm\hbar$ , por lo que se trata de un bosón. (Sec. **3.3**)
6. La dirección del espín del fotón coincide con la velocidad angular de éste, aunque no están relacionados. El espín del fotón es invariante, es el mismo para todos los observadores inerciales, mientras que la velocidad angular transforma entre observadores de acuerdo con las prescripciones del efecto Doppler. (Sec: **2.5.1**)
7. Los fotones son partículas sin masa que van rotando con una velocidad angular en la dirección del movimiento, hacia adelante o hacia atrás, y cuya frecuencia es la misma que la de la radiación electromagnética de la que son sus cuantos de energía. (Sec: **2.5.1**)
8. La formulación relativista impide que exista una partícula puntual masiva sin espín moviéndose a la velocidad de la luz. Su Lagrangiana sería idénticamente nula. Necesariamente tiene que tener más de tres grados de libertad y tiene espín. Los fotones tienen orientación y rotan alrededor de un eje que tiene la dirección de la velocidad. El espín del fotón tiene la dirección de la velocidad angular pero no está relacionado con ella. (Sec. **3.3**)
9. Para una partícula elemental masiva, el centro de carga se mueve alrededor del centro de masa a la velocidad de la luz, en un movimiento circular de frecuencia  $\nu_0 = 2mc^2/h$ , o período  $T_0 = 1/\nu_0 = h/2mc^2$ , para el observador del centro de masa. Existe un reloj natural asociado a este movimiento interno del electrón. (Sec. **2.5.2**)
10. Desde el punto de vista clásico, el punto donde se localizan las propiedades interactivas de una partícula elemental, se mueve con una velocidad inalcanzable para todo observador inercial. La constante universal  $c$  representa tanto la velocidad del punto donde está localizado un fotón como la velocidad del centro de carga de una partícula masiva con espín. Al cuantizar estos sistemas resulta que tanto la materia fermiónica como los bosones con espín no nulo que median en su interacción se mueven a la velocidad de la luz. (Sec. **2.5**)
11. Para un observador que ve moverse el centro de masa del electrón con velocidad  $v$ , el reloj del electrón va más despacio, con un período mayor  $T = \gamma(v)T_0$ , donde  $\gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ . (Sec. **6.2.1**)
12. Para el observador del centro de masa, una partícula elemental posee además de carga, un momento magnético, con respecto al centro de masa, perpendicular al plano de la trayectoria del centro de carga y un momento dipolar eléctrico perpendicular al anterior y contenido en ese plano. (Sec. **2.5.6**)
13. El momento magnético de la materia elemental es producido por este movimiento relativo del centro de carga, que no es modificado por las interacciones. (Sec. **2.5.6**)
14. El electrón, además de un momento magnético creado por el movimiento del centro de carga, posee un momento dipolar eléctrico con respecto al centro de masa, ya predicho por la ecuación de Dirac, aunque considerado como no relevante por él, y que rota con la frecuencia interna del electrón. (Sec. **2.5.6**)

15. La relación giromagnética cuántica  $g = 2$ , está ligada con que el espín, desde el punto de vista clásico y cuántico tiene dos partes  $\mathbf{S} = \mathbf{W} + \mathbf{Z}$ , una ligada con la rotación de la partícula  $\mathbf{W}$ , que no produce momento magnético, y otra  $\mathbf{Z}$  ligada con el movimiento relativo entre el centro de masa y el centro de carga (Zitterbewegung). (Sec. 6.1)
16. Si admitimos que la materia elemental son partículas de Dirac, entonces desde el punto de vista cuántico su espín es necesariamente  $S = \hbar/2$ , independiente de la masa o de la carga de las mismas. Es decir, los leptones y quarks son fermiones masivos de espín  $S = \hbar/2$ . (Cap. 4)
17. El formalismo desarrollado es independiente del grupo cinemático de simetrías espacio-temporales que define la relación entre observadores inerciales, asociado al Principio de Relatividad Restringido. Produce por lo tanto modelos de partículas con espín relativistas y no relativistas. (Sec. 1.5)
18. En el espacio tridimensional, si el centro de carga de una partícula elemental se mueve a la velocidad de la luz, entonces el grupo cinemático de simetrías espacio-temporales debe ser, como máximo, un grupo de dimensión 11. Esta extensión del grupo de Poincaré puede ser el grupo de Weyl, que incluye además de rotaciones, traslaciones y transformaciones cinemáticas a velocidad constante, cambios de escala espacio-temporales que conservan la velocidad  $c$ . (Sec. 6.10)
19. Si admitimos que el grupo de simetrías espacio-temporales es el grupo de Weyl, entonces toda partícula elemental tiene masa no nula y espín  $\hbar/2$ . En el modelo estándar de las partículas elementales, los leptones y quarks se postulan como objetos masivos de espín  $\hbar/2$  y cargas diferentes. (Sec. 4.4)
20. Si la partícula no interacciona de forma fuerte (leptones), su carga eléctrica es única e independiente de su masa. Su valor sería la carga del electrón  $e$ , pero este valor no se predice, de momento. Los tres leptones electrón, muón y tau tienen distintas masas pero la misma carga eléctrica y el mismo espín. (Sec. 5.1.5)
21. Si la partícula interacciona de forma electromagnética y además de forma fuerte (quarks), entonces su carga eléctrica es necesariamente menor que el valor  $e$ . El formalismo no predice que sea una fracción  $e/3$  o  $2e/3$  como postula el modelo estándar. (Sec. 5.1.5)
22. La orientación relativa entre el espín y el momento magnético, de las partículas eléctricamente cargadas, es la misma para la partícula que para su antipartícula. Depende del signo de la carga de la partícula. Si consideramos que el electrón, de carga negativa, es la partícula, entonces electrones y positrones tienen su espín y momento magnético en la misma dirección. Esta orientación relativa no se ha medido experimentalmente. (Sec. 4.2.6)
23. Una medida de la orientación relativa entre el espín y el momento magnético de un electrón ligado a un átomo se podría realizar produciendo la transición hiperfina de átomos de  $\text{Rb}^{87}$  en un campo magnético externo, con un haz de luz polarizada circular. No tenemos constancia de que este experimento se haya realizado. (Sec. 4.2.6)
24. El efecto túnel no es un efecto puramente cuántico. Se puede producir en el caso clásico y está ligado con la separación entre el centro de carga y el centro de masa. (Sec. 6.5)
25. Controlando la orientación del espín de un electrón podemos modificar la probabilidad de cruce de una barrera de potencial. Si el espín está orientado perpendicularmente a la dirección de la corriente, la probabilidad aumenta mientras que si está orientado en la



dirección de la corriente, disminuye. Es lo que se denomina efecto túnel de polarización del espín. (Sec. 6.5.1)

26. Dos electrones, desde el punto de vista clásico, pueden formar un estado ligado metaestable de carga  $2e$  y de espín 1, es decir un bosón desde el punto de vista cuántico, si se cumplen ciertas condiciones de que sus espines sean paralelos, la velocidad relativa de sus centros de masa sea inferior  $0.01c$  y las fases de sus movimientos relativos internos sean opuestas. Este estado ligado es estable frente a campos eléctricos externos pero no frente a campos magnéticos transversales al espín. (Sec. 6.6)
27. En un conductor, en presencia de un campo magnético externo, si el número de electrones de conducción es suficiente, y la temperatura no es muy elevada, pueden producirse apareamientos de electrones, formándose un gas de bosones, por lo que los electrones apareados pueden estar en fase superconductora. Esto es posible desde un punto de vista clásico hasta una temperatura alta. Falta determinar hasta qué temperatura es posible desde un punto de vista cuántico. (Sec. 6.6)
28. Para campos magnéticos superiores a 1 T, el análisis del efecto Hall cuántico entero sugiere que la conducción longitudinal se realiza mediante electrones apareados en fase superconductora. Un experimento consistente en extraer portadores de carga tanto de la corriente principal como de la zona negativamente cargada del potencial de Hall, podría mostrar que efectivamente la conducción se realiza mediante portadores de carga de valor  $2e$  y espín 1. No tenemos constancia de que este experimento se haya realizado. (Sec.6.7)
29. El campo electromagnético clásico generado por un electrón en reposo no es estático. El valor promedio temporal del campo eléctrico retardado, a una vuelta del centro de carga, es Coulombiano en cualquier dirección a partir del centro de masa y se anula en el centro de masa. El valor promedio temporal del campo magnético retardado, a una vuelta del centro de carga, es el de un momento dipolar magnético constante situado en el centro de masa. Si realizamos el mismo promedio temporal de los campos avanzados, estos no producen el anterior comportamiento Coulombiano y dipolar magnético. (Cap. 5)
30. En el estado fundamental del átomo de Hidrógeno, el electrón está en un estado S, de momento angular orbital  $L = 0$ . Esto implica, desde el punto de vista clásico que el centro de masa del electrón se está moviendo en la dirección del centro de masa del protón. Esto es imposible para partículas puntuales. Sin embargo esto se puede justificar clásicamente al estar el centro de masa y el centro de carga separados, con lo que en el estado fundamental el centro de masa del electrón describirá una trayectoria rectilínea que pasa por el centro de masa del protón.
31. El análisis habitual del efecto Compton como interacción de dos partículas puntuales, un fotón y un electrón, solamente considera la conservación del momento lineal y la energía. Sin embargo también se conserva el momento angular. El análisis de esta nueva conservación nos lleva a que si somos capaces de controlar la orientación del espín del electrón dispersor, se determina de forma unívoca la energía y la dirección del fotón dispersado. (Sec. 6.4)
32. Desde el punto de vista teórico clásico, la Lagrangiana que describe a una partícula elemental en interacción con agentes externos, se escribe como  $\tilde{L} = \tilde{L}_0 + \tilde{L}_I$ , donde  $\tilde{L}_0$  es la Lagrangiana de la partícula libre, que describe sus propiedades mecánicas, y  $\tilde{L}_I = -e\phi(t, \mathbf{r})\dot{t} + e\mathbf{A}(t, \mathbf{r})\dot{\mathbf{r}}$ , es la Lagrangiana de la interacción, que predice solamente una interacción electromagnética. (Sec. 2.5.2)

33. El análisis de la interacción de dos partículas de Dirac nos lleva a que la Lagrangiana de la interacción puede ser invariante bajo un grupo más amplio que el grupo de Poincaré, que contiene además cambios de escala y rotaciones locales. Todo el análisis se puede realizar en términos de variables adimensionales. La constante de acoplamiento es  $2\alpha$ , siendo  $\alpha$  la constante de estructura fina. La  $\tilde{L}_I$  va como  $1/r$ , siendo  $r$  la separación entre los centros de carga de ambas partículas. Así, la parte libre  $\tilde{L}_0$  puede describir partículas libres de masas arbitrarias, pero la interacción entre ellas  $\tilde{L}_I$  es independiente de las masas de las partículas. Tiene la particularidad de que necesariamente, para que la interacción no sea nula, las velocidades  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$  de los centros de carga de ambas partículas deben ser diferentes. Dos electrones, que en un instante tuvieran  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ , no interaccionarían, independientemente de la distancia que los separara. (Sec. 4.5)
34. Si llamamos variables cinemáticas  $x$  de cualquier sistema mecánico a las variables de contorno en su formulación variacional, entonces la Lagrangiana de cualquier sistema mecánico  $\tilde{L}(x, \dot{x})$  es siempre una función homogénea de grado 1 de las derivadas  $\dot{x}$  de las variables cinemáticas, en una descripción paramétrica de la evolución. (Sec. 1.3.4)
35. Si excluimos el tiempo de las variables cinemáticas,  $x \equiv (t, q_i)$ , las restantes variables  $q_i$  son las variables generalizadas de la formulación variacional y del formalismo canónico. Si alguna de estas variables representa la derivada temporal de otra de ellas, necesariamente la Lagrangiana depende de derivadas de orden superior, ya que la Lagrangiana es siempre una función de las variables cinemáticas y de su siguiente derivada temporal. (Secs. 1.4, 1.3.2)
36. El espacio cinemático  $X$  es siempre un espacio métrico Finsleriano. Es un espacio métrico en el que los coeficientes de la métrica no son solamente funciones del punto  $x$ , sino también de su derivada  $\dot{x}$ ,  $g_{ij}(x, \dot{x})$ . Resulta entonces que la formulación variacional es equivalente a un problema geodésico sobre  $X$ , cuya métrica viene condicionada por el tipo de interacción a que se somete al sistema. Para una partícula elemental, cualquier interacción modifica la métrica de su espacio cinemático. (Sec. 1.6)
37. La métrica del espacio cinemático se construye por derivación de la Lagrangiana  $\tilde{L}(x, \dot{x})$ , en la forma (Sec. 1.6)
- $$g_{ij}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{L}^2}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} = g_{ji}(x, \dot{x}).$$
38. La partícula puntual es un posible modelo de partícula elemental en este formalismo, pero corresponde a una partícula sin espín. El uso de este modelo debe ser descartado para el análisis del comportamiento de la materia elemental real, ya que no parecen existir partículas elementales sin espín. Todas las propiedades físicas asociadas a la participación del espín en la interacción, quedarían sin ser descritas. (Sec. 2.1)
39. El espacio cinemático de la partícula puntual es el espacio de Minkowski con una métrica constante  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Al ser constante, es también una métrica Riemanniana, pero esta consideración es restrictiva. La gravedad, considerada como otra interacción y en el espíritu de unificación de todas las interacciones, aplicada a la partícula puntual, deberá modificar la métrica Minkowskiana del espacio-tiempo y dar lugar, en general, a una métrica Finsleriana  $g_{\mu\nu}(x, \dot{x})$ , y no solamente Riemanniana  $g_{\mu\nu}(x)$ , como postula la Relatividad General. (Sec. 1.6)
40. La gravedad, como cualquier otra interacción, aplicada a la partícula elemental con espín, modificaría la métrica de su espacio cinemático y produciría, en general, una métrica Finsleriana de esta variedad y no solo de la subvariedad espacio-temporal. Pasaríamos de

una geometrización del espacio-tiempo, como espacio cinemático de la partícula puntual, a la geometrización del espacio cinemático más general del grupo cinemático asociado al Principio de Relatividad Restringido. Hay que revisar los fundamentos de la Relatividad General a la luz de estos argumentos. (Sec. 1.6)

41. Una consecuencia de admitir una descripción variacional de la dinámica, como formulación geodésica en el espacio cinemático, es que la propia formulación contiene en su seno al Principio de Causalidad. Cuando la distancia métrica al cuadrado recorrida entre los estados inicial y final es definida positiva, es posible la evolución entre estos estados, mientras que es imposible cuando la distancia al cuadrado entre ellos no sea definida positiva, usando la métrica Finsleriana del espacio cinemático. (Sec. 1.7)
42. Una consecuencia, que no una predicción de este formalismo, es que no es equivalente a la formulación canónica. Es decir, las ecuaciones de Euler-Lagrange son equivalentes a las ecuaciones de Hamilton si es que el problema variacional de buscar soluciones lo redujéramos a soluciones con condiciones de contorno en el instante inicial  $t_1$ . Sin embargo, este formalismo está planteado con la condición de que las soluciones de los sistemas dinámicos deben poder expresarse en términos de las condiciones de contorno en los puntos extremos de la evolución. Y aquí el formalismo canónico con condiciones de contorno en el instante inicial  $t_1$  ya no es equivalente a las ecuaciones de Euler-Lagrange con condiciones de contorno en los instantes  $t_1$  y  $t_2$ . De hecho, la formulación canónica no es necesaria ni para cuantizar este formalismo ni para la descripción de las partículas con espín que en él van a aparecer. (Sec. 1.8)
43. Si el centro de carga de una partícula con espín se mueve en círculos, de acuerdo con la teoría de la radiación de partículas puntuales, la partícula libre con espín debería estar radiando continuamente. Esto es incompatible con el principio de conservación de la energía. Hay que desarrollar una teoría de la radiación de partículas con espín, que contemple la posibilidad de radiación cuando el centro de masa esté acelerado, es decir cuando la partícula esté sometida a una fuerza externa. En este caso, parte de la energía recibida por la partícula sería transformada en radiación. Esta teoría de la radiación está sin hacer. (Cap. 5)
44. El requerimiento de que la energía de cualquier sistema material debe ser un observable definido positivo, podría estar ligado con la diferencia entre la interpretación pasiva o activa de las traslaciones temporales. Traslaciones temporales pasivas se corresponden con un cambio hacia adelante o hacia atrás en el punto cero del reloj que mide el tiempo. Desde el punto de vista activo solamente podemos realizar traslaciones temporales hacia el futuro. La magnitud conservada asociada a la invariancia de las leyes de la física bajo traslaciones temporales solamente puede tener un signo. El concepto de energía negativa no tendría sentido físico. (Sec: 6.10.3)
45. El anterior comentario implicaría que el Principio de Relatividad Restringido no estaría asociado a un grupo completo de simetrías sino que por lo que respecta a las traslaciones temporales activas estaría restringido al semigrupo de traslaciones hacia el futuro. (Sec: 6.10.3)
46. Se suele postular la Ley de Inercia de la siguiente manera: En un sistema de referencia inercial un cuerpo libre o bien está en reposo o se mueve con velocidad constante. Esta formulación hace referencia al movimiento del centro de masa de un cuerpo libre. Sin embargo, la materia elemental se desplaza y rota y si es libre, se mueve con momento lineal constante (velocidad constante del CM) y con momento angular constante. Hay que reformular la Ley de Inercia para incluir el movimiento libre de rotación.

## Apéndice: Partículas elementales (Modelo Estándar)

Listamos a continuación las partículas elementales empezando por los bosones intermedios, de espín 1 (gluón  $g$ , fotón  $\gamma$  y los bosones masivos  $W^\pm$  y  $Z$ ), los 6 leptones (electrón  $e$ , muón  $\mu$  y tau  $\tau$  y los correspondientes neutrinos) y los 6 quarks de espín 1/2. Se incluyen como números cuánticos, además de la masa y de la carga, el isospín, el espín, la paridad, el número leptónico  $L$ , bariónico  $B$ , la extrañeza  $S$  y el color. No se incluye información del hipotético gravitón que sería una partícula sin masa y de espín 2. Se ha añadido la información sobre el recién medido bosón de Higgs. El número leptónico es característico de cada uno de los tres leptones, es decir existen tres números leptónicos,  $L_e$ ,  $L_\mu$  y  $L_\tau$ . Existen las antipartículas de todas ellas, de la misma masa y espín, pero con el resto de sus números cuánticos de signo contrario.

	masa· $c^2$	carga	Isospín	Espín	Par.	L	B	S	Color	Vida
$g$	0	0	0	1	–	0	0			
$\gamma$	$< 1 \times 10^{-18}$ eV	0	0, 1	1	–	0	0			
W	80.379 GeV	$\pm e$		1		0	0			
Z	91.187 GeV	0		1		0	0			
$e$	0.511 MeV	$-e$		1/2		1	0		0	estable
$\mu$	105.658 MeV	$-e$		1/2		1	0		0	$10^{-6}$ s
$\tau$	1.7768 GeV	$-e$		1/2		1	0		0	$10^{-15}$ s
$\nu_e$	$< 2.2$ eV	0		1/2		1	0		0	
$\nu_\mu$	$< 1.7$ MeV	0		1/2		1	0		0	
$\nu_\tau$	$< 15.5$ MeV	0		1/2		1	0		0	
$u$ (up)	1.5 ~ 3.3 MeV	$2e/3$	1/2	1/2	+	0	1/3	0	1	
$d$ (down)	3.5 ~ 6.0 MeV	$-e/3$	1/2	1/2	+	0	1/3	0	1	
$c$ (charm)	1.27 GeV	$2e/3$	0	1/2	+	0	1/3	0	1	
$s$ (strange)	95 MeV	$-e/3$	0	1/2	+	0	1/3	-1	1	
$t$ (top)	172.44 GeV	$2e/3$	0	1/2	+	0	1/3	0	1	
$b$ (bottom)	4.18 GeV	$-e/3$	0	1/2	+	0	1/3	0	1	
Higgs	125.3 GeV	0	0	0		0	0	0		

### Intensidad de las Interacciones

Los quarks tienen carga de color con tres posibles valores, carga eléctrica y masa y pueden interactuar de las cuatro formas: fuerte, electromagnética, débil y gravitatoria. Los leptones no tienen color y no interactúan de forma fuerte, es decir, no intercambian gluones. Pueden interactuar de las otras tres maneras, salvo los neutrinos que no interactúan de forma electromagnética. El intercambio de gluones entre los quarks conlleva el cambio de su carga de color. La materia ordinaria, formada por agregados de quarks y leptones, no tiene color por lo que los quark y antiquark solo pueden formar estados ligados de color neutro. Es lo que se denomina **confinamiento**.

Si la intensidad de la interacción fuerte entre los quarks es 1 y de alcance del orden de  $10^{-15}$ m, la intensidad de la interacción electromagnética, que intercambia fotones  $\gamma$ , es del orden de la constante de estructura fina  $\alpha = 1/137$  y de alcance infinito. La fuerza débil es también de muy corto alcance, alrededor de  $10^{-18}$ m debido al intercambio de partículas masivas  $W$  y  $Z$  ( $m > 80$  GeV) y de intensidad  $10^{-6}$  mientras que la gravitatoria, de alcance infinito es de una intensidad de  $6 \times 10^{-39}$ . Esta intensidad depende de la energía de las partículas que interactúan. Lo que parece ocurrir es que cuanto mayor es la energía, las tres interacciones (excluida la gravitatoria) tienden a tener la misma intensidad y el comportamiento es como si las partículas fueran libres. Es lo que se denomina **libertad asintótica**. A altísima energía los quarks se comportan como partículas libres. Salvo la interacción débil, las otras fuerzas pueden producir estados ligados.

**Valores de distintos observables para el electrón  
para diferentes velocidades**

$v/c$	$v^2/c^2$	$\gamma(v)$	$p$ (MeV/c)	$E$ (MeV)	$T$ (K)
0	0	1	0	0.511003	0
0.0001	$10^{-8}$	1.	0.0000511003	0.511003	8.475
0.001	$10^{-6}$	1.	0.000511004	0.511004	847.54
<b>0.01</b>	<b><math>10^{-4}</math></b>	<b>1.00005</b>	<b>0.00511029</b>	<b>0.511029</b>	<b><math>8.47 \cdot 10^4</math></b>
0.1	0.01	1.00504	0.0513578	0.513578	$8.47 \cdot 10^6$
0.5	0.25	1.1547	0.295028	0.590056	$2.11 \cdot 10^8$
0.86603	0.750	2.00003	0.885103	1.02202	...
0.9	0.81	2.29416	1.05509	1.17232	...
0.99	0.9801	7.08881	3.58618	3.62241	...
0.999	0.99800	22.3663	11.4178	11.4292	...
0.9999	0.99980	70.7124	36.1307	36.1343	...
<b>0.99995</b>	<b>0.99990</b>	<b>100.001</b>	<b>80.874</b>	<b>80.875</b>	...
0.99999	0.99998	223.607	114.263	114.264	...
0.999999	0.999998	707.107	361.334	361.334	...
0.9999999	0.9999998	2236.07	1142.64	1142.64	...

Los observables que analizamos en la tabla son

$$\gamma(v) = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad p = \gamma(v)mv, \quad E = \gamma(v)mc^2.$$

$$\gamma(v) \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16} \frac{v^6}{c^6} + \dots$$

El factor  $\gamma$  alcanza el valor 2 para  $v/c = 0.86603$ . Obsérvese que hay que llegar a una velocidad  $v/c = 0,999\,999\,999\,999\,87$  (doce nueves) con un factor  $\gamma = 2 \cdot 10^6$ , para que la energía del electrón alcance 1.00213 TeV. Los aceleradores actuales (Tevatrón (FermiLab), LHC (Cern)) alcanzan energías del orden de 4 a 8 TeV. Un electrón con una energía de 1 TeV, su centro de carga da una vuelta alrededor del centro de masa en un tiempo  $T \approx 8 \times 10^{-15}$  s, mientras éste recorre una distancia de  $\lambda \approx 2400$  nm. Un fotón rojo de 680 nm de longitud de onda posee una energía de 1.82 eV y da una vuelta mientras recorre esa distancia.

La última columna corresponde a la temperatura en grados Kelvin de un gas de electrones no relativista cuya velocidad media sea la indicada, y supuesto un sistema de siete grados de libertad. Los puntos suspensivos de algunos apartados implican que para esas velocidades no es aplicable el razonamiento de la mecánica estadística no relativista.

$$\frac{7}{2}\kappa T = \frac{1}{2}mv^2, \quad \kappa = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K (Constante de Boltzmann)}.$$

La primera línea roja en negrita, correspondiente a  $v/c = 0.01$ , representa la velocidad máxima a la que los centros de masa de dos electrones con sus espines paralelos puedan formar un estado ligado, como se analizará en la sección 6.6.

La segunda línea roja en negrita corresponde al experimento, no de muy alta energía, de 80 MeV, que analizaremos en la sección 6.2 al analizar la medida del reloj del electrón.

# Capítulo 1

## Formalismo Lagrangiano

### 1.1. Formulación de Newton

El primer planteamiento de una teoría de partículas elementales se lo debemos a Newton. Por definición, el sistema material más simple es el punto. Para Newton (1687), la materia está formada por agregados de puntos de masa  $m$ , de valor arbitrario pero fijo. Cada partícula elemental puntual se mueve con una ley dinámica tal que

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}$$

siendo  $\mathbf{r}$  la localización del punto y  $\mathbf{F}$  la fuerza total externa que actúa sobre él.

Admitiendo que las fuerzas entre partículas satisfacen la tercera ley de Newton, entonces llegamos a que cualquier agregado material posee un punto característico, el centro de masa  $\mathbf{q}$ , definido mediante

$$\mathbf{q} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}, \quad m = \sum m_i$$

y que satisface

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = m \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2},$$

que se conoce como **teorema del centro de masa**: *El centro de masa de cualquier agregado material se comporta como una partícula puntual de masa la suma de todas las masas del sistema, sometido únicamente a la suma de todas las fuerzas externas.*

Newton postula que toda la materia se atrae con la ley de la gravitación universal, que satisface la tercera ley de Newton. Según esto, si intentamos separar un folio en dos partes, la fuerza que deberemos hacer sería, supuestas las dos partes separadas 10 cm y de 1 g de masa cada una,

$$F = G \frac{m^2}{d^2} = 6,672 \times 10^{-11} \times 0,001^2 / 0,1^2 = 6,672 \times 10^{-15} \text{ N},$$

muy inferior a la que tenemos que hacer. Es claro que las fuerzas de cohesión de la materia no son de naturaleza gravitatoria, por lo que entre las partículas elementales deben existir otro tipo de fuerzas. La teoría Newtoniana deja total libertad al tipo de fuerzas que puedan existir.

Si la partícula puntual posee una propiedad llamada carga, ésta está localizada en el mismo punto  $\mathbf{r}$ . Tenemos por lo tanto que toda la materia está construida a partir de puntos materiales de masas arbitrarias, y por supuesto, cargas arbitrarias, que además de interactuar de forma gravitatoria, se atraen, y a veces se repelen, con otro tipo de fuerza más intensa.

Si pudiéramos viajar a tiempos Newtonianos, ir a Cambridge, pedirle audiencia y decirle: Sir, en el futuro del que venimos se sabe que la materia a nivel elemental, además de masa posee otra propiedad inmodificable que es su espín. Es posible que Sir Isaac, lo pensara un rato

y modificara su segunda ley, para tener en cuenta también la variación del momento angular en términos de los pares externos. Lo importante es que en el momento en que entra en escena la mecánica cuántica en la década de 1920, se cuantizaría un formalismo diferente.

El formalismo Newtoniano es poco restrictivo y para las fuerzas  $\mathbf{F}$  entre partículas no establece ninguna condición, por lo que todo tipo de interacciones son permitidas. Es la teoría gauge la que limitará el tipo de interacciones en la formulación cuántica y el principio atómico en el caso clásico. Tampoco establece ningún criterio mediante el cual las cargas, masas y momentos angulares de las partículas elementales tengan los valores que tienen. Es la teoría cuántica la que predecirá estos valores. Sin embargo, hasta el momento, la teoría cuántica solo ha predicho los valores del espín de las partículas elementales dejando total libertad para los valores de las masas y cargas.

De todas formas, Newton ya era consciente de la posibilidad de fuerzas internas de corto y largo alcance, como lo pone de manifiesto en su disertación en el libro III de Opticks: <sup>1</sup>

*Now the smallest particles of matter may cohere by strongest attractions, and compose bigger particles of weaker virtue; and many of these may cohere and compose bigger particles whose virtue is still weaker, and so on for diverse successions, until the progression ends in the biggest particles on which the operations in chemistry, and the colors of natural bodies depend, and which by cohering compose bodies of a sensible magnitude.*

*For we must learn from the phenomena of nature what bodies attract one another, and what are the laws and properties of the attraction, before we inquire the cause by which the attraction is perform'd. The attractions of gravity, magnetism, and electricity, reach to very sensible distances, and so have been observed by vulgar eyes, and there may be others which reach to so small distances as to escape observation.*

## 1.2. Principios Fundamentales

Como de acuerdo con el modelo estándar todas las partículas elementales conocidas, quarks y leptones, juntamente con los bosones que median en sus interacciones son partículas con espín, y además no parecen existir partículas elementales sin espín, es razonable intentar obtener un formalismo para la descripción clásica del espín. El interés de una descripción clásica del espín es que puede suministrar modelos razonables cuyo comportamiento se aproxime a los resultados experimentales, mucho mejor que utilizando el modelo de partícula puntual sin espín. De todas formas no hay que olvidar que la materia a nivel elemental se comporta con más precisión de acuerdo con las leyes de la mecánica cuántica. Pero una descripción clásica menos simple, nos va a permitir desarrollar un formalismo cuántico más detallado, en términos de más variables que den cuenta de su estructura, y por lo tanto, se intuye, que la cuantización de modelos con espín será algo más detallada y completa que la cuantización de partículas sin espín.

Feynman, en el primer capítulo de sus *Lectures on Physics* <sup>2</sup>, plantea que *If, in some cataclysm, all of scientific knowledge were to be destroyed, and only one sentence passed on to the next generations of creatures, what statement would contain the most information in the fewest words? I believe it is the atomic hypothesis (or the atomic fact or whatever you wish to call it) that all things are made of atoms—little particles that move around in perpetual motion, attracting each other when they are a little distance apart, but repelling upon being squeezed into one another.*

Si la hipótesis atómica parece ser un principio fundamental, la física tiene que explotar este hecho y convenientemente definido debe formar parte de los principios fundamentales de una

<sup>1</sup>I. Newton, *Opticks, A treatise of the Reflections, Refractions, Inflections and Colours of Light*, Dover, NY 1952, p.394.

<sup>2</sup>Feynman RP, Leighton RB and Sands M 1968 *The Feynman Lectures on Physics*, (NY: Addison Wesley) Vol 1, Sec 1-2.

física de partículas, que es lo que haremos en seguida. Los libros de física, al tratar la idea del atomismo, se contentan con mencionar a Leucipo y a Demócrito de Abdera, como los defensores de la idea de que la materia es al final, un conjunto discreto de unidades indivisibles (los átomos). Demócrito añade, además, que estos objetos últimos son inmutables. Es difícil saber qué es lo que Demócrito quería decir con inmutabilidad hace 2500 años. Pero esta idea lo que contiene es que un sistema compuesto es modificable y una partícula elemental no. A una molécula la podremos excitar, rotar con una cierta velocidad angular, deformar, modificar su masa, pero a un electrón ni le podemos modificar su masa ni le podemos hacer rotar con cualquier velocidad. A lo sumo lo que podemos es cambiar la orientación de su velocidad angular. La masa y el valor absoluto del espín de un electrón son propiedades inmutables. El principio atómico nos va a llevar a que el número y tipo de variables clásicas que caracterizan los estados de cualquier sistema material, no están restringidos, pero sí lo están para una partícula elemental. Es un principio tan restrictivo que nos va a conducir, entre otras cosas al llamado acoplamiento mínimo cuando analicemos la interacción de sistemas compuestos por partículas elementales y por lo tanto a restringir el tipo de interacciones permitidas.

El formalismo cinemático que vamos a desarrollar, aunque en sus orígenes se planteó para dar cuenta de la descripción clásica del espín, ha demostrado ser un método potente para la descripción de partículas elementales también desde el punto de vista cuántico, ya que suministra una definición muy precisa de partícula elemental que tiene como contrapartida cuando se cuantiza el formalismo, la definición de Wigner: Todos los sistemas elementales que se van a describir poseen la característica de que al cuantizarlos, su espacio de Hilbert de estados puros genera una representación proyectiva, unitaria e **irreducible** del grupo cinemático correspondiente. Es precisamente a través del formalismo de cuantización de Feynman que la descripción clásica y cuántica se complementan entre sí.

El formalismo que vamos a desarrollar se basa en los siguientes cuatro principios fundamentales:

- Principio de Relatividad Restringido,
- Principio Variacional,
- Principio Atómico,
- Principio de Cuantización.

### 1.2.1. Principio de Relatividad Restringido

El **Principio de Relatividad Restringido** establece que, **en ausencia de gravitación**, debe existir una clase de observadores equivalentes, que históricamente reciben el nombre de observadores inerciales, para los cuales las leyes de la física deben ser las mismas. Usando el mismo tipo de variables, las ecuaciones fundamentales se deben escribir de la misma forma en los diferentes sistemas de referencia equivalentes. Esta clase de observadores queda definida sabiendo cómo relacionan entre sí las medidas de acontecimientos espacio-temporales. Esta forma de transformar las variables temporal  $t$  y espacial  $\mathbf{r}$  de un mismo acontecimiento viene dada por un grupo de transformaciones, que recibe el nombre de **grupo cinemático** del formalismo.

Aquí trataremos principalmente con los grupos de Galileo y Poincaré pero en el capítulo 4 analizaremos una extensión del grupo de Poincaré, como el grupo cinemático más amplio de una partícula de Dirac. Además de las transformaciones del grupo de Poincaré, este grupo contiene dilataciones espacio-temporales y rotaciones locales.

Como ejemplo de este principio, el denominado formalismo *no relativista* admite que si el observador  $O$  mide un acontecimiento espacio-temporal dado por las medidas  $t$  y  $\mathbf{r}$  y el



observador  $O'$  mide  $t'$  y  $\mathbf{r}'$  del mismo acontecimiento, estos valores están relacionados por

$$t' = t + b, \quad \mathbf{r}' = R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{r} + \mathbf{v}t + \mathbf{a},$$

donde los diez números reales  $(b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha})$  son fijos para esos dos observadores, y donde por  $\boldsymbol{\alpha}$  queremos representar los tres parámetros que definen la orientación relativa entre los sistemas cartesianos de ambos observadores. Estas relaciones se dicen que son el grupo de Galileo de transformaciones del espacio-tiempo, que es por lo tanto, el grupo cinemático de un formalismo no relativista. Si en vez de estas transformaciones utilizamos las del grupo de Poincaré, analizadas en el apéndice al final del segundo capítulo, estaremos en un formalismo *relativista*.

Este principio no es solamente una declaración de *universalidad restringida* de las leyes de la física, es también el establecimiento de que las medidas relativas de cualquier magnitud física entre diferentes observadores inerciales, dependen de cómo se relacionan las medidas de acontecimientos espacio-temporales entre ellos. Por universalidad restringida queremos decir que las leyes de la física no son las mismas para todos los observadores, sino para una clase restringida de ellos, los denominados observadores inerciales a los que queda restringido el formalismo.

Si un observador está describiendo un fenómeno electromagnético y cambiamos a un sistema de referencia acelerado, en este sistema, además del fenómeno electromagnético, detectaremos la presencia de un campo de inercia, indistinguible de un campo gravitatorio, y por lo tanto este nuevo observador describe fenómenos no descritos por el otro. No son observadores equivalentes. Vamos a restringirnos a observadores que describen los mismos fenómenos, por lo que se trata de plantear un principio restringido.

Es el Principio de Relatividad General el que admite la invariancia general bajo cualquier cambio de observadores, pero si incluimos la gravitación entre las posibles interacciones, ya que no es posible distinguir físicamente entre un cambio a un sistema de referencia acelerado, de la presencia de un campo gravitatorio local. También se suele admitir que las leyes de la física deben ser invariantes bajo cualquier cambio de variables lo que lleva a postularlo de forma matemática con el nombre de Principio de Covariancia General.

Admitir este Principio de Relatividad Restringido es fijar el correspondiente grupo cinemático en el arranque del formalismo que proponemos, ya que, como veremos, fijados dos observadores cualesquiera, las medidas relativas de cualquier otra magnitud física dependen exclusivamente de este grupo. Y por otra parte, que entre las posibles interacciones que se puedan describir en este formalismo, no está incluida la gravedad, la cual vendrá descrita en un contexto diferente.

El uso del término *relatividad* en la denominación de Principio de Relatividad y su relación con la Teoría de la Relatividad, por lo que respecta a este término es algo confusa. En la literatura anglosajona se denomina Teoría de la Relatividad Especial (Special Relativity Theory) para distinguirla de la Teoría de la Relatividad General (General Relativity Theory). En francés la denominación se aproxima más a la que estamos usando aquí, Teoría de la Relatividad Restringida (Théorie de la Relativité Restreinte). En ambos casos se trata de hacer un formalismo matemático en el que el grupo que define la relación entre observadores inerciales es el grupo de Poincaré. El adjetivo especial tiene poco de especial y más bien debe ser tomado en el sentido restringido de la denominación francesa. Aquí estamos definiendo un principio fundamental con el que construir una teoría, la Teoría Cinemática de Partículas Elementales, por lo que propiamente este principio fundamental se debería denominar **Principio de Universalidad Restringida** de las leyes de la física, sin especificar, en principio, cuál es el grupo cinemático que relaciona a los observadores equivalentes. Este grupo debe claramente respetar un fenómeno físico como es la propagación de la luz y que su velocidad debe ser la misma para todos los observadores equivalentes. Si el término *relatividad* hace mención a que las leyes de la física están siempre formuladas relativas a cada observador, podría ser evitado.

### 1.2.2. Principio Variacional

El **Principio Variacional** reconoce que la magnitud acción durante la evolución de cualquier sistema mecánico, entre dos estados inicial y final prefijados, debe ser estacionaria. La acción se calcula en términos de una función Lagrangiana, la cual es una función explícita del tiempo  $t$ , de los grados de libertad independientes y de sus derivadas temporales hasta un cierto orden finito. Habitualmente, para sistemas materiales contruídos a partir de partículas sin espín, se restringe a que la Lagrangiana dependa solamente hasta las primeras derivadas temporales de los grados de libertad. Esto lleva a que las ecuaciones dinámicas de cualquier grado de libertad sean a lo sumo de segundo orden. Esto es una herencia de la mecánica Newtoniana basada en la construcción de la materia a partir de puntos materiales masivos. Pero como resulta que la ecuación diferencial más general de un punto en el espacio tridimensional es de cuarto orden, y, por otra parte, no sabemos todavía qué tipo de variables deberemos usar para describir una partícula con espín, ¿por qué restringir a que estas variables desconocidas satisfagan necesariamente ecuaciones de segundo orden?

De acuerdo con este principio, existirá una función Lagrangiana que dependerá del tiempo, de un número finito de grados de libertad y de sus derivadas temporales hasta un orden finito, para cualquier sistema mecánico formado a partir de un número finito de partículas elementales. Será el principio atómico el que limitará qué variables son las que caracterizan a una partícula elemental.

Este principio es tan fuerte que cuando lo apliquemos a sistemas materiales que verifican el principio atómico, vamos a llegar a la conclusión de que la única interacción entre partículas elementales, desde el punto de vista clásico, es la interacción electromagnética, tanto si las partículas elementales tienen o no tienen espín. La ecuación de la dinámica de una partícula elemental de carga  $e$ , queda reducida en su formulación variacional a

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}),$$

donde  $\mathbf{p}$  es el momento lineal de la partícula,  $\mathbf{u}$  la velocidad del centro de carga y  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  el campo electromagnético externo. Y esta ecuación de la dinámica va a depender del tipo de variables que describen a la partícula elemental y no del contexto, es decir que vale tanto en el caso relativista como en el no relativista. En este contexto clásico no hemos sido capaces de describir otro tipo de interacciones. La interacción débil y fuerte se obtienen en el contexto cuántico bajo la hipótesis de la invariancia gauge local.

### 1.2.3. Principio Atómico

El **Principio Atómico** admite que la materia no puede ser dividida indefinidamente. La materia no es un continuo. Después de un número finito de pasos en la división de una porción de materia deberemos alcanzar un último objeto indivisible, una **partícula elemental**. Si una teoría física pretende describir la realidad material, debe contener en su formalismo la aceptación de que existen esos objetos elementales, y además, la posibilidad de distinguir cuándo un sistema mecánico es elemental o no lo es. La distinción entre una partícula elemental y cualquier otro objeto material finito, es que la partícula elemental, además de ser indivisible, no puede tener estados excitados y, salvo que sea destruida con su antipartícula o en una colisión de alta energía, su estructura no puede ser modificada. Cuando tomamos un trozo de materia y tratamos de romperlo, lo primero que resulta es que se deforma y, si la energía utilizada es suficiente para romper el enlace, se parte en dos o más porciones. Supongamos un objeto compuesto de dos partículas, por ejemplo el átomo de Hidrógeno. Si actuamos sobre el protón y el electrón intentando separarlos, al principio deformaremos el átomo y con energía suficiente lo llegaremos a separar. Si el objeto es una partícula elemental, como no tiene partes diferenciadas sobre las

que actuar, no puede dividirse ni tampoco se deformará. No puede poseer estados excitados. De alguna manera, si la estructura de una partícula elemental no puede ser modificada, esto implica que los posibles estados en los que podemos encontrarla son simplemente modificaciones cinemáticas de uno cualquiera de ellos. Como en el proceso de aislar una partícula elemental necesitamos un número finito de etapas, esto significa que en la descripción de la partícula elemental necesitamos un número finito de variables para describir sus estados. Si el estado de una partícula elemental cambia, siempre podremos encontrar algún otro observador inercial que la describa en el mismo estado que antes de la modificación, es decir con los mismos valores de todas las variables esenciales que caracterizan su estado. Un electrón sigue siendo un electrón aunque se le someta a una interacción. Esto va a implicar una restricción en el tipo de variables clásicas que podemos usar para describir sus estados en una descripción variacional.

Es esta distinción explícita, entre los sistemas materiales compuestos y las partículas elementales, formando parte del formalismo, y la aceptación de la existencia de las partículas elementales como un hecho destacado, lo que da contenido a este principio atómico, como principio fundamental.

Estos tres principios enunciados, completan el marco clásico del formalismo. Para su cuantización deberemos sustituir este último principio variacional por el siguiente cuarto principio.

#### 1.2.4. Principio de Cuantización

Para la descripción cuántica de un sistema mecánico, vamos a sustituir el anterior principio variacional por el **Principio de Cuantización** en la forma propuesta por Feynman<sup>3</sup>: Todos los caminos de la evolución de un sistema mecánico entre dos estados inicial y final fijos son igualmente probables. En mecánica clásica, fijados los puntos extremos de la evolución, se singulariza algún camino que los une, como aquél que hace mínima a la acción del sistema. En el caso cuántico, se relaja esta prescripción, y como no es experimentalmente posible determinar con precisión si una partícula sigue o no un determinado camino, hemos de admitir que todos los caminos son posibles. Para cada camino posible que una dichos puntos extremos, se define una amplitud de probabilidad, la cual es un número complejo de la misma magnitud para cada camino, y cuya fase es la acción del sistema a lo largo del camino, en unidades de la constante de Planck  $\hbar$ . La probabilidad de que siga uno de esos caminos se calcula como el valor absoluto al cuadrado de la correspondiente amplitud de probabilidad. Como todos los caminos alternativos son independientes, la **estadística interfiriente de Feynman** postula que la amplitud de probabilidad de un sistema que parte de un punto inicial y llega a otro final, fijos, es la suma de todas las amplitudes de probabilidad de los diferentes caminos alternativos.

Frente a la estadística convencional en la que las probabilidades de alternativas independientes se suman, y por lo tanto la probabilidad de un proceso en el que hay numerosas posibilidades es siempre mayor que cualquiera de ellas, aquí lo que se suman son las amplitudes de probabilidad, cuyo valor absoluto al cuadrado es la probabilidad final del proceso. Pero como lo que sumamos son números complejos, el valor absoluto del resultado puede incluso, ser menor que el valor absoluto de cada uno de los sumandos. De ahí el nombre de estadística interfiriente, ya que aunque para ir de  $a$  a  $b$  por algunos caminos pueda existir una probabilidad no nula, puede resultar que en el proceso global la probabilidad final sea cero, el resultado es un proceso de interferencia que anula toda probabilidad de que el mismo se produzca. Al pasar fotones por unas rendijas, la probabilidad de que lleguen a algún punto de la pantalla puede no ser nula, sin embargo cuando se analiza el proceso global, incluyendo todas las diferentes alternativas, existen puntos a los que no llega ningún fotón. La amplitud de probabilidad de llegada a ese punto es cero. Se ha producido una interferencia.

Si en el proceso de ir de  $a$  a  $b$ , efectuamos la suma de las correspondientes amplitudes de

<sup>3</sup>R.P. Feynman and A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, MacGraw Hill, N.Y., (1965).

probabilidad sobre diferentes puntos iniciales, lo que obtenemos es la amplitud de probabilidad de encontrar nuestro sistema en un cierto punto, a partir de una preparación concreta. Pero esto es lo que en la mecánica cuántica convencional denominamos la función de onda. Por lo tanto, esta amplitud de probabilidad debe ser una función compleja, de cuadrado integrable y de norma unidad, ya que sumadas las probabilidades para todos los posibles puntos finales, esta probabilidad debe ser 1. Las diferentes funciones de onda, alrededor de cada punto, representan las diferentes formas de preparar o de llegar al mismo, partiendo de condiciones iniciales y caminos diferentes.

Pero lo importante de esta forma de proceder, es que la función de onda va a ser una función de cuadrado integrable de precisamente las variables que definen los puntos extremos de la formulación variacional, las que vamos a denominar **variables cinemáticas**.

El método de integrales de caminos de Feynman parece haberse inspirado en un artículo de Dirac <sup>4</sup>. En este artículo, Dirac apunta, al comparar el formalismo Lagrangiano con el formalismo canónico, que: *los dos formalismos están por supuesto íntimamente relacionados, pero hay razones para creer que el formalismo Lagrangiano es más fundamental*. Más adelante expresa que, *debemos considerar la Lagrangiana clásica no como una función de las coordenadas y velocidades, sino como función de las coordenadas en los instantes consecutivos  $t$  y  $t + dt$* . Aquí, claramente, está sugiriendo el uso de las variables cinemáticas y el expresar la Lagrangiana en términos de las mismas.

En el Prefacio del libro de Feynman y Hibbs, se menciona que Feynman, en una conversación privada con un colega europeo, se da cuenta de que en ese trabajo, Dirac sugiere que la función de onda en el instante  $t + \epsilon$  debe estar relacionada con la función de onda en el instante  $t$ , mediante

$$\psi(t + \epsilon) \sim e^{i\epsilon L/\hbar} \psi(t).$$

Lo que Feynman hace es postular que efectivamente la relación anterior es una identidad. O lo que es lo mismo, el término exponencial es el propagador de la dinámica. En el libro <sup>5</sup> se cita que el colega europeo fue Herbert Jehle, que visitó Princeton en 1941.

Vamos a construir un formalismo clásico basado en los tres primeros principios, y al final del formalismo vamos a ver que para describir una partícula de Dirac, no va a ser necesario postular ninguna Lagrangiana particular. Solamente va a ser importante el determinar cuáles son las variables que definen los puntos inicial y final del formalismo variacional, es decir, las variables cinemáticas. El teorema de Noether, las leyes de conservación y los invariantes del grupo cinemático serán suficientes para la descripción de la dinámica de una partícula elemental y de sus propiedades.

### 1.3. Principio variacional: Formalismo Lagrangiano

El formalismo Lagrangiano generalizado, dependiente de derivadas de orden superior, fue desarrollado por Ostrogradsky (1850) <sup>6</sup>. Vamos a ver que si la Lagrangiana depende del tiempo  $t$ , de los  $n$  grados de libertad  $q_i(t)$  y de sus primeras derivadas temporales  $L(t, q_i, \dot{q}_i)$ , las ecuaciones dinámicas de Euler-Lagrange son

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

<sup>4</sup>P.A.M. Dirac, *The Lagrangian in quantum mechanics*, Phys. Zeitsch. der Sowjetunion, **3**, 64–72 (1933), ... *the two formulations are, of course, closely related, but there are reasons for believing that the Lagrangian one is more fundamental*.

<sup>5</sup>L.M. Brown (editor), Feynman's thesis: A new approach to quantum theory, (World Scientific 2005)

<sup>6</sup>M. Ostrogradsky, *Mémoire sur les équations différentielles relatives au problème des isopérimètres*, Mem. Acad. St. Petersburg, **6**(4), 385-517 (1850).

en cambio si la Lagrangiana depende hasta las derivadas de orden  $k$  de los grados de libertad, estas ecuaciones resultan ser

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i^{(1)}} \right) + \dots + (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

donde el orden de derivación temporal de los grados de libertad, en vez de un punto, lo hemos escrito en forma de un superíndice entre paréntesis. Vamos a llegar a estas ecuaciones, como condición necesaria de que la solución haga a la acción extremal. Pero también es importante el resaltar, que en el formalismo variacional que nos lleva a estas ecuaciones (1.1), debemos imponer condiciones de contorno en los dos extremos de la evolución, que se mantienen fijas. Además de construir las ecuaciones de Euler-Lagrange, vamos a ver cuáles son estas variables independientes y esenciales que nos definen los estados inicial y final de la evolución, y que denominaremos **variables cinemáticas**. En particular el principio atómico nos limitará cuáles son estas variables para las partículas elementales.

Finalmente, analizaremos la estructura del espacio de las variables cinemáticas y veremos que para cualquier sistema mecánico es siempre un espacio métrico, pero no Riemanniano sino Finsleriano. De esta manera, si un mismo sistema mecánico caracterizado por un conjunto de variables cinemáticas, se analiza bajo dos interacciones diferentes, desde el punto de vista geométrico implica que la métrica del mismo espacio cinemático en las dos situaciones de interacción, es una métrica Finsleriana diferente. Así, la gravedad, se estudiará como una modificación de la métrica generada por los contenidos materiales de todos los objetos, incluido el propio sistema mecánico, pero sin exigir la invariancia frente a un grupo cinemático.

### 1.3.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Consideremos pues un sistema mecánico de  $n$  grados de libertad, que viene caracterizado por el conocimiento de una función Lagrangiana que depende del tiempo  $t$ , de los  $n$  grados de libertad independientes  $q_i(t)$ , y de sus derivadas temporales hasta un orden finito  $k$ , y que las representamos por  $q_i^{(k)}(t) = d^k q_i(t)/dt^k$ . El **funcional acción** se define mediante:

$$\mathcal{A}[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_i(t), \dot{q}_i^{(1)}(t), \dots, q_i^{(k)}(t)) dt, \quad (1.2)$$

donde  $i = 1, \dots, n$ . Para cada posible trayectoria  $q_i(t)$  introducida en (1.2), nos suministra un número real, la acción sobre esa trayectoria.

**Principio variacional:** *La trayectoria que va a seguir el sistema dinámico entre dos estados extremos fijos, definidos en los instantes  $t_1$  y  $t_2$ , en los que fijamos los valores de las variables y sus derivadas  $q_i^{(s)}(t_1)$  y  $q_i^{(s)}(t_2)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $s = 0, 1, \dots, k - 1$ , es aquél camino que hace extremal al funcional acción (1.2), es decir el valor de la acción a lo largo de ese camino es máximo o mínimo.*

Observar que necesitaremos fijar en los extremos, además del valor del tiempo  $t$  unos valores particulares de los  $n$  grados de libertad  $q_i$  y de sus derivadas temporales hasta el orden  $k - 1$ , es decir, un orden inferior al máximo orden de derivación que el correspondiente grado de libertad aparece en la Lagrangiana. Aunque como condiciones de contorno fijamos valores de los grados de libertad y de sus derivadas, los valores que escogemos son totalmente independientes unos de otros, es decir, caracterizan de forma unívoca los estados inicial y final de la evolución.

Recíprocamente, podríamos decir que si conocemos el tipo de variables que definen los estados extremos, la Lagrangiana es una función explícita de estas variables, y de su siguiente derivada temporal.

Una vez que tenemos definido el funcional acción (1.2) para un determinado camino arbitrario  $q_i(t)$ , para analizar su variación, producimos una modificación infinitesimal del mismo  $q'_i(t)$ , que lo escribimos  $q'_i(t) = q_i(t) + \delta q_i(t)$  y de todas sus derivadas temporales  $q_i^{(s)'}(t) = q_i^{(s)}(t) + \delta q_i^{(s)}(t)$ , manteniendo fijos los extremos de la evolución, es decir, que en  $t_1$  y  $t_2$  la modificación de las variables generalizadas y sus derivadas hasta el orden  $k-1$ , se anulan, y por lo tanto,  $\delta q_i^{(s)}(t_1) = \delta q_i^{(s)}(t_2) = 0$ , para  $i = 1, \dots, n$  y  $s = 0, 1, \dots, k-1$  (ver figura 1.1).

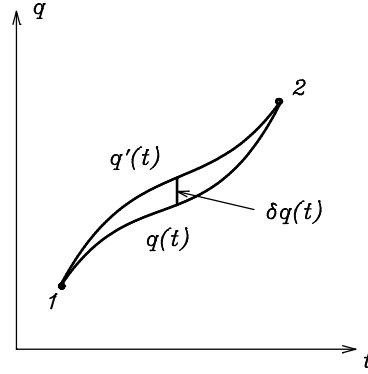


Figura 1.1: Caminos  $q(t)$  y  $q'(t)$  modificado pasando por los mismos estados extremos 1 y 2

La variación de las diferentes derivadas de  $q_i(t)$  viene dada por  $q_i^{(s)'}(t) \rightarrow q_i^{(s)}(t) + \delta q_i^{(s)}(t) = q_i^{(s)}(t) + d^s \delta q_i(t) / dt^s$ , puesto que la modificación de la derivada de orden  $s$  es precisamente la derivada de orden  $s$  de la modificación de la función. Esto lleva a que el funcional acción sufre una modificación entre ambos caminos,  $\delta \mathcal{A} = \mathcal{A}[q + \delta q] - \mathcal{A}[q]$ , dada por:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A} &= \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_i^{(s)}(t) + \delta q_i^{(s)}(t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_i^{(s)}(t)) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial q_i^{(1)}} \delta q_i^{(1)} + \dots + \frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \delta q_i^{(k)} \right], \end{aligned} \quad (1.3)$$

después de desarrollar a orden más bajo la primera integral y restarle la segunda. El término

$$\frac{\partial L}{\partial q_i^{(1)}} \delta q_i^{(1)} = \frac{\partial L}{\partial q_i^{(1)}} \frac{d}{dt} \delta q_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^{(1)}} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^{(1)}} \right) \delta q_i,$$

que integrando entre  $t_1$  y  $t_2$ , nos da:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_i^{(1)}} \delta q_i^{(1)} dt &= \frac{\partial L}{\partial q_i^{(1)}} \delta q_i(t_2) - \frac{\partial L}{\partial q_i^{(1)}} \delta q_i(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^{(1)}} \right) \delta q_i dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^{(1)}} \right) \delta q_i dt, \end{aligned}$$

ya que las variaciones  $\delta q_i(t_1)$  y  $\delta q_i(t_2)$ , se anulan. Lo mismo para el siguiente término:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_i^{(2)}} \delta q_i^{(2)} &= \frac{\partial L}{\partial q_i^{(2)}} \frac{d}{dt} \delta q_i^{(1)} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^{(2)}} \delta q_i^{(1)} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^{(2)}} \right) \delta q_i^{(1)}, \\ \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_i^{(2)}} \delta q_i^{(2)} dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^{(2)}} \right) \delta q_i^{(1)} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^{(2)}} \right) \delta q_i dt, \end{aligned}$$

ya que  $\delta q_i$  y  $\delta q_i^{(1)}$  se anulan en  $t_1$  y  $t_2$ , y finalmente para el último término

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \delta q_i^{(k)} dt = (-1)^k \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^k}{dt^k} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \right) \delta q_i dt,$$

de tal manera que cada término de (1.3) se escribe solamente en términos de las variaciones de los grados de libertad  $\delta q_i$  y no de sus derivadas de orden superior. Observar de nuevo que para llegar hasta aquí ha sido necesario suponer la anulación de las variaciones de todas las  $\delta q_i^{(s)}$ , para  $s = 0, \dots, k-1$ , en los instantes  $t_1$  y  $t_2$ . Recolectando todos los términos, obtenemos

$$\delta \mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \dots + (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \right) \right] \delta q_i(t).$$

Si el funcional acción es extremal sobre el camino  $q_i(t)$ , su variación debe ser nula,  $\delta \mathcal{A} = 0$ . Como las modificaciones del camino  $\delta q_i(t)$  son arbitrarias, todos los términos entre paréntesis cuadrados deben anularse de forma idéntica. Obtenemos así, un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \dots + (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.4)$$

las denominadas **ecuaciones de Euler-Lagrange** (1755).<sup>7 8</sup>

### 1.3.2. Espacio Cinemático

En general, el sistema (1.4) es un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias de orden  $2k$ , y, por lo tanto, los teoremas de existencia y unicidad nos garantizan la existencia de una solución para las  $2kn$  condiciones de contorno  $q_i^{(s)}(t_1)$ ,  $i = 1, \dots, n$  y  $s = 0, 1, \dots, 2k-1$ , en el instante inicial  $t_1$ , donde  $q_i^{(0)} \equiv q_i$ . Sin embargo, la formulación variacional ha sido planteada con la condición de que la solución pasara por los dos estados extremos fijos. Esto no garantiza ni la existencia de solución ni siquiera su unicidad. De alguna forma está sugiriendo que dados dos estados extremos de la evolución no siempre tiene que existir solución, es decir que dado un estado inicial no todos los estados finales posibles pueden ser alcanzados durante la evolución. Se está prefigurando un *principio de causalidad*, como analizaremos en la sección 1.7.

Sin embargo, supongamos que el sistema anterior (1.4) posee solución, no necesariamente única, con los valores prefijados de los estados extremos del problema variacional  $q_i^{(s)}(t_1)$  y  $q_i^{(s)}(t_2)$ ,  $i = 1, \dots, n$  and  $s = 0, 1, \dots, k-1$ , en los instantes  $t_1$  y  $t_2$ , respectivamente. Esto supone, de alguna manera, que las  $2kn$  condiciones de contorno en el instante  $t_1$ , como requieren los teoremas de existencia y unicidad, pueden ser expresadas, tal vez de forma no única, como funciones de las  $kn$  condiciones en cada uno de los extremos. Como estamos analizando sistemas físicos que sabemos poseen solución física partiendo de 1 y llegando a 2, resulta entonces que, una solución particular que pasa por los extremos se podrá expresar como una función del tiempo y de las variables que definen los puntos extremos

$$\tilde{q}_i(t) \equiv q_i(t; q_j^{(r)}(t_1), q_l^{(r)}(t_2)), \quad (1.5)$$



<sup>7</sup> **Leonard Euler** Nace el 15 de Abril 1707 en Basilea, Suiza y fallece el 18 de Septiembre de 1783 en San Petersburgo, Rusia. Ha sido uno de los matemáticos más prolíficos de la historia. Aunque empezó a estudiar teología por deseo paterno, fue debido a Bernouilli que convenció a su padre, que se dedicó al estudio de las matemáticas. Catalina I le ofrece un puesto de director investigador en la academia de Ciencias de San Petersburgo. Publica el libro *Mechanica*, en la que se presenta, por primera vez, la mecánica Newtoniana haciendo uso del análisis matemático. Escribió libros sobre calculo variacional, sobre las órbitas planetarias, artillería y balística, análisis, construcción naval y navegación marítima, el movimiento de la luna y sobre cálculo diferencial.



<sup>8</sup> **Joseph-Louis Lagrange** nace en Turín el 25 de enero de 1736, entonces perteneciente al Piamonte y muere en París el 10 de abril de 1813. Además del desarrollo de la mecánica analítica que lleva su nombre, se dedicó a la mecánica celeste y a diversos campos del análisis. Durante la revolución francesa fue un firme partidario de la implantación del sistema métrico decimal. En 1788 publica su *Mécanique Analytique*, que es una puesta al día de toda la mecánica desde los tiempos de Newton. En 1808, Napoleón le nombra miembro de la Legión de Honor y conde del imperio. Está enterrado en el Panteón de París.

$i, j, l = 1, \dots, n$ ,  $r = 0, 1, \dots, k - 1$ , que al particularizar  $t = t_1$  o  $t = t_2$ , nos produzca para la función y sus derivadas hasta el orden  $k - 1$ , los correspondientes valores en los extremos.

**Definición:** La **Función Acción** de un sistema, es el valor del funcional Acción (1.2) a lo largo del camino clásico (1.5) que satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.4) y que pasa por los puntos extremos:<sup>9</sup>

$$\int_{t_1}^{t_2} L(t, \tilde{q}_i(t)) dt = A\left(t_1, q_i^{(r)}(t_1); t_2, q_i^{(r)}(t_2)\right). \quad (1.6)$$

Una vez que la integral temporal se calcula, el resultado será una función explícita de las  $kn + 1$  variables en el instante inicial,  $q_j^{(r)}(t_1)$ ,  $r = 0, \dots, k - 1$ , incluyendo el tiempo  $t_1$ , y de las correspondientes  $kn + 1$  variables en el instante final  $t_2$ . También será función de los parámetros y constantes intrínsecas del sistema material. Lo escribimos como

$$A\left(t_1, q_i^{(r)}(t_1); t_2, q_i^{(r)}(t_2)\right) \equiv A(x_1, x_2).$$

Y llegamos a la siguiente

**Definición:** Las **variables cinemáticas** del sistema son el tiempo  $t$  y los  $n$  grados de libertad  $q_i$  y sus derivadas hasta el orden  $k - 1$ . La variedad que generan  $X$  recibe el nombre de **espacio cinemático** o **espacio de los estados del sistema**.

El espacio cinemático de las Lagrangianas ordinarias es el espacio de configuración generado por las variables  $q_i$ , juntamente con la variable tiempo  $t$ . Se le suele denominar **espacio de configuración ampliado**. Pero para Lagrangianas generalizadas de orden superior incluye también las derivadas de los grados de libertad hasta un orden una unidad inferior al máximo orden del que aparece en la Lagrangiana. Por lo tanto, **La función acción de cualquier sistema dinámico es una función de los valores de las variables cinemáticas en los extremos de la trayectoria**,  $x_1$  y  $x_2$ , es decir una función de los estados inicial y final. De ahora en adelante consideraremos sistemas para los cuales la función acción está definida y es una función continua y derivable de las variables cinemáticas en los extremos de la evolución. Claramente satisface la propiedad  $A(x, x) = 0$ .

### 1.3.3. Cambio del tiempo por otro parámetro de evolución

En la relatividad restringida, el tiempo es relativo a cada observador, por lo que usar el tiempo como variable de evolución sirve para cada observador particular, pero eso no produce un formalismo que sea independiente del observador. Por eso, el interés de una formulación variacional más general es construirla en términos de un parámetro de evolución invariante, el mismo para todos los observadores inerciales. Supongamos entonces, que la trayectoria del sistema se puede expresar en forma paramétrica, en términos de cierto parámetro de evolución arbitrario  $\tau$ ,  $\{t(\tau), q_i(\tau)\}$ , el mismo para todo observador inercial. El funcional (1.2) se puede reescribir en términos de las variables cinemáticas y sus derivadas en la forma:

$$\mathcal{A}[q] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L\left(t(\tau), q_i(\tau), \frac{\dot{q}_i(\tau)}{\dot{t}(\tau)}, \dots, \frac{\dot{q}_i^{(k-1)}(\tau)}{\dot{t}(\tau)}\right) \dot{t}(\tau) d\tau$$

<sup>9</sup>Observar que estamos usando la misma letra mayúscula  $A(\ )$  para la función acción que para el funcional acción  $\mathcal{A}[\ ]$ , aunque ésta en cursiva. La primera está seguida de paréntesis normales en los que se contienen las variables de las que depende esta función, en tanto que en el funcional aparece seguido de paréntesis cuadrados, para realzar que no es una función de varias variables, sino un funcional que depende de caminos completos entre los puntos extremos.



$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{L}(x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau, \quad (1.7)$$

donde ahora el punto significa tomar la derivada con respecto al parámetro de evolución  $\tau$ , que sin pérdida de generalidad se puede escoger adimensional. Por lo tanto  $\tilde{L} \equiv L(t, q_i, \dot{q}_i^{(s)}/\dot{t}) \dot{t}(\tau)$ ,  $s = 1, \dots, k-1$ , tiene dimensiones de acción.

### 1.3.4. Homogeneidad de la Lagrangiana

Podemos ver que la Lagrangiana  $\tilde{L}$ , de cualquier sistema dinámico, es siempre una **función homogénea de primer grado como función de las derivadas con respecto a  $\tau$  de todas las variables cinemáticas**. En efecto, cada derivada temporal  $q_i^{(s)}(t)$  ha sido reemplazada por el cociente  $\dot{q}_i^{(s-1)}(\tau)/\dot{t}(\tau)$  de dos derivadas con respecto a  $\tau$ . Incluso la derivada de mayor orden  $k$ ,  $q_i^{(k)} = \dot{q}_i^{(k-1)}/\dot{t}$ , se expresa en términos de las derivadas de las variables cinemáticas  $q_i^{(k-1)}$  y  $t$ . Por lo tanto la función original  $L$  es una función homogénea de grado cero en las derivadas de las variables cinemáticas. Finalmente el término  $\dot{t}(\tau)$ , da lugar a que la nueva función  $\tilde{L}$  sea una función homogénea de primer grado. Si reemplazamos cada  $\dot{x}^i$  por  $\lambda \dot{x}^i$ , entonces  $\tilde{L}(x(\tau), \lambda \dot{x}(\tau)) = \lambda \tilde{L}(x(\tau), \dot{x}(\tau))$ . Por lo tanto, el teorema de Euler sobre funciones homogéneas implica, derivando ambos miembros con respecto a  $\lambda$ , llamando  $y^j = \lambda \dot{x}^j$ , y haciendo luego  $\lambda = 1$

$$\tilde{L}(x(\tau), \dot{x}(\tau)) = \sum_j \left. \frac{\partial \tilde{L}}{\partial y^j} \dot{x}^j \right|_{\lambda=1} = \sum_j \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^j} \dot{x}^j = \sum_j F_j(x, \dot{x}) \dot{x}^j. \quad (1.8)$$

El desarrollo (1.8) nos indica que la Lagrangiana de cualquier sistema dinámico puede siempre escribirse como una suma de funciones  $F_i(x, \dot{x})$  multiplicadas por la correspondiente  $\dot{x}_i$ , derivada con respecto a  $\tau$  de la variable cinemática  $x_i$ , es decir en tantos sumandos como variables cinemáticas.

Esta posibilidad de expresar la Lagrangiana como función homogénea de primer grado de las derivadas ya fue considerada por Dirac en 1933<sup>10</sup> pero como una consideración estética. Es esta homogeneidad la que nos permitirá transformar el formalismo variacional en un formalismo geodésico pero no sobre cualquier variedad, sino precisamente sobre el espacio cinemático  $X$ , y donde la métrica  $g_{ij}(x, \dot{x})$  será un tensor dependiente de la dirección, y por lo tanto la trayectoria de la partícula es una geodésica, no en una variedad Riemanniana sino en un espacio de Finsler.<sup>11</sup>

La función  $\tilde{L}$  no es función explícita del parámetro de evolución  $\tau$  y por lo tanto el problema variacional (1.7), es invariante con respecto a cualquier cambio arbitrario de parámetro de evolución  $\tau$ , lo que nos permite tomarlo como adimensional.<sup>12</sup>

En efecto, si cambiamos el parámetro de evolución  $\tau = \tau(\theta)$ , entonces  $\dot{t}(\tau) = (dt/d\theta)(d\theta/d\tau)$  y  $\dot{q}_i^{(s)}(\tau) = (dq_i^{(s)}(\theta)/d\theta)(d\theta/d\tau)$  de tal forma que los cocientes

$$\frac{\dot{q}_i^{(s)}(\tau)}{\dot{t}(\tau)} = \frac{(dq_i^{(s)}(\theta)/d\theta) \dot{\theta}(\tau)}{(dt(\theta)/d\theta) \dot{\theta}(\tau)} \equiv \frac{\dot{q}_i^{(s)}(\theta)}{\dot{t}(\theta)},$$

donde de nuevo el punto significa ahora derivación con respecto a  $\theta$ . Resulta que (1.7) se puede poner como:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[q] &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(t(\theta), q_i(\theta), \dots, \dot{q}_i^{(k-1)}(\theta)/\dot{t}(\theta)) \frac{dt(\theta)}{d\theta} d\theta \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tilde{L}(x(\theta), \dot{x}(\theta)) d\theta. \end{aligned} \quad (1.9)$$

<sup>10</sup> P.A.M. Dirac, *Proc. Cam. Phil. Soc.* **29**, 389 (1933): "a greater elegance is obtained", "a symmetrical treatment suitable for relativity."

<sup>11</sup> G.S. Asanov, *Finsler geometry, Relativity and Gauge theories*, Reidel Pub. Co, Dordrecht (1985).

<sup>12</sup> R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1, Interscience, N.Y. (1970); I.M. Gelfand, S.V. Fomin, *Calculus of Variations* Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1963).

### 1.3.5. Obtención de la Lagrangiana a partir de la función Acción

El formalismo así planteado tiene la ventaja de que es independiente del parámetro de evolución, y si queremos volver a utilizar el tiempo concreto de un cierto observador, para hacer un análisis temporal, reemplazamos  $\tau = t$  y por lo tanto  $\dot{t} = 1$ . A partir de ahora vamos a considerar aquellos sistemas para los que es posible una descripción paramétrica de la evolución y, utilizaremos el símbolo  $\tilde{\phantom{x}}$  sobre la Lagrangiana, la cual debe siempre ser entendida como escrita en términos de las variables cinemáticas y sus primeras derivadas con respecto a este parámetro arbitrario  $\tau$ . De esta forma, distinguiremos las Lagrangianas  $\tilde{L}$  de las Lagrangianas  $L$ , sin el símbolo  $\tilde{\phantom{x}}$ , que hacen el análisis de la evolución temporal del sistema material para algún observador. El paso de  $\tilde{L}$  a  $L$  se hace tomando  $t = \tau$ , y  $\dot{t} = 1$ .

Si conocemos la función acción  $A(x_1, x_2)$ , como función de los puntos extremos de la evolución, podemos recuperar esta Lagrangiana  $\tilde{L}(x, \dot{x})$  mediante un proceso de límite:

$$\tilde{L}(x, \dot{x}) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\partial A(x, y)}{\partial y^j} \dot{x}^j, \quad (1.10)$$

donde hemos usado el criterio habitual de suma sobre el índice mudo  $j$ , extendido al conjunto de todas las variables cinemáticas.

Si en (1.7) consideramos dos puntos muy próximos  $x_1 \equiv x$  y  $x_2 \equiv x + dx$ , y hacemos un desarrollo de la función acción a primer orden  $A(x, x + dx) = A(x, x + \dot{x}d\tau) = \tilde{L}(x, \dot{x})d\tau$  con la condición  $A(x, x) = 0$ , obtenemos (1.10).

De alguna forma el conocimiento de la función acción  $A(x_1, x_2)$  caracteriza de forma global a la dinámica, ya que mediante (1.10) se determina  $\tilde{L}$  y por lo tanto las ecuaciones dinámicas.

### 1.3.6. Simetría de un sistema dinámico

Se define una simetría de un sistema dinámico, como **aquella transformación matemática de las variables que lo describen que deja invariantes las ecuaciones dinámicas**. Como la composición de simetrías, produce nuevas simetrías, y esta ley de composición es asociativa y existe la transformación unidad, resulta que el conjunto de todas las simetrías de un sistema dinámico forma un grupo, el **grupo de simetrías** del sistema. Si admitimos que se satisface el principio de Relatividad Restringido, entonces el grupo cinemático que define la relación entre observadores equivalentes, es un subgrupo del grupo general de simetrías, ya que las ecuaciones dinámicas son las mismas para todos estos observadores.

Si una transformación deja invariante a la Lagrangiana de un sistema dinámico, entonces es una simetría. El recíproco no es cierto, es decir pueden existir simetrías que no dejen invariante a la Lagrangiana. Sin embargo, si bajo una transformación, la Lagrangiana queda multiplicada por un factor constante o cambia a otra que difiere de la anterior en una función que es una derivada total, con respecto al parámetro de evolución  $\tau$ , de una función arbitraria de las variables cinemáticas, entonces esa transformación es también una simetría.

Las transformaciones de simetría pueden ser discretas o continuas. Una transformación es discreta si forma parte de un grupo discreto o finito, por ejemplo la transformación  $t' = -t$ , representa una inversión temporal, es una transformación discreta y si es una simetría, decimos que el sistema dinámico es invariante por inversión temporal. Transformaciones continuas son aquellas que son transformaciones de un grupo continuo, como por ejemplo, traslaciones y rotaciones. En el caso de los grupos continuos, el análisis de las simetrías basta con hacerlo con las transformaciones infinitesimales, con el análisis del álgebra de Lie del grupo. En el apéndice 1.9, se hace una pequeña introducción a los grupos continuos, o grupos de Lie, para fijar la notación y el ver cómo se representan los generadores de las transformaciones infinitesimales.

### 1.3.7. Funciones gauge de la Lagrangiana

En la formulación variacional de la mecánica clásica

$$\mathcal{A}[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_i^{(s)}(t)) dt \equiv \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{L}(x, \dot{x}) d\tau, \quad (1.11)$$

$\mathcal{A}[q]$  es un funcional sobre los posibles caminos, es decir, toma en general valores diferentes para los diferentes caminos que unen cada par de puntos fijos  $x_1$  y  $x_2$ . Entonces, para que se produzcan en general, valores diferentes, es necesario que  $\tilde{L}d\tau$  no sea una diferencial exacta. En caso contrario, si  $Ldt = d\lambda$ , entonces  $\mathcal{A}[q] = \lambda(x_2) - \lambda(x_1)$  y el funcional no distingue con valores diferentes entre los diferentes caminos, y la función acción del sistema entre  $x_1$  y  $x_2$ , es esa única integral  $A(x_1, x_2) = \lambda(x_2) - \lambda(x_1)$ , que queda expresada en función de la función  $\lambda(x)$ , siendo por lo tanto, independiente del camino.

Si  $\lambda(x)$  es una función real definida sobre el espacio cinemático  $X$  de un sistema Lagrangiano cuya función acción sea  $A(x_1, x_2)$ , entonces la función  $A'(x_1, x_2) = A(x_1, x_2) + \lambda(x_2) - \lambda(x_1)$  es otra función acción equivalente a  $A(x_1, x_2)$  en el sentido de que produce las mismas ecuaciones dinámicas. En efecto, por (1.10) da lugar a una Lagrangiana  $\tilde{L}'$  que difiere de  $\tilde{L}$  en una derivada total con respecto a  $\tau$ .<sup>13</sup>

Usando (1.10), obtenemos

$$\tilde{L}'(x, \dot{x}) = \tilde{L}(x, \dot{x}) + \frac{d\lambda(x)}{d\tau}, \quad (1.12)$$

y por lo tanto  $\tilde{L}$  y  $\tilde{L}'$  producen las mismas ecuaciones dinámicas y  $A(x_1, x_2)$  y  $A'(x_1, x_2)$  se dice que son funciones acción equivalentes.

Supongamos una Lagrangiana de un sistema de un grado de libertad  $L(t, q, \dot{q})$  y la modificamos a  $L' = L + d\lambda(t, q)/dt$ . Las ecuaciones dinámicas a partir de  $L'$  son:

$$L' = L + \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial q} \dot{q}, \quad \frac{\partial L'}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial q \partial t} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial q^2} \dot{q},$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{q}}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial \dot{q}} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \dot{q}^2} \dot{q},$$

por lo que

$$\frac{\partial L'}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)$$

y  $L'$  y  $L$  producen las mismas ecuaciones dinámicas. El resultado es general si  $L$  depende de más grados de libertad o de derivadas de orden superior. La única condición es que  $\lambda$  sea función de las variables cinemáticas.

Sea  $G$  un grupo continuo de transformaciones del espacio de configuración ampliado  $(t, q_i)$ , que puede extenderse a un grupo de transformaciones del espacio cinemático  $X$ . Sea  $g \in G$  un elemento arbitrario de  $G$  y  $x' = gx$ , el transformado de  $x$ . Consideremos un sistema mecánico caracterizado por la función acción  $A(x_1, x_2)$  que bajo la transformación  $g$  se cambia en  $A(x'_1, x'_2)$ . Si  $G$  es un grupo de simetrías del sistema, es decir, las ecuaciones dinámicas en términos de las variables  $x'$  son las mismas que en términos de las variables  $x$ , esto implica que  $A(x'_1, x'_2)$  y  $A(x_1, x_2)$  son necesariamente funciones acción equivalentes, y estarán relacionadas por:

$$A(gx_1, gx_2) = A(x_1, x_2) + \alpha(g; x_2) - \alpha(g; x_1). \quad (1.13)$$

La función  $\alpha$ , será en general una función continua de  $g$  y de  $x$ . Esta función  $\alpha(g; x)$  definida sobre  $G \times X$  recibe el nombre de **función gauge** del grupo  $G$  para el espacio cinemático

<sup>13</sup> J.M. Levy-Leblond, *Comm. Math. Phys.* **12**, 64 (1969).

$X$ . Como el grupo es un grupo continuo, satisface  $\alpha(e; x) = 0$ , siendo  $e$  el elemento neutro de  $G$ . Si la transformación  $g$  es infinitesimal, representada por sus coordenadas  $\delta g^\sigma$ , entonces  $\alpha(\delta g; x) = \delta g^\sigma \lambda_\sigma(x)$  a primer orden en los parámetros del grupo. La transformación de la función acción toma la forma

$$A(\delta g x_1, \delta g x_2) = A(x_1, x_2) + \lambda_\sigma(x_2) \delta g^\sigma - \lambda_\sigma(x_1) \delta g^\sigma,$$

es decir, en la forma que va a requerir el teorema de Noether de la sección siguiente, a la hora de determinar las magnitudes conservadas. En general, las funciones  $\lambda_\sigma$  para Lagrangianas que poseen funciones gauge se obtienen de

$$\lambda_\sigma(x) = \left. \frac{\partial \alpha(g; x)}{\partial g^\sigma} \right|_{g=0}. \quad (1.14)$$

Debido a la propiedad asociativa de la ley de composición de todo grupo, cualquier función gauge satisface la identidad

$$\alpha(g'; gx) + \alpha(g; x) - \alpha(g'g; x) = \xi(g', g), \quad (1.15)$$

donde la función  $\xi$ , definida sobre  $G \times G$ , es independiente de  $x$  y es un exponente del grupo  $G$ .

Se puede ver esto a partir de la mencionada ley asociativa. A partir de (1.13) tenemos:

$$A(g'g x_1, g'g x_2) = A(x_1, x_2) + \alpha(g'g; x_2) - \alpha(g'g; x_1), \quad (1.16)$$

y también

$$\begin{aligned} A(g'g x_1, g'g x_2) &= A(g x_1, g x_2) + \alpha(g'; g x_2) - \alpha(g'; g x_1) \\ &= A(x_1, x_2) + \alpha(g; x_2) - \alpha(g; x_1) + \alpha(g'; g x_2) - \alpha(g'; g x_1), \end{aligned}$$

y por lo tanto, por identificación con el anterior (1.16), recolectando los términos con el mismo argumento  $x$ , se llega a

$$\alpha(g'; g x_2) + \alpha(g; x_2) - \alpha(g'g; x_2) = \alpha(g'; g x_1) + \alpha(g; x_1) - \alpha(g'g; x_1),$$

y como  $x_1$  y  $x_2$  son dos puntos arbitrarios de  $X$ , esta expresión es (1.15) y define una función  $\xi(g', g)$ , independiente de  $x$ .

Levy-Leblond demuestra en la referencia previa que si  $X$  es un espacio homogéneo de  $G$ , es decir, si existe un subgrupo  $H$  de  $G$  tal que  $X = G/H$ , entonces, el exponente  $\xi$  es equivalente a cero sobre el subgrupo  $H$ , y las funciones gauge para espacios homogéneos resultan ser:

$$\alpha(g; x) = \xi(g, h_x), \quad (1.17)$$

done  $h_x$  es cualquier elemento del conjunto representado por  $x \in G/H$ .

Para el grupo de Poincaré  $\mathcal{P}$  todos sus exponentes son equivalentes a cero y las funciones gauge cuando  $X$  sea un espacio homogéneo de  $\mathcal{P}$  son idénticamente nulas. Las Lagrangianas de los sistemas relativistas cuyos espacios cinemáticos sean espacios homogéneos de  $\mathcal{P}$ , son invariantes.

Sin embargo, en la formulación no relativista, el grupo de Galileo  $\mathcal{G}$  posee exponentes no triviales, que vienen caracterizados por un parámetro  $m$  que se interpreta como la masa total del sistema. Las Lagrangianas Galileanas para sistemas masivos no son en general invariantes bajo  $\mathcal{G}$ . En el formalismo cuántico, el espacio de Hilbert de los estados de un sistema masivo no relativista, es el espacio de una representación *projectiva* unitaria del grupo de Galileo, en vez de una verdadera representación unitaria.<sup>14</sup>

<sup>14</sup> ver ref.7 y también J.M. Levy-Leblond, *Galilei Group and Galilean Invariance*, en E.M. Loebl, *Group Theory and its applications*, Acad. Press, NY (1971), vol. 2, p. 221.

## 1.4. Teorema de Noether generalizado

El análisis de Noether(1915)<sup>15</sup> para sistemas Lagrangianos generalizados, demuestra que

**Teorema:** *A cada grupo uniparamétrico de transformaciones continuas de las variables  $t$  y  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , que dejando las ecuaciones dinámicas invariantes, transforman la función acción del sistema, bajo una transformación infinitesimal  $\delta g$ , en la forma*

$$A(\delta g x_1, \delta g x_2) = A(x_1, x_2) + \lambda(x_2)\delta g - \lambda(x_1)\delta g,$$

donde  $\lambda(x)$  es una función definida sobre el espacio cinemático, hay asociado un observable clásico  $N$ , el cual es una constante del movimiento.

Este observable  $N$  se construye, como veremos en (1.37), en función de  $\lambda(x)$ , de la función Hamiltoniana  $H$  y los momentos canónicos  $p_{i(s)}$  y de la acción infinitesimal del grupo sobre las variables cinemáticas.

Además de  $\lambda(x)$  puede contener tantos términos como variables cinemáticas.

La condición que requiere el teorema de Noether para la transformación de la función acción es equivalente a que la Lagrangiana transforme bajo una transformación infinitesimal de la forma:

$$\tilde{L}(\delta g x, \delta g \dot{x}) = \tilde{L}(x, \dot{x}) + \frac{d\lambda(x)}{d\tau} \delta g,$$

es decir que sea invariante salvo una derivada total de una función de las variables cinemáticas.

### Demostración:

Supongamos que tenemos un grupo continuo uniparamétrico de transformaciones  $G$ , del espacio de configuración ampliado  $(t, q_i)$ , que puede extenderse a un grupo de transformaciones de todo el espacio cinemático  $X$ . Sea  $\delta g$  un elemento infinitesimal de  $G$ , y su acción sobre estas variables viene dada por:

$$t \rightarrow t' = t + \delta t = t + M_0(t, q)\delta g, \quad (1.18)$$

$$q_i(t) \rightarrow q'_i(t') = q_i(t) + \delta q_i(t) = q_i(t) + M_i^{(0)}(t, q)\delta g, \quad (1.19)$$

y su extensión al resto de las variables derivadas por

$$q_i^{(1)}(t') = q_i^{(1)}(t) + \delta q_i^{(1)}(t) = q_i^{(1)}(t) + M_i^{(1)}(t, q, q^{(1)})\delta g, \quad (1.20)$$

y en general

$$q_i^{(s)}(t') = q_i^{(s)}(t) + \delta q_i^{(s)}(t) = q_i^{(s)}(t) + M_i^{(s)}(t, q, \dots, q^{(s)})\delta g, \quad s = 0, 1, \dots, k, \quad (1.21)$$

donde  $M_0$  y  $M_i^{(0)}$  son únicamente funciones de  $q_i$  y de  $t$  mientras que las funciones  $M_i^{(s)}$  con  $s \geq 1$ , se obtienen a partir de las derivadas de aquellas, y serán funciones del tiempo  $t$  y de las variables  $q_i$  y sus derivadas hasta el orden  $s$ .



<sup>15</sup> **Emmy Amalie Noether** Nace en Erlangen, Baviera, Alemania, el 23 de marzo de 1882 y fallece en Bryn Mawr, Pennsylvania, USA, el 14 de abril de 1935. Sus mayores contribuciones en matemáticas son en el campo del álgebra abstracta, anillos y módulos. Sin embargo su influencia en la física teórica es importante con el teorema que aquí se presenta y su teoría de invariantes, que condujo a Einstein a formular distintos conceptos en su teoría de la relatividad general.

Por ejemplo,

$$q_i^{(1)}(t') \equiv \frac{dq_i'(t')}{dt'} = \frac{d(q_i(t) + M_i^{(0)}\delta g)}{dt} \frac{dt}{dt'},$$

pero a primer orden en  $\delta g$

$$\frac{dt'}{dt} = 1 + \frac{dM_0(t, q)}{dt} \delta g, \quad \frac{dt}{dt'} \approx 1 - \frac{dM_0(t, q)}{dt} \delta g,$$

y por lo tanto

$$q_i^{(1)}(t') = q_i^{(1)}(t) + \left( \frac{dM_i^{(0)}(t, q)}{dt} - q_i^{(1)} \frac{dM_0(t, q)}{dt} \right) \delta g,$$

que al comparar con (1.20) obtenemos

$$M_i^{(1)}(t, q, q^{(1)}) = \frac{dM_i^{(0)}(t, q)}{dt} - q_i^{(1)} \frac{dM_0(t, q)}{dt},$$

donde las derivadas totales

$$\frac{dM_0(t, q)}{dt} = \frac{\partial M_0}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial M_0}{\partial q_j} q_j^{(1)}, \quad \frac{dM_i^{(0)}(t, q)}{dt} = \frac{\partial M_i^{(0)}}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial M_i^{(0)}}{\partial q_j} q_j^{(1)}.$$

Las demás  $M_i^{(s)}$  para  $s > 1$ , se obtienen de la misma forma a partir de la funciones  $M_i^{(s-1)}$ .

Bajo  $\delta g$  el funcional acción del sistema cambia:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A}[q] &= \int_{t'_1}^{t'_2} L(t', q_i^{(s)}(t')) dt' - \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_i^{(s)}(t)) dt \\ &= \int_{t'_1}^{t'_2} L(t + \delta t, q_i^{(s)}(t) + \delta q_i^{(s)}(t)) dt' - \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_i^{(s)}(t)) dt. \end{aligned}$$

Si reemplazamos en la primera integral el intervalo de integración  $(t'_1, t'_2)$  por  $(t_1, t_2)$  sabiendo que el Jacobiano de  $t'$  en términos de  $t$  implica que el diferencial  $dt' = (1 + d(\delta t)/dt)dt$ , y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A}[q] &= \int_{t_1}^{t_2} L(t + \delta t, q_i^{(s)} + \delta q_i^{(s)}) \left( 1 + \frac{d(\delta t)}{dt} \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_i^{(s)}) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( L \frac{d(\delta t)}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \frac{\partial L}{\partial q_i^{(s)}} \delta q_i^{(s)}(t) \right) dt, \end{aligned}$$

habiendo reemplazado la Lagrangiana  $L(t + \delta t, q^{(s)} + \delta q^{(s)})$ , por su desarrollo Taylor a primer orden en las variaciones  $\delta t$  y  $\delta q^{(s)}$ .

En la variación de  $\delta q_i^{(s)}(t) = q_i^{(s)}(t') - q_i^{(s)}(t)$  está contenida una variación en la forma de la función  $q_i^{(s)}(t)$ , y una variación de su argumento  $t$ , (ver figura 1.2), el cual también es afectado por la transformación del grupo, y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \delta q_i^{(s)} &= q_i^{(s)}(t + \delta t) - q_i^{(s)}(t) = q_i^{(s)}(t) - q_i^{(s)}(t) + (dq_i^{(s)}(t)/dt)\delta t \\ &= \bar{\delta} q_i^{(s)}(t) + q_i^{(s+1)}(t)\delta t, \end{aligned}$$

donde  $\bar{\delta} q_i^{(s)}(t)$  es la variación en la forma de la función  $q_i^{(s)}(t)$  en el instante  $t$ . Sabiendo que para la variación de forma a  $t$  constante

$$\bar{\delta} q_i^{(s)}(t) = d^s(\bar{\delta} q_i(t))/dt^s = d(\bar{\delta} q_i^{(s-1)}(t))/dt,$$

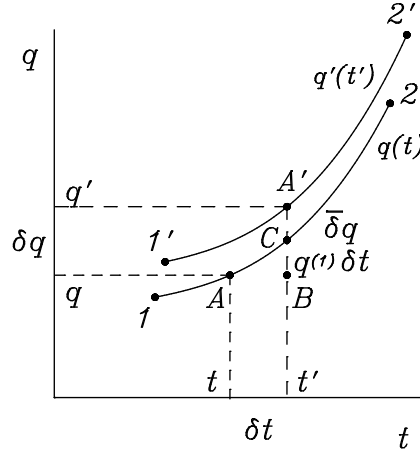


Figura 1.2: Transformación del punto  $A$  en el  $A'$ , y de la curva  $q(t)$  en la  $q'(t)$  bajo una transformación infinitesimal. La variación  $\delta q = q'(t') - q(t) = BA'$  es la suma de la parte  $BC = q^{(1)}\delta t$  y la parte  $CA' = \bar{\delta}q$ , que es la variación a  $t$  constante de la función  $q$ , y que aquí la denominamos la variación en forma de la función.

resulta que

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A}[q] &= \int_{t_1}^{t_2} \left( L \frac{d(\delta t)}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \frac{\partial L}{\partial q_i^{(s)}} \bar{\delta}q_i^{(s)}(t) + \frac{\partial L}{\partial q_i^{(s)}} q_i^{(s+1)} \delta t \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{d(L\delta t)}{dt} + \frac{\partial L}{\partial q_i^{(s)}} \bar{\delta}q_i^{(s)}(t) \right) dt. \end{aligned} \quad (1.22)$$

donde el primer término es la suma del primero, segundo y cuarto de la integral anterior.

Si reemplazamos en los últimos términos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_i} \bar{\delta}q_i &= \frac{\partial L}{\partial q_i} \bar{\delta}q_i, \\ \frac{\partial L}{\partial q_i^{(1)}} \bar{\delta}q_i^{(1)} &= \frac{\partial L}{\partial q_i^{(1)}} \frac{d(\bar{\delta}q_i)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^{(1)}} \bar{\delta}q_i \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^{(1)}} \right) \bar{\delta}q_i, \\ \frac{\partial L}{\partial q_i^{(2)}} \bar{\delta}q_i^{(2)} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^{(2)}} \bar{\delta}q_i^{(1)} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^{(2)}} \right) \bar{\delta}q_i^{(1)} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^{(2)}} \bar{\delta}q_i^{(1)} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^{(2)}} \right) \bar{\delta}q_i \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^{(2)}} \right) \bar{\delta}q_i, \\ \frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \bar{\delta}q_i^{(k)} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \bar{\delta}q_i^{(k-1)} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \right) \bar{\delta}q_i^{(k-2)} \right) + \dots + (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \right) \bar{\delta}q_i, \end{aligned}$$

y juntando términos, obtenemos

$$\delta\mathcal{A}[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{d(L\delta t)}{dt} + \right.$$

$$+\bar{\delta}q_i \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i^{(1)}} \right) + \cdots + (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \right) \right] \quad (1.23)$$

$$+\frac{d}{dt} \left( \bar{\delta}q_i \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i^{(1)}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i^{(2)}} \right) + \cdots + (-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \right) \right] \right) \quad (1.24)$$

$$+\frac{d}{dt} \left( \bar{\delta}q_i^{(1)} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i^{(2)}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i^{(3)}} \right) + \cdots + (-1)^{k-2} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \right) \right] \right) \quad (1.25)$$

$$+\cdots + \frac{d}{dt} \left( \bar{\delta}q_i^{(k-1)} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \right] \right) \}. \quad (1.26)$$

Los términos entre paréntesis cuadrados [ ... ], (1.24-1.26) reciben el nombre de **momentos canónico-conjugados**  $p_{i(s)}$ , excepto el primero (1.23), que es el miembro de la izquierda de las ecuaciones de Euler-lagrange (1.4) y que se anula idénticamente si las funciones  $q_i$  satisfacen las ecuaciones dinámicas. El integrando de la variación del funcional acción queda escrito, salvo el término (1.23), en una suma de términos que son derivadas totales con respecto a  $t$ .

**Momentos canónico-conjugados:** Para sistemas Lagrangianos ordinarios que dependen únicamente de derivadas de primer orden, el momento canónico-conjugado de la variable generalizada  $q_i$  es una variable dinámica  $p_i$ , definida por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

Como generalización de esto, para sistemas Lagrangianos con derivadas de orden superior, el formalismo canónico generalizado se obtiene definiendo como variables generalizadas los grados de libertad  $q_i$  y sus derivadas temporales  $q_i^{(s)}$  hasta el orden  $k-1$ , es decir las variables generalizadas son todas las variables cinemáticas excluido el tiempo. Entonces cada variable generalizada posee un momento canónico conjugado definido de acuerdo con los paréntesis cuadrados anteriores:<sup>16</sup>

$$p_{i(1)} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i^{(1)}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i^{(2)}} \right) + \cdots + (-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \right) \quad (1.27)$$

$$p_{i(2)} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i^{(2)}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i^{(3)}} \right) + \cdots + (-1)^{k-2} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \right) \quad (1.28)$$

$$\dots$$

$$p_{i(k)} = \frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \quad (1.29)$$

Se dice que  $p_{i(s)}$  es el momento conjugado de la variable  $q_i^{(s-1)}$  y como regla general se ve que en su definición, el primer término contiene la derivada parcial de  $L$  con respecto a  $q_i^{(s)}$ , es decir a la primera derivada temporal de la correspondiente variable generalizada canónico conjugada  $q_i^{(s-1)}$ . Se puede ver de su definición que estos momentos satisfacen

$$p_{i(s)} - \frac{\partial L}{\partial q_i^{(s)}} = -\frac{dp_{i(s+1)}}{dt}, \quad i = 1, \dots, n, \quad s = 1, \dots, k-1. \quad (1.30)$$

Con esta definición de los momentos canónicos, las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.4) se escriben:

$$\frac{dp_{i(1)}}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.31)$$

De esta manera, si la Lagrangiana no es función explícita de algún grado de libertad  $q_i$ , entonces el correspondiente momento canónico conjugado  $p_{i(1)}$ , es una constante del movimiento.

Si introducimos en el integrando las variables  $q_i$  que satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange, el término (1.23) es idénticamente nulo y la variación del funcional acción (1.22) se

<sup>16</sup> E.T.Whittaker, *Analytical Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge (1927), p. 265.



transforma en la variación de la función acción a lo largo de la trayectoria clásica, y por lo tanto, la variación de la función acción queda escrita como la integral de una derivada total,

$$\delta A(x_1, x_2) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left\{ L\delta t + \left( \bar{\delta}q_i p_{i(1)} + \bar{\delta}q_i^{(1)} p_{i(2)} + \cdots + \bar{\delta}q_i^{(k-1)} p_{i(k)} \right) \right\} dt, \quad (1.32)$$

donde los  $p_{i(s)}$  están dados en (1.27-1.29). Si reemplazamos en (1.32) la variación en forma  $\bar{\delta}q_i^{(s)} = \delta q_i^{(s)} - q_i^{(s+1)}\delta t$ , entonces

$$\delta A(x_1, x_2) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left\{ L\delta t + \delta q_i^{(s-1)} p_{i(s)} - q_i^{(s)} p_{i(s)} \delta t \right\} dt \quad (1.33)$$

con el criterio habitual de suma sobre índices repetidos. Si sustituimos las variaciones  $\delta t = M_0 \delta g$  y  $\delta q_i^{(s)} = M_i^{(s)} \delta g$ , en términos del elemento infinitesimal del grupo  $\delta g$ , (1.18-1.21), obtenemos:

$$\delta A(x_1, x_2) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left\{ \left( L - p_{i(s)} q_i^{(s)} \right) M_0 + p_{i(s)} M_i^{(s-1)} \right\} \delta g dt, \quad (1.34)$$

donde el rango de suma para cada índice repetido es,  $i = 1, \dots, n$ ,  $s = 1, \dots, k$ , y donde el parámetro infinitesimal del grupo  $\delta g$  se puede sacar fuera de la integral.

Como en la integral anterior estamos usando una solución de las ecuaciones dinámicas, las cuales son invariantes bajo la transformación, la variación de la función acción

$$\delta A(x_1, x_2) = A(\delta g x_1, \delta g x_2) - A(x_1, x_2),$$

es tal que a primer orden en el parámetro infinitesimal del grupo la podemos poner como

$$\delta A(x_1, x_2) = \lambda(x_2) \delta g - \lambda(x_1) \delta g, \quad (1.35)$$

que es equivalente a que la Lagrangiana transforme bajo una transformación infinitesimal como

$$\tilde{L}(\delta g x, \delta g \dot{x}) = \tilde{L}(x, \dot{x}) + \delta g \frac{d\lambda(x)}{d\tau},$$

que implica que las ecuaciones dinámicas son invariantes. Igualando (1.35) a (1.34) podemos realizar la integral temporal de (1.34) que se reduce al término entre corchetes evaluado en  $t_2$  menos él mismo evaluado en  $t_1$ . El valor del parámetro  $\delta g$  del grupo se cancela en ambos miembros, y reagrupando los términos que dependen de  $t_1$  a la izquierda y los de  $t_2$  derecha, obtenemos un observable que toma los mismos valores en los dos instantes arbitrarios  $t_1$  y  $t_2$ . Es, por lo tanto, una constante del movimiento y representa la magnitud física conservada

$$N = \lambda(x) - \left( L - p_{i(s)} q_i^{(s)} \right) M_0(t, q) - p_{i(s)} M_i^{(s-1)}(t, q, \dots, q^{(s)}). \quad (1.36)$$

El término entre paréntesis  $H = p_{i(s)} q_i^{(s)} - L$ , suma de los productos de cada momento por la derivada temporal de la correspondiente variable generalizada canónico conjugada menos la Lagrangiana, recibe el nombre de **Hamiltoniano generalizado**, de tal manera que finalmente

$$N = \lambda(x) + H M_0(t, q) - p_{i(s)} M_i^{(s-1)}(t, q, \dots, q^{(s)}). \quad (1.37)$$

Si el grupo de simetrías tiene  $r$  parámetros, existen  $r$  constantes del movimiento relacionadas con las transformaciones infinitesimales (1.35) de la función acción bajo el correspondiente grupo de Lie de  $r$  parámetros.

La expresión (1.37) es una **función lineal** en el Hamiltoniano y los momentos canónicos donde los coeficientes, además de la función  $\lambda(x)$  asociada a la no invariancia de la Lagrangiana,

son funciones de las variables cinemáticas. Si consideramos que el Hamiltoniano fuera el momento conjugado de la variable tiempo, aparece en cada término el correspondiente momento multiplicado por la forma infinitesimal de transformar la correspondiente variable cinemática canónica conjugada,  $\delta t = \delta g M_0$ ,  $\delta q_i^{(s)} = \delta g M_i^{(s)}$ ,  $s = 0, 1, \dots, k-1$ , desde  $t$  hasta la  $q_i^{(k-1)}$ . La única diferencia es que el término del Hamiltoniano aparece afectado por el signo +, en tanto que el resto de los  $p_i$  aparecen con signo  $-$ . Tendríamos tantos momentos canónicos como variables cinemáticas.

Como  $\lambda(x)\delta g$  tiene dimensiones de acción, todos los términos de (1.37) tienen las mismas dimensiones que  $\lambda(x)$  y por lo tanto **las constantes del movimiento Noetherianas tienen la dimensión complementaria frente a la acción, de la dimensión del parámetro  $\delta g$  del grupo de simetrías.**

El Hamiltoniano y los diferentes momentos se escriben en términos de las funciones  $F_i(x, \dot{x})$  del desarrollo (1.8) de la Lagrangiana y de sus derivadas temporales, como vemos en este ejemplo.

Por ejemplo, si tenemos una Lagrangiana que depende hasta la derivada segunda de un grado de libertad  $r$ ,  $L(t, r, dr/dt, d^2r/dt^2) \equiv L(t, r, u, a)$ , y la  $\tilde{L}(t, r, u, \dot{t}, \dot{r}, \dot{u})$ . La Lagrangiana  $\tilde{L}$  se puede escribir

$$\tilde{L} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i = F_i(x, \dot{x}) \dot{x}_i = T\dot{t} + R\dot{r} + U\dot{u},$$

donde las funciones  $T = \partial \tilde{L} / \partial \dot{t}$ ,  $R = \partial \tilde{L} / \partial \dot{r}$  y  $U = \partial \tilde{L} / \partial \dot{u}$ , son funciones homogéneas de grado cero de las derivadas  $\dot{x}_i$ , y por lo tanto son funciones de  $(t, r, u, a)$ . Las variables cinemáticas son,  $x \equiv \{t, r, u\}$  y las variables generalizadas son  $q \equiv \{r, u\}$  por lo que hay un momento canónico conjugado de  $r$ ,  $p_r$  y otro  $p_u$  el canónico conjugado de  $u$ . Vemos que:

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \frac{\partial(\tilde{L}/\dot{t})}{\partial \dot{r}} \frac{\partial \dot{r}}{\partial u} = \frac{1}{\dot{t}} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{r}} \dot{t} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{r}} = R$$

ya que  $\dot{r} = u\dot{t}$ . Análogamente

$$\frac{\partial L}{\partial a} = \frac{\partial(\tilde{L}/\dot{t})}{\partial \dot{u}} \frac{\partial \dot{u}}{\partial a} = \frac{1}{\dot{t}} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{u}} \dot{t} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{u}} = U$$

pues  $\dot{u} = a\dot{t}$ .

El momento  $p_r$  se define de acuerdo con (1.27-1.29) como

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial a} \right) = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{u}} \right) = R - \frac{dU}{dt},$$

y el momento  $p_u$

$$p_u = \frac{\partial L}{\partial a} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{u}} = U,$$

que han quedado expresados en términos de las funciones  $F_i(x, \dot{x})$  y de sus derivadas temporales. La Lagrangiana

$$L = \tilde{L}/\dot{t} = T + Ru + Ua,$$

y el Hamiltoniano generalizado

$$H = p_r u + p_u a - L = Ru - \frac{dU}{dt} u + Ua - T - Ru - Ua = -T - \frac{dU}{dt} u.$$

Los observables  $H$  y  $p_{i(s)}$  son funciones homogéneas de grado cero en las derivadas de las variables cinemáticas  $\dot{x}^i$ . Las funciones  $\lambda(x)$  y  $M_i^{(s)}(x)$  dependen únicamente de las variables cinemáticas. En consecuencia, las constantes del movimiento Noetherianas son funciones homogéneas de grado cero en las derivadas de las variables cinemáticas y por lo tanto invariantes bajo cambios arbitrarios del parámetro de evolución. Son funciones de las derivadas temporales de los grados de libertad.

## 1.5. Principio atómico: Partículas elementales

En mecánica Newtoniana el sistema más simple es un punto de masa  $m$ . A partir de puntos masivos se pueden construir sistemas arbitrarios de cualquier forma y masa, y por lo tanto cualquier distribución arbitraria de materia. El punto masivo se puede considerar como la partícula elemental de la mecánica Newtoniana. Desde el punto de vista actual de la física de partículas corresponde a la descripción clásica de una partícula sin espín. Sabemos que existen objetos como electrones, muones, fotones, neutrinos, quarks y muchos otros, que pueden ser considerados como partículas elementales en el sentido de que no parecen estar compuestos de otros objetos. Más aún, no se ha encontrado en la naturaleza ninguna partícula elemental sin espín. Es claro que el punto Newtoniano no da cuenta de la estructura clásica del espín y la existencia del espín es un atributo fundamental de una partícula elemental, que no aparece en los objetos elementales de la mecánica Newtoniana, por lo que es necesario describirlo adecuadamente.

En mecánica cuántica, el trabajo de Wigner<sup>17</sup> sobre las representaciones del grupo de Lorentz inhomógeno suministra una definición matemática muy precisa del concepto de partícula elemental. Una **partícula elemental** es un sistema cuántico cuyo espacio de Hilbert de estados puros, es el espacio de una representación unitaria, proyectiva e **irreducible** del grupo de Poincaré. Las representaciones irreducibles del grupo de Poincaré se caracterizan por dos parámetros invariantes  $m$  y  $S$ , la masa y el espín del sistema, respectivamente. Analizando las diferentes representaciones irreducibles, podremos obtener la descripción de partículas con o sin masa y de cualquier valor del espín.

La idea de irreducibilidad de Wigner lo que viene a decir es que todos los posibles estados vectoriales puros se pueden construir, dentro del formalismo cuántico, a partir de uno cualquiera de ellos. Comenzando en un estado cualquiera descrito por un observador inercial y añadiéndole las descripciones que de ese estado hacen el resto de los observadores inerciales, y efectuando las operaciones habituales de suma de vectores y de límites de sucesiones, se completa todo el espacio de Hilbert. Aquí está patente la idea del principio atómico. No hay más estados que las modificaciones cinemáticas de uno cualquiera de ellos. Si la partícula elemental cambia de estado, siempre es posible encontrar otro observador inercial que la describa en el mismo estado que anteriormente.

En la formulación Lagrangiana, si preparamos a la partícula elemental en el estado  $x_1$  para evolucionar hasta el estado  $x_2$ , aceptado el Principio de Relatividad Restringido, el estado final y cualquier estado intermedio, se puede siempre obtener del estado inicial mediante un cambio de observador inercial, es decir  $x_2 = gx_1$ , para algún elemento  $g$  del grupo cinemático  $G$ . Esto no es posible en un sistema arbitrario. Esto es lo que distingue a un sistema elemental de uno que no lo es, que la variedad  $X$ , el espacio cinemático debe cumplir esta restricción, que, dados dos puntos cualesquiera del mismo, siempre es posible encontrar alguna transformación cinemática que los ligue. Llegamos pues al<sup>18</sup>

**Principio atómico:** *Una partícula elemental clásica es un sistema Lagrangiano cuyo espacio cinemático  $X$  es un espacio homogéneo del grupo cinemático  $G$ .*

Los grupos de Galileo y de Poincaré son grupos de Lie de diez parámetros y por lo tanto los espacios homogéneos más amplios que podemos encontrar en ellos son de dimensión 10. Además, las variables que definen a los espacios homogéneos comparten con los parámetros del grupo sus mismos dominios, su dimensionalidad y su significación geométrica. Ambos grupos, como veremos más adelante, se pueden parametrizar en términos de 10 variables  $(b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha})$  con los siguientes dominios y dimensiones,  $b \in \mathbb{R}$  representa un parámetro con dimensiones de tiempo

<sup>17</sup> E.P. Wigner, *Ann. Math.* **40**, 149 (1939)

<sup>18</sup> M. Rivas, *J. Phys. A* **18**, 1971 (1985); *J. Math. Phys.* **30**, 318 (1989); *J. Math. Phys.* **35**, 3380 (1994).

que nos caracteriza la traslación temporal,  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ , 3 variables espaciales que caracterizan a las traslaciones espaciales. El parámetro  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  con dimensiones de velocidad y que representa la velocidad relativa entre observadores, restringida a  $v < c$  en el caso Poincaré. Finalmente  $\boldsymbol{\alpha} \in SO(3)$  son tres parámetros adimensionales que caracterizan la orientación relativa entre los correspondientes sistemas cartesianos de referencia y que pertenecen a un dominio compacto, que es una parametrización del grupo de rotaciones.

De esta forma, el máximo número de variables cinemáticas, para caracterizar el estado cinemático de una partícula elemental, será 10. Representamos estas variables cinemáticas por  $x \equiv (t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha})$  con los mismos dominios y dimensiones que los anteriores parámetros, y que los interpretamos geoméricamente como **tiempo**  $t$ , **posición**  $\mathbf{r}$ , **velocidad**  $\mathbf{u}$  del punto  $\mathbf{r}$  y **orientación**  $\boldsymbol{\alpha}$  de la partícula.

Como la Lagrangiana debe depender también de las siguientes derivadas temporales, llegamos a la conclusión de que  $L$  debe depender de la aceleración del punto  $\mathbf{r}$  y de la velocidad angular de la partícula. Es por lo tanto, un sistema de 6 grados de libertad. Tres  $\mathbf{r}$ , representan la posición de un punto y los otros tres  $\boldsymbol{\alpha}$ , su orientación en el espacio. Podemos visualizarlo mediante tres vectores unidad ortogonales ligados al punto  $\mathbf{r}$ , como un sistema cartesiano comóvil. Pero la Lagrangiana debe depender hasta la derivada segunda de  $\mathbf{r}$ , es decir de la aceleración del punto, y hasta la primera derivada de  $\boldsymbol{\alpha}$ , es decir, la velocidad angular. Los grupos de Galileo y Poincaré conducen a Lagrangianas generalizadas que dependen de derivadas de segundo orden de la posición de un punto.

Debido a esta definición, es el grupo cinemático  $G$ , asociado al Principio de Relatividad Restringido el que determina completamente el espacio cinemático de una partícula elemental, sobre el que se van a definir las posibles Lagrangianas. Las partículas puntuales son casos particulares de esta definición ya que su espacio cinemático es el generado por las variables  $(t, \mathbf{r})$ , tiempo y posición. Dados dos puntos cualesquiera  $(t_1, \mathbf{r}_1)$  y  $(t_2, \mathbf{r}_2)$ , con  $t_2 > t_1$ , una traslación espacio-temporal los liga, por lo que esta variedad es un espacio homogéneo tanto del grupo de Galileo como del grupo de Poincaré, ya que las traslaciones son un subgrupo de ambos grupos.

Cuanto más amplio sea el grupo cinemático, mayor número de variables tendremos para caracterizar las posibles variables clásicas que definen el espacio cinemático de una partícula elemental. De esta manera, el formalismo que se propone se puede acomodar a cualquier grupo de simetrías. Solamente hace falta dar con el grupo adecuado, que no solamente define las simetrías sino que suministra las variables clásicas de los sistemas elementales. Este grupo está todavía sin ser desvelado.

**Ejemplo: Partícula puntual Galileana.** Es un sistema mecánico de 3 grados de libertad,  $\mathbf{r}$ , la posición del punto. Posee por lo tanto 4 variables cinemáticas,  $x \equiv \{t, \mathbf{r}\}$ . Si definimos el estado inicial por  $x_1 \equiv \{t_1, \mathbf{r}_1\}$  y el estado final por  $x_2 \equiv \{t_2, \mathbf{r}_2\}$ , vemos que una traslación espacio-temporal transforma uno de los puntos en el otro, por lo que el espacio cinemático es un espacio homogéneo del grupo de Galileo. Describe por lo tanto a una partícula elemental. Por supuesto que el grupo de traslaciones también es subgrupo del grupo de Poincaré, por lo que la partícula puntual también es una partícula elemental desde el punto de vista relativista. Obtendremos en el capítulo siguiente que si la evolución es libre, esto es que las leyes dinámicas son invariantes bajo  $\mathcal{G}$ , la Lagrangiana resulta ser

$$L_0 = \frac{1}{2}m \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2, \quad \tilde{L}_0 = \frac{1}{2}m \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{t}$$

en términos de los grados de libertad y también como función homogénea de grado 1 en términos de las derivadas de las variables cinemáticas. Podemos ver que  $\tilde{L}_0$  depende de las derivadas de todas las variables cinemáticas. Las ecuaciones de Euler-Lagrange a partir de  $L_0$  se reducen a  $d^2\mathbf{r}/dt^2 = 0$ , e imponemos como condiciones de contorno que la solución pase por los estados inicial y final  $x_1$  y  $x_2$ , respectivamente,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1 + \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{t_2 - t_1}(t - t_1), \quad t \in [t_1, t_2]$$

y que si hacemos la descripción en términos de un parámetro arbitrario  $\tau$ , la solución queda:

$$t(\tau) = t_1 + (t_2 - t_1)(\tau - \tau_1)/(\tau_2 - \tau_1), \quad \mathbf{r}(\tau) = \mathbf{r}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)(\tau - \tau_1)/(\tau_2 - \tau_1), \quad \tau \in [\tau_1, \tau_2].$$

Si redefinimos el parámetro de evolución mediante  $\theta = (\tau - \tau_1)/(\tau_2 - \tau_1)$ , podemos tener un parámetro de evolución adimensional tal que los instantes inicial y final se corresponden con  $\theta_1 = 0$  y  $\theta_2 = 1$ , con lo que

$$t(\theta) = t_1 + (t_2 - t_1)\theta, \quad \mathbf{r}(\theta) = \mathbf{r}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\theta, \quad \theta \in [0, 1].$$

La función acción, es decir la integral de la Lagrangiana a lo largo del camino clásico vale

$$A(x_1, x_2) = \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{t_2 - t_1} \right)^2 dt = \frac{m}{2} \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2}{t_2 - t_1},$$

que finalmente se expresa en términos de las variables cinemáticas de los estados inicial y final y del único parámetro característico de la partícula elemental sin espín, que es la masa  $m$ .

La Lagrangiana  $\tilde{L}_0$  se puede obtener de la función acción mediante el proceso de límite (1.10) derivándola con respecto a las variables  $t_2$  y  $\mathbf{r}_2$  y haciendo el límite  $2 \rightarrow 1$ ,

$$\lim_{2 \rightarrow 1} \left[ \frac{\partial A}{\partial t_2} \dot{t} + \frac{\partial A}{\partial \mathbf{r}_{2i}} \dot{r}_{2i} \right] = \frac{m}{2} \lim_{2 \rightarrow 1} \left[ -\frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2}{(t_2 - t_1)^2} \dot{t} + 2 \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \dot{\mathbf{r}}}{t_2 - t_1} \right] = \frac{m}{2} \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{\dot{t}} = \tilde{L}_0.$$

El teorema de Noether nos va a llevar a que la energía y el momento lineal se expresen en términos de las derivadas de la  $\tilde{L}_0$ , en la forma:

$$H = -\frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial \dot{t}} = \frac{1}{2} m \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{\dot{t}^2} = \frac{m}{2} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2, \quad \mathbf{p} = \frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\dot{t}} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

funciones homogéneas de grado cero en términos de las derivadas de las variables cinemáticas, y por lo tanto dependientes de las derivadas temporales de los grados de libertad. El resultado es que las magnitudes conservadas son independientes del parámetro arbitrario de evolución  $\tau$ .

Esta Lagrangiana es una función homogénea de grado 1 en las derivadas  $\dot{t}$  y  $\dot{\mathbf{r}}$ , lo que nos permite ponerla como una suma de tantos términos como variables cinemáticas:

$$\tilde{L}_0 = \frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial \dot{t}} \dot{t} + \frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \dot{r}_i = -H \dot{t} + \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}}.$$

**Ejemplo: Sistema no elemental.** Supongamos un sistema material que viene caracterizado por las siguientes variables cinemáticas:  $(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ , es decir el tiempo y la posición de dos puntos. Si doy dos conjuntos de esos valores en los puntos extremos de la evolución  $x_1 \equiv (t(\tau_1), \mathbf{r}_1(\tau_1), \mathbf{r}_2(\tau_1))$  y  $x_2 \equiv (t(\tau_2), \mathbf{r}_1(\tau_2), \mathbf{r}_2(\tau_2))$ , no es posible encontrar un cambio de sistema de referencia inercial que los ligue, ya que si la traslación temporal nos lleva  $t(\tau_1)$  a  $t(\tau_2)$  y la traslación espacial desplaza  $\mathbf{r}_1(\tau_1)$  a  $\mathbf{r}_1(\tau_2)$ , es imposible, en general, que traslade  $\mathbf{r}_2(\tau_1)$  a  $\mathbf{r}_2(\tau_2)$ , salvo que estuvieran rígidamente ligados con  $\mathbf{r}_1$ . El espacio cinemático no es un espacio homogéneo ni siquiera del grupo de traslaciones. Este sistema de 6 grados de libertad no puede ser considerado como una partícula elemental.

### 1.5.1. Aplicación del formalismo a grupos cinemáticos sencillos

Supongamos que admitimos que las leyes de la física son solamente invariantes por traslación espacio-temporal. Esto equivale a que el grupo cinemático asociado al Principio de Relatividad Restringido  $G$ , es el grupo de traslaciones espacio-temporales  $\{\mathbb{R}^4, +\}$ , dependiente de cuatro parámetros:

$$t' = t + b, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}.$$

En este caso, el espacio homogéneo más amplio de  $G$  que podemos establecer es el propio  $G$ , por lo que las posibles variables cinemáticas son  $(t, \mathbf{r})$ , tantas como los parámetros  $b$  y  $\mathbf{a}$  del grupo y con sus mismas dimensiones y dominios. Estamos describiendo la partícula puntual localizada en  $\mathbf{r}$ . Como solamente poseemos como simetrías las traslaciones, el teorema de Noether solamente nos produce la definición de los observables  $H$  y  $\mathbf{P}$ , momento temporal y momento lineal,

respectivamente, y la conservación del momento angular no queda descrita para esta partícula. La Lagrangiana que describa este sistema será función de  $(t, \mathbf{r}, \mathbf{u})$ , siendo  $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$  la velocidad del punto  $\mathbf{r}$ .

Complicuemos un poco el grupo y admitamos que las leyes de la física son también invariantes por rotación de los sistemas de referencia. Entonces el grupo  $G$  viene dado por

$$t' = t + b, \quad \mathbf{r}' = R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{r} + \mathbf{a},$$

dependiente de siete parámetros. El espacio homogéneo más amplio será el propio grupo y tendremos como variables cinemáticas a  $(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha})$ , tantas como los parámetros del grupo y diremos que la partícula elemental, además de estar localizada en el punto  $\mathbf{r}$ , posee una orientación descrita por las variables  $\boldsymbol{\alpha}$ . La Lagrangiana que describa este sistema será función de  $(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\omega})$ , dependerá, además de la velocidad del punto  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$ , de la velocidad de cambio de la orientación, o velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$ . Para este tipo de partícula, el teorema de Noether ya nos brinda la definición de momento angular, al tener un grupo cinemático más amplio. Estamos describiendo algo formalmente equivalente a un sólido rígido, pero sin especificar ni forma ni tamaño.

El siguiente paso, que vamos a desarrollar en más detalle, es considerar que el grupo cinemático también contiene transformaciones inerciales puras con desplazamiento relativo entre observadores con velocidad constante (boosts). Introducimos en el grupo tres nuevos parámetros de velocidad  $\mathbf{v}$ , y por lo tanto podremos usar tres variables de velocidad como variables cinemáticas. La Lagrangiana dependerá también de la derivada de la velocidad. Además, el teorema de Noether nos producirá la definición de otro observable, el momento cinemático. Analizaremos más adelante las dos posibilidades de usar bien el grupo de Galileo  $\mathcal{G}$  o el de Poincaré  $\mathcal{P}$ .

## 1.6. Estructura métrica del espacio cinemático

La variedad  $X$ , el espacio cinemático o espacio de estados de los sistemas dinámicos Lagrangianos, posee una estructura métrica. Es un espacio de Finsler en el que la métrica no solamente es función del punto  $x$  sino que depende también de la derivada  $\dot{x}$ . En efecto, como  $\tilde{L}(x, \dot{x})$  es una función homogénea de grado 1 en términos de las variables  $\dot{x}^i$ , resulta que  $\tilde{L}^2$  es una función homogénea de grado 2 de las variables  $\dot{x}^i$ . Si reemplazamos  $\dot{x}^i$  por  $\lambda\dot{x}^i \equiv y^i$ ,  $\tilde{L}^2(x, \lambda\dot{x}) = \tilde{L}^2(x, y) = \lambda^2\tilde{L}^2(x, \dot{x})$ . Si derivamos dos veces con respecto a  $\lambda$  y hacemos luego  $\lambda = 1$ ,

$$2\lambda\tilde{L}^2 = \frac{\partial\tilde{L}^2}{\partial y^i}\dot{x}^i, \quad 2\tilde{L}^2 = \frac{\partial^2\tilde{L}^2}{\partial y^i\partial y^j}\dot{x}^i\dot{x}^j \Big|_{\lambda=1}$$

Por lo tanto puede escribirse como

$$\tilde{L}^2 = g_{ij}(x, \dot{x})\dot{x}^i\dot{x}^j, \quad g_{ij}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2\tilde{L}^2}{\partial\dot{x}^i\partial\dot{x}^j} = g_{ji}$$

donde las funciones  $g_{ij}(x, \dot{x})$  son homogéneas de grado cero en las  $\dot{x}^i$  y por lo tanto involucran solamente derivadas temporales. Pero además de depender del punto  $x$ , son funciones de las  $\dot{x}$ . Un espacio métrico en el que la métrica es también función de las derivadas de las variables del espacio recibe el nombre de **espacio de Finsler**(1934)<sup>19</sup> <sup>20</sup>.

<sup>19</sup>P. Finsler, *Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen*. Dissertation, Göttingen 1918.; G.S. Asanov, *Finsler geometry, Relativity and Gauge theories*, (Reidel Pub. Co, Dordrecht 1985); H. Rund, *The Hamilton-Jacobi theory in the calculus of variations*, (Krieger Pub. Co., N.Y 1973). H. Rund, *The differential geometry of Finsler spaces*, (Springer, Berlin, 1959).



<sup>20</sup> **Paul Finsler** Nacido el 11 Abril 1894 en Heilbronn, Neckar, Alemania, y fallecido en Zurich, Suiza, el 29 de Abril de 1970. Se dedicó a la geometría diferencial y a la teoría de conjuntos.

Como  $\pm\tilde{L} = \pm\sqrt{\tilde{L}^2}$ , el problema variacional en el espacio cinemático  $X$  se reescribe

$$\begin{aligned} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{L}(x, \dot{x}) d\tau &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\tilde{L}^2(x, \dot{x})} d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{g_{ij}(x, \dot{x}) \dot{x}^i \dot{x}^j} d\tau = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{g_{ij}(x, \dot{x}) dx^i dx^j} = \int_{x_1}^{x_2} ds, \end{aligned}$$

pudiendo interpretar  $ds$  como el diferencial de arco de la curva que une los puntos extremos de la evolución en el espacio cinemático  $X$ . Al postular que la distancia que recorre el sistema dinámico en el espacio  $X$  entre  $x_1$  y  $x_2$  debe ser mínima, estamos transformando el problema variacional de hacer extremal la acción del sistema mecánico en un problema geodésico en un espacio métrico. La evolución de todo sistema dinámico entre los estados inicial  $x_1$  y final  $x_2$ , sigue una geodésica del espacio  $X$ . Y esto es independiente de que el sistema dinámico sea un sistema arbitrario o sea una partícula elemental. Incluso en este caso, es independiente de que la partícula sea libre o esté sometida a una interacción. Lo que sucede es que entre una partícula libre y otra en interacción, la Lagrangiana, y por lo tanto la métrica, son distintas, es decir, **toda interacción modifica la métrica del espacio cinemático de la partícula libre**.

Si utilizamos transformaciones del espacio cinemático que dejan invariante a la Lagrangiana, entonces, bajo estas transformaciones, las magnitudes  $g_{ij}$  transforman como las componentes covariantes de un tensor simétrico de dos índices.

Dadas las ecuaciones de Euler-Lagrange de un sistema dinámico, el problema variacional implica que debemos buscar soluciones de estas ecuaciones que pasen por los puntos extremos  $x_1$  y  $x_2$ . Esto, en general, no tiene por qué poseer solución para puntos arbitrarios. Si preparamos al sistema en el punto  $x_1$ , diremos que el punto  $x_2$  está **causalmente conectado** con  $x_1$ , si las ecuaciones de Euler-Lagrange entre esos puntos poseen solución. En caso contrario diremos que están causalmente desconectados y no podemos llevar, por evolución dinámica, el sistema del estado  $x_1$  al estado  $x_2$ . Como  $\tilde{L}^2 > 0$ , la métrica del espacio es definida positiva entre los estados causalmente conectados, por lo que en la variedad  $X$  si entre dos puntos infinitesimalmente próximos y para velocidades adecuadas no se satisface que entre ellos  $g_{ij}(x, \dot{x}) dx^i dx^j > 0$ , entonces no es posible que estén conectados causalmente y por lo tanto la evolución entre ellos no está permitida.

Para la partícula puntual relativista libre de masa  $m$ , la Lagrangiana se escribe

$$\tilde{L}_0 = \pm mc \sqrt{\dot{x}_0^2 - \dot{\mathbf{r}}^2}, \quad x_0 = ct.$$

Si reescalamos  $\tilde{L}_0$  dividiéndola por la constante  $mc$ , la Lagrangiana tiene ahora dimensiones de longitud donde claramente se ve que la métrica resulta ser  $g_{\mu\nu}^{(0)} = \eta_{\mu\nu}$ , la métrica de Minkowski, con  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Como  $\tilde{L}^2 > 0$  eso implica que para todo  $\tau$  se tiene que cumplir que

$$\tilde{L}^2 = g_{\mu\nu}^{(0)} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = c^2 \dot{t}^2 - \dot{\mathbf{r}}^2 > 0,$$

por lo que los puntos causalmente conectados son aquellos que se alcanzan a partir de uno dado con la condición de que la partícula se mueva con  $\mathbf{u}^2 = \dot{\mathbf{r}}^2/\dot{t}^2 < c^2$ , es decir  $u < c$ . Dado  $x_1$  los puntos causalmente conectados con él son los del interior de su cono de luz del futuro. El resto de los puntos del espacio cinemático (que en este caso se reduce al espacio-tiempo) están causalmente desconectados. Son los puntos del pasado, los de su cono de luz y aquellos que quedan fuera de éste. En esos casos  $\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \leq 0$ , y las ecuaciones de Euler-Lagrange no suministran solución física.

---

Consideraba que los conjuntos eran como números generalizados con los que se podían establecer técnicas aritméticas. Fue Elie Cartan quien en 1934, publica un libro titulado *Les espaces de Finsler*, donde denomina espacios de Finsler a los espacios métricos que estamos estudiando.

Dada la estructura general de la  $\tilde{L} = F_i(x, \dot{x})\dot{x}^i$ , con  $F_i = \partial\tilde{L}/\partial\dot{x}^i$ , es fácil ver que los coeficientes de la métrica se escriben como

$$g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{L}^2}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \left( \tilde{L} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^j} \right) = F_i F_j + \tilde{L} \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} = F_i F_j + \tilde{L} \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}^j}, \quad (1.38)$$

coeficientes que son simétricos en sus índices pues  $\partial F_i / \partial \dot{x}^j = \partial F_j / \partial \dot{x}^i$ .

Para la partícula puntual libre reescalada,

$$F_\mu = \frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{\dot{x}_\mu}{\tilde{L}_0}, \quad \frac{\partial F_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} = \frac{\eta_{\mu\nu}}{\tilde{L}_0} - \frac{\dot{x}_\mu \dot{x}_\nu}{\tilde{L}_0^3}$$

$$g_{\mu\nu} = F_\mu F_\nu + \tilde{L}_0 \frac{\partial F_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} = \frac{\dot{x}_\mu \dot{x}_\nu}{\tilde{L}_0^2} + \tilde{L}_0 \left( \frac{\eta_{\mu\nu}}{\tilde{L}_0} - \frac{\dot{x}_\mu \dot{x}_\nu}{\tilde{L}_0^3} \right) = \eta_{\mu\nu}$$

tanto para  $\tilde{L}_0$  como para  $-\tilde{L}_0$ .

En general, el espacio cinemático tendrá una métrica que será función de punto  $x$  si es que la Lagrangiana lo es, pero lo que siempre resultará es que es ineludible que sea función de las  $\dot{x}^i$ . En el caso de la partícula puntual relativista libre, la métrica no depende ni de  $x$  ni de  $\dot{x}$  como corresponde a un sistema libre en el que todos los puntos del espacio y todas las velocidades son equivalentes. Pero si introducimos una interacción, y la intensidad de la interacción depende de la velocidad, como en el caso de un campo magnético, la métrica va a dejar de ser constante y en general dependerá de la velocidad del punto.

### 1.6.1. Geodésicas en un espacio de Finsler

Las magnitudes  $\dot{x}^i$  transforman como las componentes contravariantes de un vector sobre  $X$ . Son las componentes del vector tangente a la trayectoria que sigue el punto característico del sistema dinámico en el espacio cinemático  $X$ . Si la Lagrangiana  $\tilde{L}$  es invariante bajo la transformación  $x \rightarrow x'$ ,  $\tilde{L}(x', \dot{x}') = \tilde{L}(x, \dot{x})$ , entonces las magnitudes  $F_i = \partial\tilde{L}/\partial\dot{x}^i$ , transforman como las componentes covariantes de un vector sobre  $X$ .

$$F_i(x, \dot{x}) = \frac{\partial \tilde{L}(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial \tilde{L}(x', \dot{x}')}{\partial \dot{x}'^j} \frac{\partial \dot{x}'^j}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial \dot{x}'^j}{\partial \dot{x}^i} F_j(x', \dot{x}').$$

Podemos definir las componentes covariantes del vector tangente con el uso del tensor métrico

$$\dot{x}_i = g_{ij} \dot{x}^j.$$

Como

$$\tilde{L} = \frac{\partial \tilde{L}(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i} \dot{x}^i, \quad \tilde{L}^2 = \tilde{L} \frac{\partial \tilde{L}(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i} \dot{x}^i = g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = \dot{x}_i \dot{x}^i, \quad \Rightarrow \dot{x}_i = g_{ij} \dot{x}^j = \tilde{L} \frac{\partial \tilde{L}(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i} = \tilde{L} F_i$$

con lo que  $\tilde{L}^2$  representa el valor absoluto al cuadrado del vector tangente a la trayectoria, y el vector

$$F_i = \frac{\partial \tilde{L}(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\dot{x}_i}{\tilde{L}}, \quad F_i F^i = 1,$$

representa al vector unidad tangente.

Si derivamos  $\dot{x}_i$  con respecto a  $\dot{x}^j$ , tenemos

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}^j} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j} \left( \tilde{L} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^i} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{L}^2}{\partial \dot{x}^i} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{L}^2}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} = g_{ij}.$$



Las ecuaciones geodésicas, son las ecuaciones de Euler-Lagrange, es decir

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^i} - \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^i} \right) = 0.$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^i} = \frac{1}{2\tilde{L}} \frac{\partial \tilde{L}^2}{\partial x^i} = \frac{1}{2\tilde{L}} \frac{\partial (g_{jk} \dot{x}^j \dot{x}^k)}{\partial x^i} = \frac{\dot{x}^j \dot{x}^k}{2\tilde{L}} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i},$$

y

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^i} = F_i = \frac{\dot{x}_i}{\tilde{L}} = \frac{1}{\tilde{L}} g_{ij} \dot{x}^j.$$

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^i} \right) = -\frac{1}{\tilde{L}^2} \frac{d\tilde{L}}{d\tau} g_{ij} \dot{x}^j + \frac{1}{\tilde{L}} \frac{dg_{ij}}{d\tau} \dot{x}^j + \frac{1}{\tilde{L}} g_{ij} \ddot{x}^j.$$

Por otra parte

$$\frac{dg_{ij}}{d\tau} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^k + \frac{\partial g_{ij}}{\partial \dot{x}^k} \ddot{x}^k, \quad \frac{1}{\tilde{L}^2} \frac{d\tilde{L}}{d\tau} = \frac{1}{\tilde{L}} \frac{d(\log \tilde{L})}{d\tau},$$

con lo que podemos eliminar las  $\tilde{L}$  de todos los denominadores, y si escogemos el parámetro de evolución como la longitud del arco,  $\tilde{L} = 1$  y  $\log \tilde{L} = 0$ , nos quedan las ecuaciones de las geodésicas

$$g_{ij} \ddot{x}^j = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \dot{x}^j \dot{x}^k - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^j \dot{x}^k - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \dot{x}^k} \dot{x}^j \ddot{x}^k. \quad (1.39)$$

Sin embargo el último término es nulo debido a la simetría del tensor métrico, pues

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \dot{x}^k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^3 \tilde{L}^2}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k} \right) = \frac{\partial g_{ik}}{\partial \dot{x}^j},$$

y al contraer con  $\dot{x}^j$ , resulta  $\partial g_{ik} / \partial \dot{x}^j \dot{x}^j = 0$ , pues el tensor  $g_{ij}$  es función homogénea de grado cero en las  $\dot{x}$ . Por otra parte, en el segundo término los índices  $j, k$  son mudos por lo que lo podemos escribir como

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^j \dot{x}^k = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \right) \dot{x}^j \dot{x}^k.$$

Las componentes contravariantes del tensor métrico se definen como habitualmente  $g^{li} g_{ij} = \delta_i^l$ . Si usamos este tensor, contrayendo en (1.39) con  $g^{li}$ , nos quedan en la forma

$$\ddot{x}^l + \Gamma_{jk}^l \dot{x}^j \dot{x}^k = 0, \quad (1.40)$$

con

$$\Gamma_{jk}^l = \frac{1}{2} g^{li} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right) = \Gamma_{kj}^l,$$

donde los símbolos de Christoffel Finslerianos se definen de la misma forma que en el caso Riemanniano en términos de las derivadas con respecto a las  $x$ , del tensor métrico. A diferencia del caso Riemanniano, son funciones de  $x$  y también de  $\dot{x}$ .

Una expresión alternativa de las ecuaciones de las geodésicas es

$$g_{ij} \ddot{x}^j = \Psi_{ikl} \dot{x}^k \dot{x}^l, \quad \Psi_{ikl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} \right) = \Psi_{ilk}. \quad (1.41)$$

El espacio cinemático  $X$  es, en general, un espacio de Finsler con torsión. El tensor de torsión de Cartan, es un tensor simétrico

$$C_{ijk} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial \dot{x}^k} = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^3 \tilde{L}^2}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k} \right),$$

en todos sus índices. Los espacios de Riemann son espacios sin torsión de Cartan, porque la métrica es independiente de las derivadas de las  $\dot{x}$ .

Postular, como hace la Relatividad General, que la gravedad produce una modificación de la métrica del espacio cinemático de la partícula puntual, esto es, del espacio-tiempo, en la que los coeficientes  $g_{ij}(x)$  resultan ser solamente funciones de punto, es establecer una restricción matemática fuerte sobre las posibles métricas, ya que éstas pueden, en general, ser funciones también de las  $\dot{x}$ . Por eso consideramos que en su estatus actual la Relatividad General es una especie de límite de baja velocidad de una teoría de la gravitación más general. La segunda restricción es que en la naturaleza no existen partículas elementales sin espín, por lo que la gravedad, lo que modificaría sería la métrica del espacio cinemático de la partícula elemental con espín, que resulta ser una variedad más amplia que el espacio-tiempo, como veremos a lo largo de este curso.

Como conclusión final, diríamos que la Relatividad General parece ser una teoría de la gravedad de materia sin espín, moviéndose a baja velocidad.<sup>21</sup>

### 1.6.2. Ejemplo: partícula puntual en un campo electromagnético

La partícula puntual de masa  $m$  y de carga  $e$  en presencia de un campo electromagnético externo viene descrita por  $\tilde{L} = \tilde{L}_0 + \tilde{L}_I$ , con  $\tilde{L}_0 = -p_\mu(\dot{x})\dot{x}^\mu = -H\dot{t} + \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}}$ ,  $\tilde{L}_I = -eA_\mu(x)\dot{x}^\mu$ , de manera que el problema variacional en el mismo espacio cinemático que la partícula libre, esto es el espacio-tiempo, es un problema geodésico con una métrica, en el caso relativista, dada por

$$g_{\mu\nu}(x, \dot{x}) = m^2 c^2 \eta_{\mu\nu} + e^2 A_\mu A_\nu + e(p_\mu A_\nu + p_\nu A_\mu) + e A_\sigma \dot{x}^\sigma \frac{\partial p_\mu}{\partial \dot{x}^\nu}. \quad (1.42)$$

La modificación de la métrica se anula cuando  $e \rightarrow 0$ . Como el tetramomento lineal mecánico  $p_\mu$  no depende explícitamente de las  $x$ , la dependencia de la métrica de las  $x$ , lo es a través de los campos externos  $A_\mu(x)$ . Pero depende de las variables  $\dot{x}$  a través de su dependencia de las  $p_\mu$  y de sus derivadas. En el límite de baja velocidad, cuando  $u/c \rightarrow 0$ ,  $p_0 = mc$  y  $p_i = 0$ , por lo que nos resulta una métrica Riemanniana, que reescalando  $\tilde{L}$  por un factor global  $mc$  y llamando  $k = e/mc$ ,  $\tilde{L}_I = -kA_\mu(x)\dot{x}^\mu$ ,

$$g_{00}(x) = 1 + k^2 A_0^2 + 2kA_0 = (1 + kA_0(x))^2, \quad g_{ii}(x) = -1 - kA_0(x) + k^2 A_i^2(x), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$g_{0i}(x) = kA_i(x) + k^2 A_0(x)A_i(x), \quad g_{ij}(x) = k^2 A_i(x)A_j(x), \quad i \neq j = 1, 2, 3.$$

Así, en el caso de un campo eléctrico uniforme,  $A_0 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{r}/c$ ,  $\mathbf{A} = 0$ , los coeficientes no nulos de la aproximación Riemanniana son  $g_{00} = (1 + e\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}/mc^2)^2$ ,  $g_{ii} = -(1 + e\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}/mc^2)$ . Si lo que tenemos es un campo magnético uniforme,  $A_0 = 0$ ,  $\mathbf{A} = (\mathbf{r} \times \mathbf{B})/2$ ,  $g_{00} = 1$ ,  $g_{ii} = -1 + (e(\mathbf{r} \times \mathbf{B})/2mc)_i^2$ ,  $g_{0i} = e(\mathbf{r} \times \mathbf{B})_i/2mc$  y finalmente  $g_{ij} = (e(\mathbf{r} \times \mathbf{B})/2mc)_i (e(\mathbf{r} \times \mathbf{B})/2mc)_j$ , con  $i \neq j$ . En una interacción en la que solamente tuviéramos una energía potencial, como en el caso habitual gravitatorio,  $mA_0 = mV(x)/c$ , y el  $g_{00} = (1 + V(x)/c^2)^2$ ,  $g_{ii} = -(1 + V(x)/c^2)$ , como veremos en los ejemplos analizados más adelante.

Las ecuaciones dinámicas las podemos determinar como las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenidas a partir de la Lagrangiana reescalada  $\tilde{L}$ . En el ejemplo de la partícula puntual cargada

$$\tilde{L} = -p_\mu \dot{x}^\mu - kA_\mu \dot{x}^\mu, \quad p_\mu = \frac{\dot{x}_\mu}{(\dot{x} \cdot \dot{x})^{1/2}}, \quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^\sigma} = -k \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\sigma} \dot{x}^\mu, \quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^\sigma} = -p_\sigma - kA_\sigma,$$

<sup>21</sup>M. Rivas, *Is General Relativity a simplified theory?* J. Phys:Conference Series **437** (2013) 012008.(ArXiv:1203.4076); *Is General Relativity a  $v/c \rightarrow 0$  limit of a Finsler geometry?* (Contribution to the Spanish Relativity Meeting 2012), Progress in Mathematical Relativity, Gravitation and Cosmology Guimaraes, Portugal Sept 3-7, 2012 Springer ISBN 978-3-642-40156-5.

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^\sigma} \right) = -\dot{p}_\sigma - k\dot{A}_\sigma = -\dot{p}_\sigma - k \frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\mu} \dot{x}^\mu, \quad F_{\sigma\mu}(x) = \partial_\sigma A_\mu - \partial_\mu A_\sigma = -F_{\mu\sigma}(x),$$

$$\dot{p}_\sigma = kF_{\sigma\mu}(x)\dot{x}^\mu, \quad \text{o bien} \quad \frac{\ddot{x}_\sigma}{(\dot{x} \cdot \dot{x})^{1/2}} - \frac{(\dot{x} \cdot \ddot{x})\dot{x}_\sigma}{(\dot{x} \cdot \dot{x})^{3/2}} = kF_{\sigma\mu}(x)\dot{x}^\mu$$

Si en un sistema de referencia inercial el observador fija el parámetro de evolución como el tiempo  $\tau = t$ , las ecuaciones dinámicas son

$$\frac{dH}{dt} = e\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = e(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}).$$

La primera de estas ecuaciones es consecuencia de la segunda y de que para una partícula elemental puntual  $H^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m^2 c^4$ , es un invariante. La segunda de las ecuaciones, para la posición del punto, se transforma en

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{e}{m\gamma(u)} \left[ \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{u}}{c^2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}) \right]$$

Otra forma alternativa es construir las ecuaciones de las geodésicas a partir de la métrica que se obtiene derivando dos veces la  $\tilde{L}^2$ . La métrica es

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + k^2 A_\mu A_\nu + \frac{k}{(\dot{x} \cdot \dot{x})^{1/2}} (\dot{x}_\mu A_\nu + \dot{x}_\nu A_\mu) + \frac{k(A \cdot \dot{x})}{(\dot{x} \cdot \dot{x})^{1/2}} \left( \eta_{\mu\nu} - \frac{\dot{x}_\mu \dot{x}_\nu}{(\dot{x} \cdot \dot{x})} \right)$$

$$g_{00} = 1 + k^2 A_0^2 + 2k\gamma(u)A_0 + k\gamma(1 - \gamma^2)(A_0 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}/c),$$

$$g_{ii} = -1 + k^2 A_i^2 + 2k\gamma(u)u_i A_i/c - k\gamma(u)(A_0 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}/c)(1 + \gamma^2 u_i^2/c^2)$$

$$g_{0i} = k^2 A_0 A_i - k\gamma(u)(A_i + A_0 u_i/c) + k\gamma^3 (A_0 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}/c) u_i/c,$$

$$g_{ij} = k^2 A_i A_j + k\gamma(u)(u_i A_j + u_j A_i)/c - k\gamma(u)^3 (A_0 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}) u_i u_j/c^2, \quad i \neq j.$$

Las ecuaciones geodésicas son (1.41), que para el espacio-tiempo quedan

$$g_{\mu\nu} \ddot{x}^\nu = \Psi_{\mu\lambda\sigma} \dot{x}^\lambda \dot{x}^\sigma.$$

que a diferencia del caso Riemanniano, estos coeficientes  $\Psi_{\mu\lambda\sigma}$  son funciones de  $x$  y de  $\dot{x}$ , pero funciones homogéneas de grado cero de las  $\dot{x}$ .

Si como antes, en un sistema de referencia inercial, fijamos que el parámetro de evolución es  $\tau = t$ , como  $\dot{t} = 1$  la primera de las ecuaciones resulta ser trivialmente  $\ddot{t} = 0$ , por lo que solamente deberemos plantear las otras tres

$$\frac{d^2 r_i}{dt^2} + \Gamma_{\mu\nu}^i \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0,$$

por lo que solo es necesario calcular los coeficientes  $\Gamma_{\mu\nu}^i$ .

El tensor de Cartan del espacio-tiempo en presencia de un campo electromagnético externo no es en general nulo, por lo que el espacio-tiempo posee torsión, dada por

$$2C_{\mu\nu\lambda} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \dot{x}^\lambda} = eA_\mu \frac{\partial p_\nu}{\partial \dot{x}^\lambda} + eA_\nu \frac{\partial p_\mu}{\partial \dot{x}^\lambda} + eA_\lambda \frac{\partial p_\mu}{\partial \dot{x}^\nu} + eA_\sigma \dot{x}^\sigma \frac{\partial^2 p_\mu}{\partial \dot{x}^\nu \partial \dot{x}^\lambda}.$$

Para este sistema de partícula puntual de Lagrangiana  $\tilde{L} = -(\dot{x} \cdot \dot{x})^{1/2} - k(A \cdot \dot{x})$ , el tensor de torsión simétrico en sus índices, y que es lineal en los potenciales  $A_\mu$ , toma la forma:

$$2C_{\mu\nu\lambda} = \frac{k}{(\dot{x} \cdot \dot{x})^{1/2}} (\eta_{\mu\lambda} A_\nu + \eta_{\mu\nu} A_\lambda + \eta_{\nu\lambda} A_\mu) - \frac{k(A \cdot \dot{x})}{(\dot{x} \cdot \dot{x})^{3/2}} (\eta_{\mu\lambda} \dot{x}_\nu + \eta_{\mu\nu} \dot{x}_\lambda + \eta_{\nu\lambda} \dot{x}_\mu) \\ - \frac{k}{(\dot{x} \cdot \dot{x})^{3/2}} (\dot{x}_\mu \dot{x}_\lambda A_\nu + \dot{x}_\mu \dot{x}_\nu A_\lambda + \dot{x}_\nu \dot{x}_\lambda A_\mu) - \frac{3k(A \cdot \dot{x})}{(\dot{x} \cdot \dot{x})^{5/2}} \dot{x}_\mu \dot{x}_\nu \dot{x}_\lambda.$$

## 1.6.3. Otros ejemplos de espacios de Finsler

En la figura 1.3 se muestran posibles movimientos de una partícula puntual cargada en su espacio cinemático, que en este caso es el espacio-tiempo, en cuatro situaciones dinámicas.<sup>22</sup>

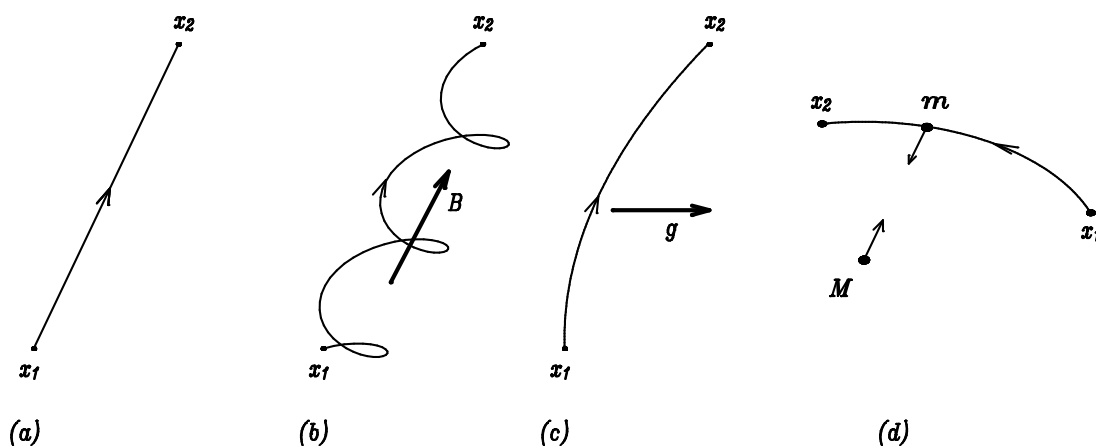


Figura 1.3: Cuatro movimientos de una partícula puntual en su espacio cinemático, entre los puntos  $x_1$  y  $x_2$ , (a) en el caso libre, (b) en presencia de un campo magnético  $B$ , (c) movimiento libre visto desde un observador acelerado o movimiento en presencia de un campo gravitatorio uniforme  $g$ . El ejemplo (d) es el análisis gravitatorio en presencia de una masa  $M$  situada en el origen del sistema de referencia que crea un campo Newtoniano. En los cuatro casos el espacio cinemático es el mismo, el espacio-tiempo, pero con métricas Finslerianas diferentes que producen trayectorias que en el espacio tridimensional son, en el caso (a) una recta sin torsión ni curvatura, en (b) con torsión y curvatura, y en (c) y (d) una trayectoria plana con curvatura.

Las cuatro trayectorias son geodésicas del espacio-tiempo pero con respecto a cuatro métricas diferentes. En la parte (a) el movimiento es libre, la trayectoria es una recta; en (b) está sometida a un campo magnético uniforme, y su trayectoria espacial tiene curvatura y torsión. En este caso la métrica Finsleriana del espacio-tiempo es diferente de la métrica del caso libre. El campo magnético externo la modifica. En (c) es la misma trayectoria libre pero vista desde un observador acelerado. De acuerdo con el principio de equivalencia esto equivale a la presencia de un campo gravitatorio constante. También en este caso la métrica ha sido modificada. Finalmente, en (d) analizamos el movimiento de la partícula puntual en un campo gravitatorio Newtoniano producido por una masa  $M$  localizada en el origen del sistema de referencia inercial que hace el análisis.

Los ejemplos que siguen, relativos al movimiento de una partícula de masa  $m$ , vamos a reescalar la Lagrangiana dividiéndola por el factor  $mc$ , con lo que  $\tilde{L}$  tendrá ahora dimensiones de longitud. Conviene recordar, que si la evolución se expresa en términos de un parámetro adimensional  $\tau$ , los coeficientes de la métrica  $g_{\mu\nu}$  son adimensionales, ya que las coordenadas de los puntos del espacio-tiempo tienen dimensiones de longitud.

<sup>22</sup>Este tema corresponde a una charla impartida en castellano por el autor en el IAC en Noviembre de 2014. (<http://iactalks.iac.es/talks/view/703>) y a una videoconferencia, impartida en inglés en el VIA, (<http://viavca.in2p3.fr/site.html>) en Enero de 2015.

(a) En el caso (a) la Lagrangiana reescalada de la partícula libre es

$$\tilde{L}_0 = \pm \sqrt{\dot{x}_0^2 - \dot{\mathbf{r}}^2} = F_\mu \dot{x}^\mu, \quad \tilde{L}_0^2 = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = c^2 \dot{t}^2 - \dot{\mathbf{r}}^2 > 0,$$

la métrica es  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  con  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Es constante y corresponde a la métrica de Minkowski.

(b) En el caso (b), supongamos un campo magnético uniforme en la dirección  $OZ$ , de intensidad  $B$ . Podemos tomar como potencial vector  $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$  y potencial escalar  $A_0 = 0$ . La Lagrangiana de la partícula puntual reescalada en este campo es

$$\tilde{L}_B = -\sqrt{\dot{x}_0^2 - \dot{\mathbf{r}}^2} + \frac{eB}{mc} x \dot{y} = F_\mu \dot{x}^\mu, \quad F_0 = -p_0, \quad F_1 = -p_1, \quad F_2 = -p_2 + (eB/mc)x, \quad F_3 = -p_3.$$

que conduce a la ecuación dinámica regida por la fuerza de Lorentz en un campo magnético

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{u} \times \mathbf{B}.$$

$$p_0 = \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{\dot{x}_0^2 - \dot{\mathbf{r}}^2}} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - u^2}}, \quad p_i = \frac{-\dot{x}_i}{\sqrt{\dot{x}_0^2 - \dot{\mathbf{r}}^2}} = \frac{-u_i}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

De acuerdo con (1.42) con  $A_0 = A_1 = A_3 = 0$ ,  $A_2 = Bx$ , llamando  $k = eB/mc$ , la formulación variacional nos lleva a que el espacio-tiempo tiene la métrica

$$g_{00} = 1 + \frac{kxu^2u_y}{(c^2 - u^2)^{3/2}}, \quad g_{11} = -1 + \frac{kxu_y}{(c^2 - u^2)^{3/2}} (c^2 - u_y^2 - u_z^2),$$

$$g_{22} = -1 + k^2x^2 + \frac{kxu_y}{(c^2 - u^2)^{3/2}} (3c^2 - 3u_x^2 - 2u_y^2 - 3u_z^2),$$

$$g_{33} = -1 + \frac{kxu_y}{(c^2 - u^2)^{3/2}} (c^2 - u_x^2 - u_y^2),$$

$$g_{01} = -\frac{kxcu_xu_y}{(c^2 - u^2)^{3/2}}, \quad g_{02} = -\frac{kxc}{(c^2 - u^2)^{3/2}} (c^2 - u_x^2 - u_z^2), \quad g_{03} = -\frac{kxcu_yu_z}{(c^2 - u^2)^{3/2}}$$

$$g_{12} = \frac{kxu_x}{(c^2 - u^2)^{3/2}} (c^2 - u_x^2 - u_z^2), \quad g_{13} = \frac{kx}{(c^2 - u^2)^{3/2}} u_x u_y u_z, \quad g_{23} = \frac{kxu_z}{(c^2 - u^2)^{3/2}} (c^2 - u_x^2 - u_z^2),$$

Como vemos, los coeficientes son funciones de punto, es decir de la variable  $x$ , pero son función además, de las tres componentes de la velocidad de la partícula  $u_x, u_y, u_z$ , es decir  $g_{\mu\nu}(x, \dot{x})$ . Si la velocidad del punto es despreciable frente a  $c$ , los coeficientes de la métrica quedan:

$$g_{00} = 1, \quad g_{02} = -kx, \quad g_{11} = -1, \quad g_{22} = -1 + k^2x^2, \quad g_{33} = -1,$$

siendo nulos los demás, donde la dependencia de las velocidades ha desaparecido y se ha transformado en una métrica Riemanniana. Con esta métrica restringida obtendremos una Lagrangiana restringida  $\tilde{L}_R$

$$\tilde{L}_R^2 = c^2 \dot{t}^2 - \dot{\mathbf{r}}^2 + k^2 x^2 \dot{y}^2 - 2kxct\dot{y},$$

que difiere de la Lagrangiana original en un término extra

$$\tilde{L}_B^2 = \tilde{L}_R^2 - 2kx\dot{y} \left( \sqrt{c^2 \dot{t}^2 - \dot{\mathbf{r}}^2} - ct \dot{y} \right),$$

y por lo tanto la fuerza sobre la partícula no es la fuerza de Lorentz. Esta métrica no es solución de vacío de las ecuaciones de Einstein, sino que produce un escalar de curvatura y tensor de Einstein, que valen

$$R = \frac{-k^2}{2}, \quad G_{tt} = \frac{3k^2}{4}, \quad G_{ty} = -\frac{3k^3x}{4}, \quad G_{xx} = \frac{k^2}{4}, \quad G_{yy} = \frac{1}{4}(k^2 + 3k^4x^2), \quad G_{zz} = \frac{-k^2}{4},$$

y los símbolos de Christoffel no nulos son

$$\Gamma_{tx}^t = k^2x/2, \quad \Gamma_{xy}^t = -\frac{1}{2}k(1+k^2x^2), \quad \Gamma_{ty}^x = -k/2, \quad \Gamma_{yy}^x = k^2x, \quad \Gamma_{tx}^y = k/2, \quad \Gamma_{xy}^y = -k^2x/2.$$

Con la fuerza de Lorentz las ecuaciones dinámicas que se obtienen de la Lagrangiana  $\tilde{L}_B$ , son

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{eB}{m\gamma(u)}u_y = \frac{1}{\gamma(u)}kcu_y, \quad \frac{du_y}{dt} = -\frac{eB}{m\gamma(u)}u_x = -\frac{1}{\gamma(u)}kcu_x, \quad \frac{du_z}{dt} = 0,$$

que nos lleva a que  $u_x du_x/dt + u_y du_y/dt + u_z du_z/dt = \mathbf{u} \cdot d\mathbf{u}/dt = 0$ , por lo que el movimiento es con velocidad de módulo constante, el factor  $\gamma(u)$  es constante y la partícula se desplaza en la dirección  $OZ$  con velocidad constante y rota a la vez que se desplaza con velocidad constante en el plano  $XOY$ , con velocidad angular  $\omega = eB/\gamma(u)m$ . Sin embargo las ecuaciones de las geodésicas debidas a la métrica restringida que se deriva de  $\tilde{L}_R$  son

$$\frac{du_x}{dt} = kcu_y(1 - kxu_y/c), \quad \frac{du_y}{dt} = -kcu_x(1 - kxu_y/c), \quad \frac{du_z}{dt} = 0,$$

que también conducen a que el movimiento sea con velocidad  $u$  constante. Siendo consecuentes con el límite de baja velocidad, deberemos tomar en estas ecuaciones el límite cuando  $u/c \rightarrow 0$ ,  $\gamma(u) \rightarrow 1$ , y se reducen a las anteriores. Para la Lagrangiana restringida  $\tilde{L}_R$ , la fuerza sobre la partícula es la fuerza de Lorentz en el límite de baja velocidad.

(c) En el ejemplo (c) de un campo gravitatorio uniforme, la dinámica vendría descrita por la Lagrangiana

$$\tilde{L}_g = \tilde{L}_0 + \frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}}{c^2} c\dot{t},$$

que conduce a las ecuaciones dinámicas  $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{g}$ , con  $\mathbf{p} = \gamma(u)\mathbf{u}$ , independientes de la masa de la partícula. Esta Lagrangiana reescalada, desde el punto de vista geodésico corresponde a una evolución en el espacio-tiempo con una métrica Finsleriana dada por:

$$g_{00} = 1 + \left(\frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}}{c^2}\right)^2 - (3\gamma - \gamma^3)\frac{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})}{c^2},$$

$$g_{ii} = -1 + \gamma(1 + \gamma^2\frac{u_i^2}{c^2})\frac{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})}{c^2}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$g_{0i} = -(\gamma^3 - \gamma)\frac{u_i}{c}\frac{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})}{c^2}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$g_{ij} = \gamma^3\frac{u_i u_j}{c^2}\frac{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})}{c^2}, \quad i \neq j = 1, 2, 3$$

El término  $\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}$  tiene dimensiones de velocidad al cuadrado. Si la velocidad del punto es despreciable frente a  $c$ , los coeficientes no nulos son los

$$g_{00} = 1 + \left(\frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}}{c^2}\right)^2 - 2(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})/c^2, \quad g_{ii} = -1 + (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})/c^2, \quad i = 1, 2, 3$$

es decir

$$g_{00} = \left(1 - \frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}}{c^2}\right)^2, \quad g_{ii} = -\left(1 - \frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}}{c^2}\right), \quad i = 1, 2, 3,$$

donde la componente  $g_{00}$  es idéntica a la de la métrica de Rindler correspondiente a un observador uniformemente acelerado o a la presencia de un campo gravitatorio global constante.

(d) El último ejemplo el (d) es el de la partícula puntual en el potencial gravitatorio Newtoniano de una masa puntual  $M$  situada en el origen del sistema de referencia. La Lagrangiana reescalada es

$$\tilde{L}_N = \tilde{L}_0 + \frac{GM}{c^2 r} \dot{t}.$$

A partir de aquí, y teniendo en cuenta (1.38) se obtiene la métrica de la partícula puntual en un espacio con un potencial central. La métrica que resulta, es

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 + \left(\frac{GM}{c^2 r}\right)^2 - (3\gamma - \gamma^3) \frac{GM}{c^2 r}, \\ g_{ii} &= -1 + \gamma(1 + \gamma^2 \frac{u_i^2}{c^2}) \frac{GM}{c^2 r}, \quad i = 1, 2, 3 \\ g_{0i} &= -(\gamma^3 - \gamma) \frac{u_i}{c} \frac{GM}{c^2 r}, \quad i = 1, 2, 3, \\ g_{ij} &= \gamma^3 \frac{u_i u_j}{c^2} \frac{GM}{c^2 r}, \quad i \neq j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Es una métrica Finsleriana que, en el caso de velocidades pequeñas frente a  $c$ , los únicos términos que sobreviven son los términos diagonales,

$$g_{00} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{G^2 M^2}{c^4 r^2}\right) = \left(1 - \frac{GM}{c^2 r}\right)^2,$$

que si el último término que va con  $G^2/c^4$  se considera despreciable, es el coeficiente de la métrica de Schwarzschild. Para los

$$g_{ii} = -\left(1 - \frac{GM}{c^2 r}\right),$$

que de ser Schwarzschild tendría que salir  $-(1 - 2GM/c^2 r)^{-1}$ . Vemos que los coeficientes en el caso de bajas velocidades se reducen al potencial gravitatorio de una masa central en el origen  $M$ , dividido por  $c^2$ .

Este límite de baja velocidad de la métrica Finsleriana de la partícula en un potencial Newtoniano, aparece como

$$ds^2 = \left(1 - \frac{GM}{c^2 r}\right)^2 c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{GM}{c^2 r}\right) (dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2))$$

que es una métrica Riemanniana, estática, invariante por rotación. Si llamamos  $R_s = 2GM/c^2$  al radio de Schwarzschild, el escalar de curvatura y el tensor de Einstein aparecen como

$$R = \frac{R_s^2}{r(2r - R_s)^3},$$

$$G_{tt} = \frac{3R_s^2}{8r^3(2r - R_s)}, \quad G_{rr} = \frac{(24r - 7R_s)R_s}{4r^2(2r - R_s)^2}, \quad G_{\theta\theta} = \frac{(R_s - 3r)R_s}{(2r - R_s)^2}, \quad G_{\phi\phi} = \frac{(R_s - 3r)R_s \sin^2 \theta}{(2r - R_s)^2},$$

por lo que no es solución de vacío de las ecuaciones de Einstein de la Relatividad General.

En los dos ejemplos gravitatorios, la aproximación Riemanniana de la métrica se ha traducido en que el  $g_{00}$  Minkowskiano de la partícula libre se modifica en la interacción gravitatoria en la forma  $g'_{00} = g_{00}(1 + V(r)/c^2)^2$  y los  $g_{ii}$  en la forma  $g'_{ii} = g_{ii}(1 + V(r)/c^2)$ , siendo en ambos casos  $V(r)$  el potencial gravitatorio.

## 1.7. Principio de Causalidad

Entre los principios fundamentales enunciados no está incluido el **Principio de Causalidad**. El contenido de este principio, que de forma coloquial viene a expresar que las cosas no suceden porque sí, sino que cualquier efecto viene precedido por una causa que lo produce, vamos a ver que está de alguna manera contenido en el Principio Variacional.

Podríamos considerar el Principio de Causalidad como la restricción impuesta al espacio cinemático  $X$  por la condición de que la métrica Finsleriana debe ser definida positiva. Eso nos define en el espacio  $X$ , fijado un punto, dos subvariedades, una desconectada causalmente con ese punto y otra conectada, es decir, que si establezcemos un punto inicial para el planteamiento variacional no se puede escoger en  $X$  cualquier otro punto para caracterizar el estado final. Solamente aquellos que pertenecen a la subvariedad causalmente conectada con él. Por una parte está la flecha del tiempo, lo que hace que  $\dot{t}(\tau) > 0$ , es decir que  $t_2 > t_1$ , y por otra que  $g_{ij}dx^i dx^j > 0$ . Si el Principio Atómico nos lleva a que  $X$ , para una partícula elemental, debe ser necesariamente un espacio homogéneo de  $G$ , el Principio de Causalidad, una vez fijado el punto inicial de la evolución, nos restringe este espacio a una subvariedad del mismo. En el caso particular de la partícula puntual se reduce al interior del cono de luz del futuro del punto inicial de la evolución  $x_1$ . En general, con la métrica dada, si damos dos puntos arbitrarios  $x_1$  y  $x_2$  del espacio cinemático  $X$ , el que exista un  $g \in G$  que los ligue no significa que causalmente puedan estar conectados. Por ejemplo, para una partícula puntual si  $x_1 \equiv (t_1, \mathbf{r}_1)$  es el estado inicial, lo podemos llevar a  $x_2 \equiv (t_1, \mathbf{r}_2)$ , en el mismo instante  $t_1$ , mediante una traslación espacial, pero este punto de  $X$  no podría ser el final de la evolución ya que se movería con velocidad infinita. Entre estos dos puntos, como puntos del espacio de Minkowski,  $\int \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu < 0$ . Esto viene a confirmar que solamente entre aquellos puntos en los que  $g_{ij}dx^i dx^j > 0$  sea claramente definida positiva se va a dar una posible evolución, ya que los demás puntos estarían causalmente desconectados. Si lo que evoluciona es una partícula puntual sin masa, entonces la variedad causalmente conectada es la superficie del cono de luz, entre cuyos puntos la métrica espacio-temporal es nula.

Las propias ecuaciones de Euler-Lagrange poseen solución única con condiciones de contorno en el instante inicial, pero si damos como condiciones de contorno las variables cinemáticas en los extremos de la evolución, que es como se plantea estrictamente el problema variacional, no siempre existirá solución. Si existe solución se satisface el principio de causalidad y si no existe, puede estar sugiriendo la imposibilidad de evolución entre esos puntos. Estos puntos no estarían causalmente conectados.

La homogeneidad de  $X$  implica que todos los estados son equivalentes, y que fijado uno de ellos, el resto son los posibles estados en que pueden encontrar a la partícula elemental el resto de los observadores equivalentes. Es el carácter definido positivo de la acción al cuadrado entre dos puntos el que justifica qué puntos pueden estar causalmente conectados.

## 1.8. Formalismo canónico generalizado

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para los  $n$  grados de libertad  $q_i$ , (1.4) forman un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias de orden  $2k$ , por lo que para singularizar una solución, de acuerdo con los teoremas de existencia y unicidad, nos basta con suministrar las  $2kn$  condiciones de contorno en el instante inicial  $t_1$ ,  $q_i^{(s)}(t_1)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots, 2k - 1$ .

Ahora bien, redefiniendo unas variables intermedias, toda ecuación diferencial de orden  $m$  se puede reducir a un sistema de  $m$  ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. En nuestro caso a un sistema de  $2kn$  ecuaciones de primer orden. Definiendo, como nuevas variables  $q_i^{(s)}$ ,



$s = 1, \dots, 2k - 1$ :

$$\frac{dq_i}{dt} = q_i^{(1)}, \quad \frac{dq_i^{(1)}}{dt} = q_i^{(2)}, \quad \frac{dq_i^{(2)}}{dt} = q_i^{(3)}, \quad \dots, \quad \frac{dq_i^{(2k-2)}}{dt} = q_i^{(2k-1)}$$

hasta llegar a las  $n$  ecuaciones diferenciales finales (1.4), que aparecerían como en (1.31)

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} p_{i(1)}(t, q_i, q_i^{(1)}, \dots, q_i^{(2k-1)}) = 0,$$

a las cuales les suministraríamos como condiciones de contorno las  $2kn$  condiciones en el instante  $t_1$ , mencionadas anteriormente.

El formalismo canónico se basa en utilizar como variables intermedias las  $kn$  variables generalizadas  $q_i^{(s)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots, k - 1$ , es decir las variables cinemáticas con el tiempo excluido y los  $kn$  momentos canónicos conjugados  $p_{i(s)}$ . A las ecuaciones de primer orden que se obtendrán se les denominará ecuaciones canónicas de Hamilton.

Como el Hamiltoniano generalizado está definido por

$$H = \sum_{s=1}^k p_{i(s)} q_i^{(s)} - L(t, q_i, \dots, q_i^{(k)}), \quad (1.43)$$

si de la definición del momento de orden  $k$ ,  $p_{i(k)} = \partial L / \partial q_i^{(k)}$  pudiéramos despejar las  $n$  derivadas de orden máximo  $q_i^{(k)}$  en términos de los  $n$   $p_{i(k)}$ , entonces la Lagrangiana quedaría escrita en términos del tiempo  $t$ , de las  $kn$  variables canónicas  $q_i^{(s)}$ ,  $s = 0, \dots, k - 1$  y de los  $n$  momentos  $p_{i(k)}$ . De esta forma el Hamiltoniano resultaría ser una función  $H(t, q, p)$ , del tiempo, de las variables canónicas y de sus momentos canónico conjugados. Entonces,

$$dH = \sum_{s=0}^{k-1} \frac{\partial H}{\partial q_i^{(s)}} dq_i^{(s)} + \sum_{r=1}^k \frac{\partial H}{\partial p_{i(r)}} dp_{i(r)} + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (1.44)$$

Pero de su definición (1.43)

$$dH = \sum_{s=1}^k q_i^{(s)} dp_{i(s)} + \sum_{s=1}^k p_{i(s)} dq_i^{(s)} - \frac{\partial L}{\partial t} dt - \sum_{s=0}^k \frac{\partial L}{\partial q_i^{(s)}} dq_i^{(s)},$$

El primero de los términos lo escribimos:

$$\sum_{s=1}^k q_i^{(s)} dp_{i(s)} = \sum_{r=1}^k \frac{dq_i^{(r-1)}}{dt} dp_{i(r)},$$

donde los coeficientes de las  $dp_{i(r)}$  son derivadas temporales de sus variables generalizadas  $q_i^{(r-1)}$ ,  $r = 1, \dots, k$ , canónico conjugadas. El segundo de los términos lo escribimos

$$\sum_{s=1}^k p_{i(s)} dq_i^{(s)} = \sum_{s=1}^{k-1} p_{i(s)} dq_i^{(s)} + p_{i(k)} dq_i^{(k)}.$$

con lo que en los primeros sumandos solo hay diferenciales  $dq_i^{(s)}$  de las variables generalizadas, con  $s \leq k - 1$ . Hacemos lo mismo con el último sumatorio

$$\sum_{s=0}^k \frac{\partial L}{\partial q_i^{(s)}} dq_i^{(s)} = \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_{s=1}^{k-1} \frac{\partial L}{\partial q_i^{(s)}} dq_i^{(s)} + \frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} dq_i^{(k)},$$

donde hemos destacado el último sumando que contiene la  $dq_i^{(k)}$ . Pues bien, este último sumando se cancela con el último de la expresión anterior, con lo que esos dos términos se condensan en

$$\sum_{s=1}^k p_{i(s)} dq_i^{(s)} - \sum_{s=0}^k \frac{\partial L}{\partial q_i^{(s)}} dq_i^{(s)} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_{s=1}^{k-1} \left( p_{i(s)} - \frac{\partial L}{\partial q_i^{(s)}} \right) dq_i^{(s)},$$

Pero de la definición de los momentos canónicos, tenemos las expresiones (1.30) y (1.31) que nos llevan a que esta expresión quede:

$$\sum_{s=1}^k p_{i(s)} dq_i^{(s)} - \sum_{s=0}^k \frac{\partial L}{\partial q_i^{(s)}} dq_i^{(s)} = -\frac{dp_{i(1)}}{dt} dq_i - \sum_{s=1}^{k-1} \frac{dp_{i(s+1)}}{dt} dq_i^{(s)} = -\sum_{s=0}^{k-1} \frac{dp_{i(s+1)}}{dt} dq_i^{(s)},$$

donde las diferenciales  $dq_i^{(s)}$  se extienden a todas las variables generalizadas. De esta forma, recolectando términos, tenemos

$$dH = -\sum_{s=0}^{k-1} \frac{dp_{i(s+1)}}{dt} dq_i^{(s)} + \sum_{r=1}^k \frac{dq_i^{(r-1)}}{dt} dp_{i(r)} - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad s = 0, 1, \dots, k-1$$

que si lo identificamos con (1.44) resulta  $\partial H / \partial t = -\partial L / \partial t$ , y

$$\frac{\partial H}{\partial q_i^{(s)}} = -\frac{dp_{i(s+1)}}{dt}, \quad s = 0, 1, \dots, k-1, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_{i(r)}} = \frac{dq_i^{(r-1)}}{dt}, \quad r = 1, \dots, k, \quad i = 1, \dots, n,$$

con lo que llegamos al sistema de  $2kn$  ecuaciones de primer orden para las variables canónicas  $q$ 's y  $p$ 's, donde  $q_i^{(s)}$  es la canónica conjugada de la  $p_{i(s+1)}$ ,  $s = 0, 1, \dots, k-1$ ,

$$\frac{dq_i^{(s)}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_{i(s+1)}}, \quad \frac{dp_{i(s+1)}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i^{(s)}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad s = 0, 1, \dots, k-1. \quad (1.45)$$

que reciben el nombre de **ecuaciones canónicas de Hamilton** (1833).

La derivada temporal de cada variable canónica es la derivada parcial del Hamiltoniano con respecto a la correspondiente variable canónico-conjugada. Si nos referimos a las variables  $q$ 's la derivada parcial del Hamiltoniano aparece con un signo  $+$ , mientras que para las derivadas de las  $p$ 's la derivada parcial del Hamiltoniano aparece con un signo  $-$ . El conocimiento del Hamiltoniano, en vez del conocimiento de la Lagrangiana, nos suministra las ecuaciones dinámicas del sistema material como ecuaciones de primer orden.

Se define el **corchete de Poisson** de dos funciones  $A(q, p)$  y  $B(q, p)$  de las variables canónico-conjugadas como

$$\{A(q, p), B(q, p)\} = \sum_{i=1}^n \sum_{s=0}^{k-1} \left( \frac{\partial A}{\partial q_i^{(s)}} \frac{\partial B}{\partial p_{i(s+1)}} - \frac{\partial A}{\partial p_{i(s+1)}} \frac{\partial B}{\partial q_i^{(s)}} \right)$$

Esta operación corchete es antisimétrica  $\{A, B\} = -\{B, A\}$  y satisface las propiedades distributivas

$$\{A, B + C\} = \{A, B\} + \{A, C\}, \quad \{A, BC\} = \{A, B\}C + B\{A, C\}.$$

Para cualesquiera tres variables dinámicas  $A, B, C$  se cumplen las identidades de Jacobi:

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0.$$

Con esta notación, las ecuaciones canónicas de Hamilton se escriben:

$$\{p_{i(s)}, H\} = \frac{dp_{i(s)}}{dt}, \quad \{q_i^{(s)}, H\} = \frac{dq_i^{(s)}}{dt}.$$

La dinámica de cada variable canónica es el corchete de Poisson de esa variable con el Hamiltoniano. No hay distinción entre variables generalizadas y momentos conjugados.

Si tenemos un observable arbitrario que pudiera ser también función del tiempo  $A(t, q, p)$ , su derivada temporal se escribiría como:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial q_i^{(s)}} \frac{dq_i^{(s)}}{dt} + \frac{\partial A}{\partial p_{i(s+1)}} \frac{dp_{i(s+1)}}{dt}, \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial q_i^{(s)}} \frac{\partial H}{\partial p_{i(s+1)}} - \frac{\partial A}{\partial p_{i(s+1)}} \frac{\partial H}{\partial q_i^{(s)}} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\}. \end{aligned}$$

Al espacio de dimensión  $2kn$  generado por las  $q$ 's y las  $p$ 's se le denomina **espacio de fases** del sistema dinámico, de tal manera que fijado un punto en este espacio, las ecuaciones dinámicas suministran una única solución que pasa por él. En este sentido, las ecuaciones de Euler-Lagrange con condiciones de contorno en el instante  $t_1$  son equivalentes a las ecuaciones canónicas de Hamilton.

Aunque hemos incluido este apartado de la formulación canónica generalizada es simplemente por consistencia, de que también con Lagrangianas generalizadas es posible hacer el formalismo Hamiltoniano de reducir el sistema de ecuaciones de Euler-Lagrange a un sistema de ecuaciones de primer orden en las variables generalizadas  $q$ 's y  $p$ 's. Sin embargo, no va a ser necesaria para lo que sigue en este formalismo, ni siquiera para la cuantización del mismo. Los momentos los utilizaremos para la construcción de las constantes del movimiento Noetherianas, pero hay que resaltar que no estamos interesados en resolver las ecuaciones de la dinámica a partir de condiciones iniciales en el instante  $t_1$ , sino buscar soluciones que pasen por los puntos inicial y final prefijados de la formulación variacional y realzar el papel de las variables cinemáticas como las que caracterizan en todo instante  $\tau$  el estado de cualquier sistema dinámico.

### 1.8.1. Ecuaciones de Hamilton-Jacobi

La **función principal de Hamilton** es una función sobre el espacio cinemático del sistema mecánico que se define como la función acción del punto final de la evolución. Históricamente se la representa por  $S(x)$ , y aunque aquí vamos a usar la letra  $S$  para representar al observable espín, vamos a mantener esta notación en esta sección complementaria. Según esta definición:

$$S(x) \equiv A(x_1, x),$$

donde el punto inicial  $x_1$  es fijo, pero arbitrario. La función principal de Hamilton resulta ser una función del tiempo  $t$  y de las variables generalizadas  $q$ 's. Vamos a hacer la demostración en el caso de una Lagrangiana ordinaria dependiente hasta las derivadas primeras de los grados de libertad  $q_i$ ,  $L(t, q, \dot{q})$ , pero su demostración se puede extender a Lagrangianas generalizadas. Si en el instante final de la evolución  $t$ , las condiciones de contorno  $q(t)$  cambiaran de forma infinitesimal  $q + \delta q$ , ¿cómo cambiaría esta función?

La variación del funcional acción a lo largo del camino  $q(t)$  y  $q(t) + \delta q(t)$  es

$$\mathcal{A}(q + \delta q) - \mathcal{A}(q) = \delta \mathcal{A} = \int_{t_1}^t dt \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right]$$

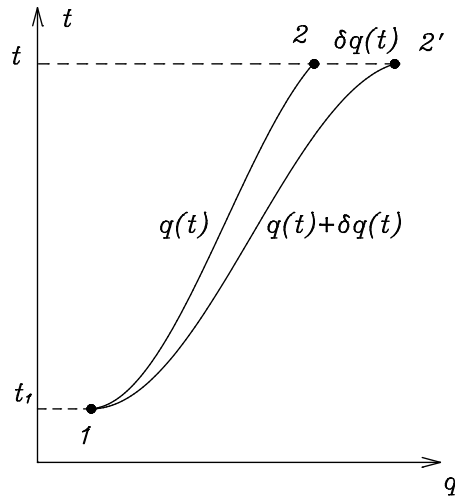


Figura 1.4: **Modificación del punto final de la evolución en el instante  $t$  y por lo tanto del camino  $q(t)$ . La variación de la  $\delta q$  es su variación en forma  $\bar{\delta}q$ , a  $t$  constante.**

pero la variación de la  $\delta q$  es su variación de forma a  $t$  constante

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q,$$

con lo que nos queda

$$\delta \mathcal{A} = \int_{t_1}^t dt \left\{ \left[ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) \right\}$$

Si la trayectoria  $q(t)$  es la que hace extremal al funcional acción entonces se anula el término entre corchetes cuadrados y la variación del funcional acción se reduce a la variación de la función acción

$$\delta \mathcal{A} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_t - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t) \delta q(t),$$

pues  $\delta q(t_1) = 0$ . Pero esto es la variación de la función principal de Hamilton  $\delta S$  cuando dejando fijo  $t$ , cambiamos el resto de las variables cinemáticas  $q$ ,

$$S(t, q + \delta q) - S(t, q) = \delta S(t, q) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = p_i \delta q_i, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i. \quad (1.46)$$

donde  $p_i$  es el momento conjugado de la variable  $q_i$  en el instante  $t$ . Nos falta saber cómo cambia la función principal de Hamilton, cuando modificamos el tiempo del punto final, manteniendo constantes los valores de las variables  $q$  en el instante final y, por supuesto, en el instante inicial  $t_1$ . La variación del funcional acción es

$$\mathcal{A}(q') - \mathcal{A}(q) = \delta \mathcal{A} = \int_{t_1}^{t+\delta t} L(t, q', \dot{q}') dt - \int_{t_1}^t L(t, q, \dot{q}) dt.$$

En un instante intermedio de la evolución  $\delta q = \bar{\delta}q + \dot{q}\delta t$  y  $\delta \dot{q} = \bar{\delta}\dot{q} + \ddot{q}\delta t$ , donde  $\bar{\delta}$  representa la variación en forma, a  $t$  constante, de la correspondiente función. Pero

$$\bar{\delta}\dot{q} = \frac{d}{dt} \bar{\delta}q.$$

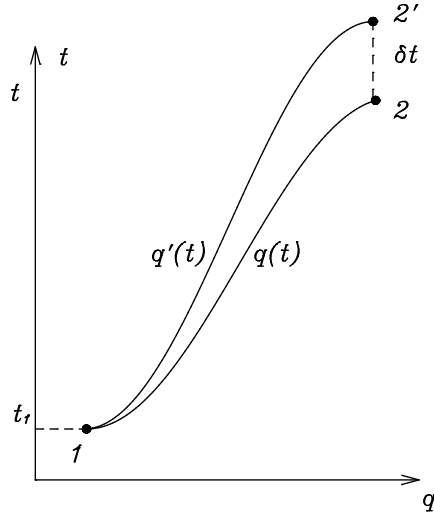


Figura 1.5: **Modificación del punto final de la evolución del instante  $t$  al instante  $t + \delta t$ , manteniendo constantes en ese instante los valores de las variables  $q$ .**

El desarrollo sigue la misma metodología que cuando demostramos el teorema de Noether, incluyendo el cambio del intervalo de integración de  $(t_1, t + \delta t)$  a  $(t_1, t)$  y llegamos finalmente a la expresión (1.22) que transcribimos de nuevo con el índice  $s = 0, 1$ :

$$\delta \mathcal{A} = \int_{t_1}^t \left( \frac{d(L\delta t)}{dt} + \frac{\partial L}{\partial q_i} \bar{\delta} q_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \bar{\delta} \dot{q}_i(t) \right) dt.$$

Si el último término lo ponemos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \bar{\delta} \dot{q}_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \bar{\delta} q_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \bar{\delta} q_i \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \bar{\delta} q_i,$$

nos queda

$$\delta \mathcal{A} = \int_{t_1}^t dt \left\{ \frac{d(L\delta t)}{dt} + \bar{\delta} q_i \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \bar{\delta} q_i \right) \right\}.$$

Restituyendo las variaciones totales  $\bar{\delta} q_i = \delta q_i - \dot{q}_i \delta t$ , y si  $q(t)$  es el camino  $1 \rightarrow 2$  que hace extremal a la acción, el término entre corchetes cuadrados se anula idénticamente, lo que nos queda es la variación de la función acción con el punto inicial fijo, esto es la variación de la función principal de Hamilton

$$\delta S = \delta A(x_1, x) = \int_{t_1}^t dt \left\{ \frac{d(L\delta t)}{dt} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \delta t \right) \right\}.$$

Se trata de la integral de una derivada total, por lo que el resultado es el valor del integrando en el instante  $t$  menos él mismo en el instante inicial  $t_1$ , pero  $\delta t(t_1) = 0$ ,  $\delta t(t) = \delta t$ ,  $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t) = 0$ , por lo que

$$S(t + \delta t, q) - S(t, q) = \delta S(t, q) = (L - p_i \dot{q}_i) \delta t = -H \delta t, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H.$$

Como el Hamiltoniano es función de los momentos  $p_i$  que a su vez se expresan por (1.46) en términos de las derivadas parciales  $p_i = \partial S / \partial q_i$ , la función principal de Hamilton satisface la ecuación diferencial en derivadas parciales, con respecto a las variables cinemáticas:

$$\frac{\partial S(t, q)}{\partial t} = -H \left( t, q, \frac{\partial S}{\partial q_i} \right), \quad (1.47)$$

que recibe el nombre de **ecuación de Hamilton-Jacobi** (1834).

La función principal de Hamilton satisface una ecuación de ondas, en general no lineal, en el espacio cinemático  $X$ , pues la anterior ecuación lo que establece es cómo cambia en el tiempo el valor de  $S$  en el punto  $x \equiv \{t, q\}$ , en función de sus cambios en las direcciones de las variables generalizadas  $q_i$ .

### 1.8.2. Sobre la equivalencia entre la formulación variacional y la canónica

Muchos libros de texto afirman que ambas formulaciones son equivalentes<sup>23</sup>. Sin embargo esto no es así. Dadas las ecuaciones de Euler-Lagrange la formulación variacional pretende buscar la solución con las condiciones de contorno  $q_i(t_1)$  y  $q_i(t_2)$ , en los instantes  $t_1$  y  $t_2$ , mientras que en la formulación canónica las condiciones de contorno son  $q_i(t_1)$  y  $p_i(t_1)$ , en el mismo instante inicial. Para sistemas de ecuaciones diferenciales regulares, fijar en el instante inicial  $t_1$  un punto del espacio de fases  $(q_i, p_j)(t_1)$  nos singulariza una única solución que pasa por él, mientras que fijar dos puntos del espacio cinemático  $x_1 \equiv (t_1, q_i(t_1))$  y  $x_2 \equiv (t_2, q_i(t_2))$  no nos garantiza que haya solución, compatible con el principio de causalidad mencionado en la sección 1.7, y en el caso de existir, no nos garantiza que sea única.

Veámoslo con un ejemplo: el movimiento de un sólido rígido. Desde el punto de vista variacional se debería fijar en el instante  $t_1$  la posición del centro de masa  $\mathbf{r}_1$  y la orientación  $\boldsymbol{\alpha}_1$  del triedro principal de inercia y otro tanto en el instante  $t_2$ . Desde el punto de vista canónico deberíamos fijar en el instante  $t_1$  la posición del centro de masa  $\mathbf{r}_1$  y su velocidad  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{p}_1/m$ , y la orientación  $\boldsymbol{\alpha}_1$  y su velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}_1$ . Si el movimiento es libre  $\mathbf{v}_1 = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)/(t_2 - t_1)$ , pero la velocidad angular no puede ser expresada en términos de las dos orientaciones en los extremos, puesto que no sabemos cuántas vueltas ha dado el sólido ni con respecto a qué eje. En la formulación canónica la solución es única, pero en la formulación variacional tenemos infinitas soluciones en las que la posible velocidad angular queda indeterminada. La presencia de variables compactas hace que los dos sistemas de condiciones de contorno no sean equivalentes.

---

<sup>23</sup>D.A. Wells, Theory and Problems of Lagrangian dynamics, Schaum McGraw Hill, NY (1967) p.1:...*the basic laws of dynamics can be formulated in several ways other than that given by Newton. The most important of these are referred to as: a) D'Alembert's principle, b) Lagrange's equations, c) Hamilton's equations, d) Hamilton's principle. All are basically equivalent.*

E.C.G. Sudarshan and N. Mukunda, Classical Dynamics: A modern perspective, John Willey NY (1974), p.24 ... *this completes the demonstration, in the standard case, of the complete equivalence of the Lagrangian and Hamiltonian forms of dynamics.*

## 1.9. Apéndice: Grupos de Lie de transformaciones

Vamos a introducir la notación y algunos elementos generales de la teoría de grupos de Lie de transformaciones de una variedad. Se trata de analizar cómo las diferentes magnitudes físicas transforman bajo la acción de cambios de sistemas de referencia y bajo grupos de simetrías.

Consideremos la transformación de una variedad de dimensión  $n$ ,  $X$ ,  $x' = gx$  dada por  $n$  funciones continuas y derivables, que dependen de un conjunto de  $r$  parámetros continuos, en la forma:

$$x'^i = f^i(x^j; g^\sigma), \quad \forall x \in X, \quad \forall g \in G, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad \sigma = 1, \dots, r.$$

Esta transformación se dice que es la acción de un grupo de Lie de transformaciones si cumple las dos condiciones:

(i)  $G$  es un grupo de Lie, es decir, existe una ley de composición de grupo para los elementos de  $G$ ,  $c = \phi(a, b) \in G$ ,  $\forall a, b \in G$ , dada por  $r$  funciones continuas y derivables  $\phi^\sigma(a, b)$  de las  $2r$  coordenadas de los elementos  $a$  y  $b$ .

(ii) Las ecuaciones de transformación satisfacen

$$x'' = f(x'; b) = f(f(x; a); b) = f(x; c) = f(x; \phi(a, b)).$$

La parametrización del grupo se puede siempre tomar de tal manera que las coordenadas del elemento neutro  $e$  del grupo son  $e \equiv (0, \dots, 0)$ , de tal manera que un elemento infinitesimal del grupo es uno cuyas coordenadas  $\delta g^\sigma$ ,  $\sigma = 1, \dots, r$ , son infinitesimales.

Bajo la acción de un elemento infinitesimal  $\delta g$  del grupo  $G$ , el cambio en las coordenadas  $x^i$  del punto  $x \in X$  está dada por

$$x^i + dx^i = f^i(x; \delta g) = x^i + \left. \frac{\partial f^i(x; g)}{\partial g^\sigma} \right|_{g=e} \delta g^\sigma = x^i + u_\sigma^i(x) \delta g^\sigma,$$

después de un desarrollo Taylor a primer orden en los parámetros del grupo y sabiendo que  $x^i = f^i(x; 0)$ . Hay  $nr$  funciones auxiliares del grupo que se definen por

$$u_\sigma^i(x) = \left. \frac{\partial f^i(x; g)}{\partial g^\sigma} \right|_{g=e}, \quad (1.48)$$

y por lo tanto a primer orden en los parámetros,  $dx^i = u_\sigma^i(x) \delta g^\sigma$ .

La acción del grupo sobre la variedad  $X$  se puede extender a la acción del grupo sobre el conjunto  $\mathcal{F}(X)$  de funciones continuas y derivables definidas sobre  $X$ , mediante:

$$g : h(x) \rightarrow h'(x) \equiv h(gx). \quad (1.49)$$

Si el elemento del grupo es infinitesimal, entonces

$$h'(x) = h(x^i + dx^i) = h(x^i + u_\sigma^i(x) \delta g^\sigma) = h(x) + \frac{\partial h(x)}{\partial x^i} u_\sigma^i(x) \delta g^\sigma,$$

después de un desarrollo Taylor a primer orden en los parámetros infinitesimales del grupo. La transformación infinitesimal sobre  $\mathcal{F}(X)$  se puede representar mediante la acción de un operador diferencial en la forma

$$h'(x) = \left( \mathbb{I} + \delta g^\sigma u_\sigma^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \right) h(x) = (\mathbb{I} + \delta g^\sigma X_\sigma) h(x) = U(\delta g) h(x),$$

donde  $\mathbb{I}$  es el operador unidad y los operadores diferenciales

$$X_\sigma = u_\sigma^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (1.50)$$

En particular, cuando actuamos con el operador  $U(\delta g) \equiv (\mathbb{I} + \delta g^\sigma X_\sigma)$  sobre la coordenada  $x^j$  obtenemos  $x^j + dx^j = x^j + u_\sigma^j(x) \delta g^\sigma$ .

Los operadores  $X_\sigma$  se denominan los **generadores** de las transformaciones infinitesimales. Hay  $r$  operadores linealmente independientes que generan un espacio vectorial real  $r$ -dimensional y tal que el conmutador de dos cualesquiera de ellos  $[X_\sigma, X_\lambda]$  también pertenece a este espacio vectorial, es decir,

$$[X_\sigma, X_\lambda] = c_{\sigma\lambda}^\alpha X_\alpha, \quad \alpha, \sigma, \lambda = 1, \dots, r. \quad (1.51)$$

Los coeficientes  $c_{\sigma\lambda}^\alpha$  son un conjunto de constantes reales, llamadas las **constantes de estructura** del grupo y el espacio vectorial que construyen los generadores se le llama el **álgebra de Lie**  $\mathcal{L}(G)$ , asociada al grupo de Lie  $G$ . Las constantes de estructura son antisimétricas en sus índices inferiores  $c_{\sigma\lambda}^\alpha = -c_{\lambda\sigma}^\alpha$ , y satisfacen las identidades de Jacobi:

$$c_{\sigma\lambda}^\alpha c_{\mu\alpha}^\beta + c_{\lambda\mu}^\alpha c_{\sigma\alpha}^\beta + c_{\mu\sigma}^\alpha c_{\lambda\alpha}^\beta = 0, \quad \forall \sigma, \lambda, \mu, \beta = 1, \dots, r.$$

Las ecuaciones (1.51) son las reglas de conmutación que caracterizan la estructura del álgebra de Lie del grupo.

Si una transformación finita del grupo, de parámetros  $g^\sigma$ , se puede hacer en  $n$  pasos más pequeños de parámetros  $g^\sigma/n$ , con  $n$  suficientemente grande, entonces una transformación finita  $U(g)h(x)$  Se puede obtener como

$$U(g)h(x) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \mathbb{I} + \frac{g^\sigma}{n} X_\sigma \right)^n h(x) = \exp(g^\sigma X_\sigma) h(x).$$

Esto define la aplicación exponencial y en este caso se dice que los parámetros  $g^\sigma$  son los parámetros **normales** o **canónicos**. En la parametrización normal la ley de composición de los subgrupos uniparamétricos se reduce a la suma de los correspondientes parámetros de los elementos que intervienen en la operación.

Consideremos que  $\mathcal{F}(X)$  es el espacio de Hilbert de los estados de un sistema cuántico; (1.49) puede ser interpretada como la función de onda transformada bajo el elemento del grupo  $g$ . Entonces, si el operador  $U(g)$  es unitario, habitualmente se escribe en la forma

$$U(g) = \exp \left( \frac{i}{\hbar} g^\sigma \tilde{X}_\sigma \right),$$

en términos de la unidad imaginaria  $i$  y la constante de Planck  $\hbar$ , de tal manera que en este caso los nuevos operadores  $\tilde{X}_\sigma$  son operadores autoadjuntos y representan ciertos observables del sistema. Las dimensiones físicas de estos observables dependen de las dimensiones de los parámetros del grupo  $g^\sigma$ , puesto que el argumento de una exponencial es adimensional, y la presencia de la constante de Planck implica que  $g^\sigma \tilde{X}_\sigma$  tiene dimensiones de acción. Estos observables, teniendo en cuenta (1.50), se representan en una representación unitaria por los operadores diferenciales autoadjuntos

$$\tilde{X}_\sigma = \frac{\hbar}{i} u_\sigma^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (1.52)$$

Sin embargo, (1.49) no es la forma más general de transformación de una función de onda de un sistema cuántico, como veremos en el Capítulo 3. Pero una vez que conozcamos cómo transforma, podremos obtener las expresiones explícitas de los generadores del grupo por un procedimiento similar. En general, la función de onda transforma bajo un grupo continuo con lo que se denomina una representación unitaria proyectiva del grupo, la cual involucra en general, alguna fase adicional.



### 1.9.1. Operadores de Casimir

Cuando tenemos una representación de un grupo de Lie, bien sea mediante operadores lineales o por matrices que actúan sobre un espacio vectorial, podemos definir lo que se denominan operadores de Casimir. Son operadores  $C$  que pueden ser expresados como funciones de los generadores  $X_\sigma$  del álgebra de Lie, habitualmente en forma polinómica, y que tienen la propiedad de que conmutan con todos los generadores, esto es, satisfacen  $[C, X_\sigma] = 0$ ,  $\forall \sigma = 1, \dots, r$ . En general no se expresan como combinaciones lineales reales de los  $X_\sigma$  y por lo tanto no pertenecen al álgebra de Lie del grupo. Pertenecen a lo que se denomina el **álgebra del grupo**, es decir, el álgebra asociativa, pero en general no conmutativa construida a partir de todas las combinaciones lineales reales o complejas de productos de los  $X_\sigma$ , en la correspondiente representación del grupo.

En aquellas representaciones en las que los  $X_\sigma$  sean operadores autoadjuntos, como en el caso de un formalismo cuántico, los operadores de Casimir pueden también ser autoadjuntos y representarán a aquellos observables que permanecen invariantes bajo cualquier transformación del grupo. En particular, cuando consideremos los grupos cinemáticos que relacionan a los observadores inerciales, los operadores de Casimir de estos grupos representarán las propiedades intrínsecas del sistema. Son aquellas propiedades que son independientes de qué observador inercial las mida. Son aquellos observables cuyas medidas toman el mismo valor cuando cambiamos de sistema de referencia

Para grupos semisimples, es decir, grupos que no poseen subgrupos invariantes Abelianos, como el grupo de rotaciones  $SO(3)$ , los grupos unitarios  $SU(n)$  y muchos otros, se demuestra que los operadores de Casimir son polinomios reales homogéneos de los generadores  $X_\sigma$ , pero esto no es el caso para grupos de Lie arbitrarios. Sin embargo, para la mayor parte de los grupos con interés en física, como el grupo de Galileo, Poincaré, De Sitter, Weyl,  $SL(4, \mathbb{R})$ , el grupo inhomogéneo  $ISL(4, \mathbb{R})$  y el grupo Conforme  $SU(2, 2)$ , los operadores de Casimir se pueden tomar como polinomios de coeficientes reales de los generadores.

### 1.9.2. Espacios homogéneos de un grupo

Una variedad  $X$  recibe el nombre de espacio homogéneo de un grupo  $G$ , si  $\forall x_1, x_2 \in X$  existe al menos un elemento  $g \in G$  tal que  $x_2 = gx_1$ . En ese caso se dice que  $G$  actúa sobre  $X$  de una forma transitiva. El término *homogéneo* nos recuerda que las propiedades locales de la variedad en el punto  $x$  se trasladan a cualquier otro punto de la variedad por medio de la acción del grupo, y por lo tanto, todos los puntos de  $X$  comparten las mismas propiedades locales.

La **órbita** de un punto  $x$  es el conjunto de puntos de la forma  $gx$ ,  $\forall g \in G$ , tal que si  $X$  es un espacio homogéneo de  $G$ , entonces todo  $X$  es la órbita de cualquiera de sus puntos.

Dado un punto  $x_0 \in X$ , el **subgrupo estabilizador** (little group) de  $x_0$  es el subgrupo  $H_{x_0}$  de  $G$ , que deja invariante al punto  $x_0$ , es decir,  $\forall h \in H_{x_0}$ ,  $hx_0 = x_0$ .

Si  $H$  es un subgrupo de  $G$ , entonces todo elemento  $g \in G$  se puede escribir como  $g = g'h$ , donde  $h \in H$ , y  $g'$  es un elemento de  $G/H$ , el conjunto de cosets por la izquierda generados por el subgrupo  $H$ . Si  $X$  es un espacio homogéneo de  $G$ , puede ser generado por la acción de  $G$  sobre cualquier punto arbitrario  $x_0 \in X$ . Entonces  $\forall x \in X$ ,  $x = gx_0 = g'hx_0 = g'x_0$ , por lo que el espacio homogéneo  $X$  es isomorfo a la variedad  $G/H_{x_0}$ .

Los espacios homogéneos de un grupo se pueden construir como estructuras cociente del grupo por todos sus posibles subgrupos continuos. Recíprocamente, se puede demostrar que si  $X$  es un espacio homogéneo de un grupo  $G$ , entonces existe un subgrupo  $H$  de  $G$  tal que  $X$  es isomorfo a  $G/H$ . Por lo tanto, el espacio homogéneo más amplio de un grupo es el propio grupo.

### 1.9.3. Ejemplos de grupos continuos

1. Consideremos el grupo de traslaciones de la recta:

$$x' = x + a.$$

Con  $a = 0$  tenemos el elemento neutro del grupo y  $-a$  representa al elemento inverso. La transformación es infinitesimal si  $a$  lo es y la escribimos como  $x' = x + \delta a$ . Si  $f(x)$  es una función de  $x$ , la acción infinitesimal del grupo sobre  $f$  la definimos como

$$f'(x) = f(x + \delta a) = f(x) + \delta a \frac{\partial f(x)}{\partial x} = (\mathbb{I} + \delta a P) f(x).$$

Al operador  $P = \partial/\partial x$  le llamamos el generador de la transformación infinitesimal y el elemento infinitesimal del grupo se convierte en el operador  $\delta g \equiv \mathbb{I} + \delta a P$  al actuar sobre las variables y funciones de estas variables. Si  $f(x)$  es una función invariante bajo la acción de este grupo, entonces  $Pf = \partial f/\partial x = 0$ , y  $f$  no depende de  $x$ .

Para la transformación finita de parámetro  $a$ , se cumple la aplicación exponencial  $e^{aP}$ , pues

$$e^{aP} \equiv \mathbb{I} + \frac{aP}{1!} + \frac{(aP)^2}{2!} + \dots + \frac{(aP)^n}{n!} + \dots = \mathbb{I} + \frac{a}{1!} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{a^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots$$

Al aplicarlo sobre la variable  $x$

$$x' = e^{aP} x = x + a,$$

y al aplicarlo sobre cualquier función de  $x$

$$e^{aP} f(x) = f(x) + \frac{a}{1!} \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{a^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \dots = f(x + a)$$

ya que el primer miembro es el desarrollo Taylor de  $f(x)$  desde el punto  $x$  al punto  $x + a$ . El parámetro  $a$  es el parámetro canónico del grupo.

2. Consideremos las rotaciones del plano

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \quad y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

Con  $\alpha = 0$  tenemos el elemento neutro del grupo y  $-\alpha$  es el inverso. Si  $\alpha$  es infinitesimal, de valor  $\delta\alpha$ , a primer orden en este parámetro las ecuaciones de transformación quedan:

$$x' = x - y\delta\alpha, \quad y' = y + x\delta\alpha.$$

Si  $f(x, y)$  es una función de estas variables, bajo el grupo transforma

$$f'(x, y) \equiv f(x', y') = f(x - y\delta\alpha, y + x\delta\alpha) = f(x, y) + \delta\alpha \left( -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) = (\mathbb{I} + \delta\alpha J) f(x, y)$$

donde el operador diferencial

$$J = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y},$$

es el generador de las rotaciones infinitesimales. Si  $f(x, y)$  es invariante bajo rotaciones, entonces  $Jf = 0$ , es decir es solución de la ecuación diferencial

$$-y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}, \quad xdx + ydy = 0$$

ya que el elemento de arco de componentes  $(dx, dy)$  es ortogonal al gradiente de  $f$  y por lo tanto  $f$  debe ser una función arbitraria de las curvas  $x^2 + y^2 = \text{cte}$ , es decir  $f(x^2 + y^2)$ .

Si lo que queremos es analizar una rotación finita de valor  $\alpha$  la aplicación exponencial nos produce el correspondiente operador de rotación

$$e^{\alpha J} \equiv \mathbb{I} + \frac{\alpha}{1!} \left( -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{\alpha^2}{2!} \left( -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \dots + \frac{\alpha^n}{n!} \left( -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right)^n + \dots$$

que aplicado a la variable  $x$  nos produce:

$$e^{\alpha J} x = x - \frac{\alpha}{1!} y - \frac{\alpha^2}{2!} x + \frac{\alpha^3}{3!} y + \dots = x \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} + \dots \right) + y \left( -\frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \dots \right)$$

es decir

$$x' = e^{\alpha J} x = x \cos \alpha - y \sin \alpha.$$

Análogamente, si lo aplicamos a la variable  $y$  llegamos a

$$y' = e^{\alpha J} y = x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

Al aplicarlo sobre cualquier función  $f(x, y)$  nos lleva a

$$f'(x, y) = e^{\alpha J} f(x, y) = f(x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha).$$

El parámetro  $\alpha$  es el parámetro canónico del grupo.

**3.** Consideremos un boost Galileano a lo largo del eje  $OX$ ,

$$t' = t, \quad x' = x + vt.$$

Con  $v = 0$  tenemos el elemento neutro del grupo y  $-v$  representa el elemento inverso. La transformación infinitesimal es con  $\delta v$  infinitesimal y queda:

$$t' = t, \quad x' = x + \delta vt.$$

La acción del elemento infinitesimal sobre una función  $f(t, x)$  viene dada por

$$f'(t, x) = f(t', x') = f(t, x) + \delta vt \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} = (\mathbb{I} + \delta v K) f(t, x),$$

donde  $K = t\partial/\partial x$  es el generador de los boosts a lo largo del eje  $OX$ .

Si queremos analizar un boost finito entonces la aplicación exponencial nos lleva a

$$e^{vK} = \mathbb{I} + \frac{v}{1!} K + \frac{v^2}{2!} K^2 + \dots = \mathbb{I} + \frac{v}{1!} \left( t \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{v^2}{2!} \left( t \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \dots,$$

que aplicado a la variable  $t$

$$t' = e^{vK} t = t,$$

y aplicado a la variable  $x$

$$x' = e^{vK} x = x + vt.$$

Aplicado a cualquier función  $f(t, x)$  nos lleva a

$$f'(t, x) = e^{vK} f(t, x) = f(t, x + vt).$$

El parámetro  $v$  es el parámetro canónico de este grupo.

## 1.10. Apéndice: Sumario de Mecánica Clásica

### 1.10.1. Cinemática

Los sistemas materiales que evolucionan vienen descritos por un conjunto de variables, que van cambiando a partir de unos valores iniciales. Denominamos **variables cinemáticas** a estas variables que evolucionan y que describen de forma unívoca los estados por los que va pasando el sistema material. Al espacio de todos los estados del sistema material le denominamos **espacio cinemático**, y es una variedad  $X$  de dimensión  $n$ , siendo  $n$  el número de variables cinemáticas  $x_i$  que caracterizan de forma unívoca cada uno de los diferentes estados del sistema material.

### 1.10.2. Dinámica

Vamos a suponer que la evolución de los sistemas materiales se puede describir en términos del conocimiento de un parámetro continuo  $\tau$  del cual las variables cinemáticas son funciones continuas y derivables  $x_i(\tau)$ . Denominamos descripción **dinámica** del sistema, entre dos estados inicial  $x_1$  y final  $x_2$  al conocimiento de las funciones  $x(\tau)$ , que satisfacen las condiciones de contorno  $x(\tau_1) \equiv x_1$ ,  $x(\tau_2) \equiv x_2$ , es decir que pasa por los puntos extremos de la evolución, con  $\tau_2 > \tau_1$ .

Entre las variables cinemáticas  $x_i$  debe al menos existir una,  $x_0$ , la cual es una función monótona creciente del parámetro de evolución  $\tau$ , es decir  $\dot{x}_0 > 0$ . Esto nos permite invertir la función  $x_0 = x_0(\tau)$  y obtener  $\tau = \tau(x_0)$ , y poder caracterizar la evolución en términos de una de las variables cinemáticas. Estas variables que satisfacen durante la evolución que  $\dot{x}_i > 0$ , se dice que son variables de tipo temporal, puesto que nos permiten analizar la evolución en términos de su cambio monótono creciente. La flecha del tiempo va a implicar que al definir una magnitud conservada ligada a la invariancia por traslación temporal, la energía, sea una magnitud definida positiva.

Se trata de calcular, conocidos los puntos extremos de la evolución de un sistema material, cuál es esa función  $x(\tau)$  que nos determina la dinámica del sistema.

### 1.10.3. Principio Variacional: Formulación Lagrangiana

La trayectoria dinámica del sistema material es aquella que hace extremal al valor de la acción del sistema material, entre esos puntos extremos prefijados.

La acción del sistema material a lo largo de un camino cualquiera que une esos puntos extremos se calcula en función del conocimiento de una función  $\tilde{L}(x, \dot{x})$ , denominada función Lagrangiana del sistema material, de tal manera que para cada camino  $x(\tau)$  nos define un número real

$$\mathcal{A}[x(\tau)] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{L}(x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau,$$

donde cada integral se calcula a lo largo del correspondiente camino  $x(\tau)$ .

Estamos describiendo la dinámica mediante un formalismo variacional. Como las funciones  $x_i(\tau)$  son derivables con respecto a  $\tau$  y suponemos que existe al menos una variable función monótona de  $\tau$ , de tipo temporal  $x_0 \equiv t$ , las variables cinemáticas son también funciones derivables con respecto a  $t$ . Al establecer el formalismo variacional es necesario conocer cuáles de las variables cinemáticas son realmente independientes y de que no existen relaciones funcionales entre ellas. Por ejemplo si tengo como variables cinemáticas la posición de un punto y la velocidad de ese punto, tres de las variables cinemáticas definen las coordenadas  $r_i$  del punto y otras tres variables cinemáticas son las componentes de la velocidad del punto  $v_i = dr_i/dt$ , por lo que existe una relación funcional entre ellas.

Denominamos **grados de libertad** del sistema material a aquellas variables cinemáticas esenciales, excluido el tiempo  $t \equiv x_0$ , de tal manera que el resto de las variables cinemáticas son derivadas con respecto a  $t$ , hasta un orden finito  $k$ , de aquellas. Denotemos por  $q_i$  a estos grados de libertad esenciales. De esta manera, las variables cinemáticas son el tiempo  $t \equiv x_0$ , los grados de libertad  $q_i$  y sus posibles derivadas temporales  $q_i^r = d^r q_i / dt^r$ , hasta un máximo orden finito  $k$ .

En términos de variables esenciales, el problema variacional queda expresado como el funcional

$$\mathcal{A}[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_i, q_i^{(1)}, \dots, q_i^{(k)}) dt,$$

donde al haber dependencia funcional entre algunas de las variables cinemáticas, ya que algunas son derivadas temporales de otras, el elemento independiente que caracteriza globalmente a una posible evolución es un camino  $q(t)$  en términos de los grados de libertad. Dado un camino  $q_j(t)$ , éste conduce de forma unívoca a un camino  $x(\tau)$  entre los instantes  $\tau_1$  y  $\tau_2 > \tau_1$ .

La formulación variacional, reducida a su dependencia estricta de los grados de libertad esenciales e independientes, nos lleva a que la trayectoria  $q(t)$  de los grados de libertad que, además de hacer que las variables cinemáticas pasen por los extremos  $x_1$  y  $x_2$ , hace extremal al funcional acción, debe satisfacer el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, las denominadas ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^{(1)}} \right) + \dots + (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \right) = 0,$$

que es un sistema de ecuaciones diferenciales de orden  $2k$ . Los teoremas de existencia y unicidad de soluciones de este sistema, supuesto regular, nos singularizan una solución fijados en el instante inicial  $t_1 = t(\tau_1)$ , los valores de los grados de libertad  $q_i(t_1)$  y sus sucesivas derivadas  $q_i^{(r)}(t_1)$ , hasta la de orden  $2k - 1$ ,  $q_i^{(2k-1)}(t_1)$ .

Pero por otra parte, la solución debe pasar por los puntos extremos de la evolución,  $x_1$  y  $x_2$ . Eso implica, que las anteriores condiciones iniciales en el instante  $t_1$  se podrán expresar (tal vez de forma no unívoca) en términos de las variables cinemáticas  $x_1$  y  $x_2$ , en los extremos. Si no existe esa solución, se dice que  $x_1$  y  $x_2$  están causalmente desconectados y por lo tanto la evolución entre ellos no es posible.

La primitiva función Lagrangiana  $\tilde{L}(x, \dot{x})$  resulta ser una función homogénea de grado 1 de las variables derivadas  $\dot{x}_i$ , por lo que admite la forma

$$\tilde{L}(x, \dot{x}) = F_i(x, \dot{x}) \dot{x}_i,$$

donde las  $F_i$  son funciones homogéneas de grado cero de las  $\dot{x}_i$ . Esto implica que  $\tilde{L}^2(x, \dot{x})$ , es homogénea de grado 2 de las  $\dot{x}_i$ , y se puede escribir como

$$\tilde{L}^2(x, \dot{x}) = g_{ij}(x, \dot{x}) \dot{x}_i \dot{x}_j > 0,$$

donde los coeficientes  $g_{ij}$  son funciones homogéneas de grado cero de las  $\dot{x}_i$ .

Dos puntos próximos  $x_i$  y  $x_i + dx_i$ , se dice que están causalmente conectados si  $g_{ij} dx_i dx_j > 0$ , ya que la acción al cuadrado entre ellos es definida positiva. La acción entre dos puntos próximos no puede ser nunca nula, ya que implicaría que la  $\tilde{L}$  se anula idénticamente en un instante, con lo que dejaríamos de tener asociada una acción a un sistema material. La anulación de la acción implicaría que el sistema deja de evolucionar. Esto conduce, por ejemplo, a que en el caso relativista no es posible tener una partícula puntual moviéndose a la velocidad de la luz, ya que la Lagrangiana se anularía idénticamente. Como  $\tilde{L}^2 > 0$ , necesariamente tiene que contener, además de las coordenadas del punto, otras variables cinemáticas que hagan que la

acción al cuadrado sea siempre, en cualquier punto, definida positiva. Los fotones, son partículas puntuales que además tienen orientación, es decir, rotan.

### Principio de Causalidad

La evolución de un sistema material entre los puntos  $x_1$  y  $x_2$  a lo largo de un camino  $x(\tau)$  es posible, si en cada momento de la evolución  $\tau$  se cumple  $g_{ij}dx_i dx_j > 0$ .

Dados dos puntos arbitrarios  $x_1$  y  $x_2$  esto no será siempre posible, por lo que fijado  $x_1$  existe un subconjunto de puntos del espacio cinemático que están causalmente conectados con  $x_1$ . El resto son inalcanzables desde él, y la evolución entre ellos es imposible.

Este principio no establece de forma unívoca el que dado un punto inicial se pueda predecir hacia qué punto evoluciona. Más bien lo que establece es la posibilidad de que la evolución entre dos puntos dados sea o no factible.

### Métrica

El espacio cinemático  $X$  es un espacio métrico con un tensor métrico, simétrico, definido por

$$g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{L}^2}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} = g_{ji}.$$

No es, en general, definido positivo, por lo que a partir de cada punto  $(x, \dot{x})$ , solamente aquellos puntos  $x + dx$  son alcanzables desde  $x$  si  $g_{ij}dx_i dx_j > 0$ . Es un espacio métrico de Finsler.

#### 1.10.4. Principio de Relatividad Restringido: Grupo cinemático

El grupo de simetrías asociado al Principio de Relatividad Restringido no está fijado a priori. Bacry y Levy-Leblond en 1968 <sup>24</sup> establecen bajo criterios estrictamente matemáticos relativos a la estructura del álgebra de Lie del grupo, los posibles grupos cinemáticos. Parten de que el grupo contiene como operaciones traslaciones espacio-temporales, rotaciones y transformaciones cinemáticas puras, y por lo tanto el grupo es de dimensión 10. Las operaciones de inversión espacial e inversión temporal no son, en principio, simetrías pero sí automorfismos del grupo.

El grupo más general que encuentran es el grupo de De Sitter. En el espacio-tiempo existen dos parámetros universales, un factor de escala  $R$ , cuyo inverso sería la curvatura del espacio-tiempo y otro una velocidad límite  $c$ , la velocidad relativa inalcanzable entre observadores. Hay dos grupos de De Sitter,  $SO(3,2)$  y  $SO(4,1)$ , uno de curvatura positiva y otro negativa, respectivamente. Como límite de estos grupos se encuentra que si  $R \rightarrow \infty$  ambos grupos dan lugar al grupo de Poincaré. El espacio-tiempo sería plano, pero existiría una velocidad límite.

Si tomamos en cambio  $c \rightarrow \infty$ , dan lugar a los denominados grupos de Newton, en los que los movimientos relativos entre observadores contienen o bien desplazamientos relativos indefinidos, con velocidad decreciente, o bien desplazamientos relativos oscilantes. Corresponderían a grupos cosmológicos en los que el universo o bien está en continua expansión o bien su evolución es oscilante.

Si en el grupo de Poincaré hacemos  $c \rightarrow \infty$  o en los grupos de Newton hacemos  $R \rightarrow \infty$ , el resultado es el grupo de Galileo.

#### 1.10.5. Principio Atómico: Existencia de partículas elementales

Es asumir que finalmente cualquier sistema material está formado por unos objetos últimos indivisibles que además son indeformables. Al ser indeformables esto implica que dado un estado cualquiera del espacio cinemático de una partícula elemental, cualquier otro estado se puede

<sup>24</sup>H. Bacry and J.M. Levy-Leblond, *Possible Kinematics*, J. Math. Phys. **9**, 1605 (1968)

obtener del anterior mediante un simple cambio de sistema de referencia a otro observador equivalente. Esto trae consigo que el espacio cinemático es necesariamente un espacio homogéneo para el grupo cinemático asociado al Principio de Relatividad Restringido.

### 1.10.6. Resumen del formalismo

1. Para un sistema de  $n$  grados de libertad  $q_i$  cuya Lagrangiana dependa hasta las derivadas de orden  $k$  de los grados de libertad  $q_i^{(k)} = d^k q_i / dt^k$ ,  $L(t, q_i, q_i^{(1)}, \dots, q_i^{(k)})$ , las variables cinemáticas son  $x_j \equiv \{t, q_i, q_i^{(1)}, \dots, q_i^{(k-1)}\}$ , es decir el tiempo, los grados de libertad y sus derivadas temporales hasta el orden  $k - 1$ . Las variables generalizadas son  $\{q_i, q_i^{(1)}, \dots, q_i^{(k-1)}\}$ , es decir, las variables cinemáticas con el tiempo excluido.
2. Cada variable generalizada posee un momento canónico conjugado, definido por

$$p_{i(s)} = \frac{\partial L}{\partial q_i^{(s)}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^{(s+1)}} \right) + \dots + (-1)^{k-s} \frac{d^{k-s}}{dt^{k-s}} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i^{(k)}} \right), \quad s = 1, \dots, k$$

es decir  $p_{i(1)}$  es el momento conjugado de las  $q_i$ ,  $p_{i(2)}$  es el momento conjugado de las  $q_i^{(1)}$  y finalmente  $p_{i(k)}$  es el momento conjugado de las  $q_i^{(k-1)}$ .

3. En una descripción paramétrica de la evolución,  $t(\tau)$ ,  $q_i(\tau)$ , la Lagrangiana  $\tilde{L} = L\dot{t}$ , donde el punto  $\dot{\phantom{x}}$  representa a la derivada con respecto al parámetro  $\tau$ , es una función de las variables cinemáticas  $x$  y de sus primeras derivadas con respecto de  $\tau$ ,  $\dot{x}$ ,  $\tilde{L}(x, \dot{x})$ .
4. La función acción es el valor del funcional acción para el camino que la hace extremal.
5. La función acción es una función explícita de **todas** las variables cinemáticas  $x_1$  y  $x_2$  en los extremos de la trayectoria en el espacio cinemático  $X$ ,  $A(x_1, x_2)$ .
6. El parámetro de evolución arbitrario  $\tau$  se puede elegir adimensional, y por lo tanto  $\tilde{L}$  tiene dimensiones de acción.
7. La Lagrangiana  $\tilde{L}$  se puede obtener de la función acción mediante el límite

$$\tilde{L}(x, \dot{x}) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\partial A(x, y)}{\partial y_i} \dot{x}_i.$$

8. La Lagrangiana  $\tilde{L}$  no es función explícita de  $\tau$ , pero es función homogénea de grado 1 de las derivadas  $\dot{x}_i$  de **todas** las variables cinemáticas. Esto nos permite escribirla como una suma de tantos términos como variables cinemáticas

$$\tilde{L}(x, \dot{x}) = \frac{\partial \tilde{L}(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i = F_i(x, \dot{x}) \dot{x}_i.$$

9. Las funciones  $F_i(x, \dot{x})$  son funciones homogéneas de grado cero de las  $\dot{x}_i$  y por lo tanto son funciones de las derivadas temporales de las variables generalizadas. Como cada sumando  $F_i \dot{x}_i$  tiene dimensiones de acción, cada  $F_i$  tiene la dimensión complementaria de la correspondiente variable  $x_i$ .
10. La función  $\tilde{L}^2$ , que es definida positiva, se puede siempre escribir como

$$\tilde{L}^2 = g_{ij}(x, \dot{x}) \dot{x}_i \dot{x}_j, \quad g_{ij}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{L}^2}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} = g_{ji},$$

donde los coeficientes  $g_{ij} = g_{ji}$ , son funciones homogéneas de grado 0 de las derivadas  $\dot{x}_i$ .

11. La Lagrangiana se puede escribir a partir de  $\tilde{L}^2$  como  $\tilde{L} = \sqrt{\tilde{L}^2}$  o bien  $\tilde{L} = -\sqrt{\tilde{L}^2}$ , ya que al ser  $\tilde{L}^2$  definida positiva esta raíz cuadrada existe, luego o bien  $\tilde{L}$  es definida positiva a lo largo de la trayectoria, o bien es definida negativa. Existen por lo tanto dos tipos distintos de sistemas dinámicos con las mismas variables cinemáticas y que conducen a trayectorias que hacen que la acción del sistema sea máxima o mínima. Para partículas elementales si  $\tilde{L}$  describe a la partícula,  $-\tilde{L}$  a la antipartícula. Partícula y antipartícula conducen sobre el espacio cinemático a la misma definición de distancia métrica  $\tilde{L}^2$ .

12. El espacio cinemático es siempre un espacio métrico Finsleriano. Como

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{L} d\tau = \pm \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\tilde{L}^2} d\tau = \pm \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{g_{ij}(x, \dot{x}) \dot{x}_i \dot{x}_j} d\tau = \pm \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{g_{ij} dx_i dx_j} = \pm \int ds$$

y el problema variacional es equivalente a un problema geodésico sobre el espacio cinemático  $X$ , con una métrica  $g_{ij}(x, \dot{x})$  que es función de punto  $x$  y de las derivadas  $\dot{x}_i$ .

13. Si consideramos dos puntos próximos del espacio cinemático  $x$  y  $x + dx$  tal que el valor de  $\tilde{L}^2(x, dx) < 0$ , implica que la evolución entre esos puntos es causalmente imposible.

14. Si el sistema mecánico es una partícula elemental, entonces es condición necesaria que el espacio cinemático  $X$  sea un espacio homogéneo del grupo cinemático  $G$  asociado al Principio de Relatividad Restringido.

15. El espacio cinemático de una partícula puntual es el espacio-tiempo. Esta variedad es siempre un espacio métrico, con una métrica más general que una métrica Riemanniana. El admitir, como hace la Relatividad General, que el espacio tiempo como variedad de la partícula test, es un espacio métrico Riemanniano es una restricción sobre la posible situación más general. El espacio cinemático de la partícula puntual relativista libre tiene como métrica la métrica de Minkowski.

16. La invariancia de las ecuaciones dinámicas bajo un grupo de transformaciones no implica que la Lagrangiana ni la función acción sean invariantes bajo este grupo. El teorema de Noether establece la relación entre cómo se modifica la función  $A(x_1, x_2)$  bajo un grupo y la construcción explícita de las constantes del movimiento asociadas a ese grupo que deja invariantes las ecuaciones dinámicas. Las constantes del movimiento Noetherianas se escriben en función del Hamiltoniano y de los momentos canónicos y de las funciones  $M(x)$  de cómo transforman las variables cinemáticas  $\delta t = M_0(x) \delta g$ ,  $\delta q_i^{(s)} = M_i^{(s)}(x) \delta g$ , bajo una transformación infinitesimal del grupo de parámetro  $\delta g$ . Si

$$\tilde{L}(\delta g x, \delta g \dot{x}) = \tilde{L}(x, \dot{x}) + \delta g \frac{d\lambda(x)}{d\tau},$$

entonces

$$N = \lambda(x) + HM_0 - p_{i(s)} M_i^{(s-1)},$$

que contiene, además de la función  $\lambda(x)$  tantos términos como variables cinemáticas, donde el Hamiltoniano aparece multiplicando por la función  $M_0$  de cómo transforma la variable cinemática  $x^0 = t$ , y cada momento  $p_{i(s)}$  canónico conjugado de la variable generalizada  $q_i^{(s-1)}$ , cambiado de signo, por cómo transforma infinitesimalmente esta variable generalizada  $M_i^{(s-1)}$ . Las constantes del movimiento Noetherianas son funciones lineales del Hamiltoniano y de los momentos canónicos, siendo los coeficientes de esta expresión lineal funciones de las variables cinemáticas.



17. Si el grupo de simetrías es un grupo dependiente de  $r$  parámetros, entonces existen hasta  $r$  constantes del movimiento  $N_\sigma$ ,  $\sigma = 1, \dots, r$  asociadas a cada transformación de parámetro infinitesimal  $\delta g^\sigma$ , que produce las transformaciones

$$\tilde{L}(\delta g^\sigma x, \delta g^\sigma \dot{x}) = \tilde{L}(x, \dot{x}) + \delta g^\sigma \frac{d\lambda_\sigma(x)}{d\tau}, \quad \delta t = M_{0\sigma}(x)\delta g^\sigma, \quad \delta q_i^{(s)} = M_{i\sigma}^{(s)}(x)\delta g^\sigma,$$

$$N_\sigma = \lambda_\sigma(x) + HM_{0\sigma} - p_{i(s)}M_{i\sigma}^{(s-1)}.$$

18. Todas las constantes del movimiento asociadas a grupos de simetrías representan a observables físicos que no son definidos positivos.

## Capítulo 2

# Ejemplos de partículas con espín

### PARTÍCULAS NO RELATIVISTAS

#### 2.1. Partícula puntual no relativista

El grupo cinemático asociado al Principio de Relatividad Restringido es el grupo de Galileo  $\mathcal{G}$ . Ver el Apéndice al final del capítulo sobre el grupo Galileo para la notación y propiedades que vamos a usar en este capítulo.

Consideremos un espacio cinemático caracterizado por las variables  $(t, \mathbf{r}) \equiv x$ , con dominios  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ , similares a los parámetros del grupo  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{a}$ , respectivamente. Supondremos que son funciones de un cierto parámetro de evolución  $\tau$  y que en cualquier instante  $\tau$  de la evolución dos observadores inerciales cualesquiera relacionan sus medidas espacio-temporales mediante:

$$t'(\tau) = t(\tau) + b, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{r}'(\tau) = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{r}(\tau) + \mathbf{v}t(\tau) + \mathbf{a}. \quad (2.2)$$

Debido a cómo transforman estas variables, las interpretamos como el tiempo y la posición de la partícula, respectivamente. Si suponemos que el parámetro de evolución  $\tau$  es invariante para todos los observadores inerciales, tomando la derivada  $\tau$  de ambos miembros resulta que las derivadas de las variables cinemáticas en cualquier instante  $\tau$ , transforman:

$$\dot{t}'(\tau) = \dot{t}(\tau), \quad (2.3)$$

$$\dot{\mathbf{r}}'(\tau) = R(\boldsymbol{\mu})\dot{\mathbf{r}}(\tau) + \mathbf{v}\dot{t}(\tau). \quad (2.4)$$

Si definimos la velocidad de la partícula mediante  $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt = \dot{\mathbf{r}}/\dot{t}$ , entonces la velocidad de la partícula transforma entre observadores inerciales en la forma:

$$\mathbf{u}'(\tau) = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{u}(\tau) + \mathbf{v}.$$

De esta manera podríamos obtener la forma de transformar de las sucesivas derivadas. La Lagrangiana que describa a esta partícula será función  $L(t, \mathbf{r}, \mathbf{u})$  y en la descripción paramétrica de la evolución  $\tilde{L}(t, \mathbf{r}, \dot{t}, \dot{\mathbf{r}}) = \tilde{L}(x, \dot{x})$  y homogénea de grado 1 de las derivadas  $\dot{x}_i$ . Esta homogeneidad nos lleva a la forma general:

$$\tilde{L} = T\dot{t} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}}, \quad (2.5)$$

donde  $T = \partial\tilde{L}/\partial\dot{t}$  y  $R_i = \partial\tilde{L}/\partial\dot{r}_i$  son todavía funciones desconocidas de las variables cinemáticas y de sus derivadas. Además, son funciones homogéneas de grado cero de las derivadas de las variables cinemáticas, por lo que son funciones de  $(t, \mathbf{r}, \mathbf{u})$ . Esta homogeneidad es independiente

de que la partícula sea libre o esté sometida a alguna interacción. Además las funciones  $T$  y  $R_i$  no son totalmente independientes. En efecto, si en la expresión (2.5) hacemos la derivada de ambos miembros con respecto a  $\dot{r}_i$ , tenemos

$$R_i = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{r}_i} = \dot{t} \frac{\partial T}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial \dot{r}_i} + R_i + \dot{r}_j \frac{\partial R_j}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial \dot{r}_i} = \frac{\partial T}{\partial u_i} + R_i + u_j \frac{\partial R_j}{\partial u_i},$$

pues  $\partial u_j / \partial \dot{r}_i = \delta_{ij} / \dot{t}$ , lo que nos lleva a que

$$\frac{\partial T}{\partial u_i} + u_j \frac{\partial R_j}{\partial u_i} = 0. \quad (2.6)$$

También sabemos que como  $T$  y  $R_i$  son derivadas parciales de  $\tilde{L}$  y ésta es una función continua y derivable de sus argumentos, se cumple la igualdad de derivadas cruzadas

$$\frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial t \partial \dot{r}_i} = \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial \dot{r}_i \partial t}, \quad \frac{\partial R_i}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_i},$$

pero estas funciones dependen de estas derivadas a través de las variables  $u_i = \dot{r}_i / \dot{t}$ , por lo que

$$\frac{\partial R_i}{\partial t} = \frac{\partial R_i}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial t} = \frac{\partial R_i}{\partial u_j} \left( -\frac{\dot{r}_j}{\dot{t}^2} \right) = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_i} = \frac{\partial T}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial \dot{r}_i} = \frac{\partial T}{\partial u_j} \frac{\delta_{ij}}{\dot{t}} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial u_i} + u_j \frac{\partial R_j}{\partial u_i} = 0,$$

que es otra relación del tipo (2.6), que sugiere que  $\partial R_i / \partial u_j = \partial R_j / \partial u_i$ .

### 2.1.1. Partícula puntual libre

Si la partícula es libre, las ecuaciones dinámicas deben ser invariantes para el conjunto de observadores inerciales, ya que tanto desde el punto de vista activo como pasivo, el cambio de sistema de referencia o la transformación cinemática de la partícula no pueden alterar sus leyes dinámicas. Si estuviera bajo una interacción, habría que desplazar también los mecanismos que interaccionan con ella, por lo que en general las ecuaciones dinámicas no serán invariantes, ya que los cambios que hacemos entre observadores inerciales afectan solamente a las variables cinemáticas y sus derivadas, asociadas a la partícula y no a los mecanismos de interacción como campos, imanes, etc.

Desde el punto de vista de las transformaciones infinitesimales, como  $\tilde{L}_0(t, \mathbf{r}, \dot{t}, \dot{\mathbf{r}})$  depende de estas variables que transforman según (2.1-2.4), los diferentes generadores del grupo de Galileo al actuar sobre funciones de estas variables son:

$$H = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{P} = \nabla, \quad \mathbf{J} = \mathbf{r} \times \nabla + \dot{\mathbf{r}} \times \nabla_{\dot{\mathbf{r}}}, \quad \mathbf{K} = t \nabla + \dot{t} \nabla_{\dot{t}}.$$

Si la Lagrangiana es invariante bajo las traslaciones, entonces  $H\tilde{L}_0 = 0$  y  $\mathbf{P}\tilde{L}_0 = 0$ , implica que  $\tilde{L}_0$  no es función de  $t$  ni de  $\mathbf{r}$ . Bajo rotaciones  $\mathbf{J}\tilde{L}_0 = 0$ , e implica que es función de  $\dot{\mathbf{r}}^2$  y también de  $\dot{t}$  y debe ser homogénea de grado 1 en estas derivadas. Finalmente, si es invariante bajo los boosts Galileanos  $\mathbf{K}\tilde{L}_0 = 0$ , lo que implica que  $\partial \tilde{L}_0 / \partial \dot{\mathbf{r}} = 0$ , y sería independiente de  $\dot{\mathbf{r}}$ . Como esto no puede ser, si  $\mathbf{K}\tilde{L}_0 = d(f(t, \mathbf{r})) / d\tau$ , con dimensiones de masa  $\times$  distancia, es una derivada total y las ecuaciones dinámicas resultan ser invariantes. De acuerdo con la estructura de la función gauge (2.7), se tiene

$$\mathbf{K}\tilde{L}_0 = m\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{d\tau}(m\mathbf{r}). \quad \dot{t}\nabla_{\dot{t}}\tilde{L}_0 = m\dot{\mathbf{r}}, \quad \Rightarrow \quad \tilde{L}_0 = \frac{1}{2}m\frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{\dot{t}} + F(\dot{t}),$$

siendo  $F(\dot{t})$  una función arbitraria de  $\dot{t}$  que debe ser homogénea de grado 1, por lo que en general, tiene la forma  $F = -H_0\dot{t}$ , con  $H_0$  una constante, que se interpreta como la energía interna.

Asociada a esta variedad  $X$ , la función gauge del grupo de Galileo es

$$\alpha(g; x) = \xi(g, x) = m (v^2 t / 2 + \mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{r}), \quad (2.7)$$

donde el parámetro  $m$  se interpreta como la masa de la partícula y  $\xi(g, g')$  es el exponente del grupo  $\mathcal{G}$ . Si la transformación es infinitesimal  $\delta g$ , a primer orden en los parámetros queda

$$\alpha(\delta g; x) = m R(\delta \boldsymbol{\mu}) \mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{v} = \lambda_i(x) \delta v_i,$$

y  $\alpha(\delta g; x)$  es distinta de cero si la transformación es un boost Galileano, por lo que la Lagrangiana es invariante bajo traslaciones y rotaciones. Bajo los boosts Galileanos la función  $\lambda_i(x) = m r_i$ .

Si en vez del análisis infinitesimal hacemos el análisis bajo transformaciones finitas, la transformación de la Lagrangiana libre bajo una transformación finita general del grupo de Galileo es

$$\tilde{L}_0(x', \dot{x}') = \tilde{L}_0(x, \dot{x}) + m (v^2 t' / 2 + \mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu}) \dot{\mathbf{r}}). \quad (2.8)$$

Por lo tanto

$$T' = \frac{\partial \tilde{L}'_0}{\partial \dot{t}'} = \left( \frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial \dot{t}} + \frac{1}{2} m v^2 \right) \frac{\partial \dot{t}}{\partial \dot{t}'} + \left( \frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial \dot{r}_i} + m v_j R(\boldsymbol{\mu})_{ji} \right) \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{t}'}, \quad (2.9)$$

pero de (2.3) y (2.4) tenemos que  $\partial \dot{t} / \partial \dot{t}' = 1$  y  $\partial \dot{r}_i / \partial \dot{t}' = -R^{-1}(\boldsymbol{\mu})_{ik} v_k$ , respectivamente, por lo que

$$T' = T - \frac{1}{2} m v^2 - \mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{R}. \quad (2.10)$$

Análogamente

$$\mathbf{R}' = R(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{R} + m \mathbf{v}. \quad (2.11)$$

Los momentos canónico conjugados de los tres grados de libertad independientes  $q_i = r_i$ , son  $p_i = \partial \tilde{L}_0 / \partial \dot{r}_i = R_i$ , y por lo tanto el teorema de Noether nos lleva a las siguientes constantes del movimiento, que vamos a denominar **momentos**, bajo los diferentes subgrupos de simetrías:

**a)** Bajo traslaciones temporales la función gauge (2.7) es nula,  $\delta t = \delta b$ ,  $M = 1$ , mientras que  $\delta r_i = 0$  y la constante se reduce a la expresión  $H = \mathbf{R} \cdot d\mathbf{r}/dt - \tilde{L}_0/\dot{t} = -T$ .

**b)** Bajo traslaciones espaciales también  $\alpha(g; x) \equiv 0$ ,  $\delta t = 0$ ,  $M = 0$ , mientras que  $\delta r_i = \delta a_i$ ,  $M_{ij} = \delta_{ij}$  y el observable conservado es  $\mathbf{R}$ .

**c)** Bajo transformaciones Galileanas puras con velocidad constante (boosts)  $\delta t = 0$  y  $M = 0$ , en tanto que  $\delta r_i = t \delta v_i$  y  $M_{ij} = t \delta_{ij}$ , pero ahora la función gauge a primer orden en el parámetro de velocidad es  $\alpha(\delta \mathbf{v}; x) = m \mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{v}$ , por lo que el observable conservado es  $m \mathbf{r} - \mathbf{P} t$ .

**d)** Bajo rotaciones  $\alpha(g; x) \equiv 0$ ,  $\delta t = 0$  y  $M = 0$ , pero  $\delta r_i = \varepsilon_{ijk} r_j \delta \alpha_k$  y  $M_{ik} = \varepsilon_{ijk} r_j$  y la magnitud conservada es  $\mathbf{r} \times \mathbf{R}$ .

Recolectando estas magnitudes, les podemos dar los siguientes nombres y símbolos:

$$\text{Momento temporal } H = -T, \quad (2.12)$$

$$\text{Momento lineal } \mathbf{P} = \mathbf{R} = \mathbf{p}, \quad (2.13)$$

$$\text{Momento cinemático } \mathbf{K} = m \mathbf{r} - \mathbf{P} t, \quad (2.14)$$

$$\text{Momento angular } \mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}. \quad (2.15)$$

Les hemos reservado los mismos símbolos en mayúsculas que los de los correspondientes generadores del grupo de simetrías, que dejan las ecuaciones dinámicas invariantes: Incluso sus nombres hacen referencia al tipo de parámetro de la correspondiente transformación. Todos ellos pueden tomar ambos signos, ya que si el parámetro de una transformación de un grupo es positivo el de su inversa es negativo y los generadores de las transformaciones infinitesimales

son vectores tangentes a las órbitas, y por lo tanto pueden tener componentes de cualquier signo. Como la dimensionalidad de una constante Noetheriana es la complementaria con respecto a la acción de la dimensión del parámetro del grupo, resulta que  $H$  tiene dimensiones de acción/tiempo = energía,  $\mathbf{P}$  dimensión de acción/distancia = masa  $\times$  velocidad,  $\mathbf{K}$  dimensión de acción/velocidad = masa  $\times$  distancia y finalmente como el parámetro de las rotaciones es adimensional  $\mathbf{J}$  tiene dimensión de acción.

En general, lo que hemos definido como el momento temporal, recibe habitualmente el nombre de **energía** o bien de **Hamiltoniano** del sistema. Sin embargo, ninguno de los observables asociados a los grupos uniparamétricos de simetrías es definido positivo. Por energía entendemos un observable que es siempre definido positivo por lo que en realidad la energía se definiría como  $E = |H|$ . Esto es importante a la hora de clasificar las diferentes partículas que vamos a encontrar, sobre todo en la formulación relativista, en la que, por lo que respecta a  $H$ , el signo de  $H$  es también una propiedad intrínseca, independiente del observador inercial que la mida. En la formulación relativista llamamos partícula a aquél sistema para el que  $H_p > 0$  y antipartícula cuando  $H_a < 0$ . En ambos casos, si partícula y antipartícula poseen masa  $m$  y están en reposo,  $H_p = mc^2$  y  $H_a = -mc^2$ , y su energía es  $E = mc^2 = |H|$ . Esta discusión entre partículas y antipartículas se desarrollará con más detalle en la sección 2.7 lo que nos llevará a denominar al observable momento temporal como energía, pero siendo siempre, para las partículas masivas, un observable definido positivo, distinguiendo a la antipartícula por el signo opuesto de la carga.

Para el momento cinemático existen nombres alternativos en la literatura. Así, Levy-Leblond lo denomina *momento Galileano* y en otros textos, escasos por cierto, se le suele denominar *momento estático*, porque es un observable de dimensiones de masa  $\times$  distancia. Siendo consistentes con la propuesta primera le deberíamos denominar *momento Poincaré* en el caso relativista. En estas notas usaremos el nombre de momento cinemático, incluso en la formulación relativista.

Si tomamos la derivada  $\tau$  en (2.14) del momento cinemático  $\dot{\mathbf{K}} = 0$ , por ser una constante del movimiento, implica  $\mathbf{P} = m\dot{\mathbf{r}}/\dot{t} = m\mathbf{u} = \mathbf{R}$ , donde  $\mathbf{u}$  es la derivada temporal de la posición de la partícula. Si tenemos en cuenta la relación (2.6), entonces

$$\frac{\partial T}{\partial u_i} = -u_j \frac{\partial R_j}{\partial u_i} = -u_j m \delta_{ij} = -mu_i \quad \Rightarrow \quad T(\mathbf{u}) = -\frac{1}{2}m\mathbf{u}^2 + T_0,$$

siendo  $T_0$  una constante, ya que  $T$  no depende de más variables. Con estas funciones la Lagrangiana de la partícula puntual libre queda

$$\tilde{L}_0 = T\dot{t} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}m \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{\dot{t}} + T_0\dot{t}, \quad \Rightarrow \quad L_0 = \frac{1}{2}m\mathbf{u}^2 + T_0.$$

### 2.1.2. Observador del centro de masa

Las seis condiciones  $\mathbf{P} = 0$  y  $\mathbf{K} = 0$ , implican  $\mathbf{u} = 0$  y  $\mathbf{r} = 0$ , de tal manera que la partícula está en reposo y su posición localizada en el origen del sistema de referencia del observador. Para definir de forma única un observador nos falta fijar una rotación arbitraria y una traslación temporal. Sin embargo, a falta de estas operaciones, decimos que la clase de observadores para los que  $\mathbf{P} = 0$  y  $\mathbf{K} = 0$ , representan el observador del centro de masa. Estas seis condiciones las utilizaremos también para definir el observador del centro de masa, en el caso relativista.

A partir de (2.10) y (2.11) vemos que la energía (momento temporal) y el momento lineal transforman como:

$$H' = H + \mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{P} + \frac{1}{2}mv^2, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{P}' = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{P} + m\mathbf{v}. \quad (2.17)$$

Entonces, si  $H_0$  y  $\mathbf{P} = 0$  son la energía y el momento lineal medidos por el observador del centro de masa, para un observador arbitrario que ve a la partícula moviéndose con velocidad  $\mathbf{u}$ , resulta de (2.16) y (2.17) que

$$H = H_0 + \frac{1}{2}m\mathbf{u}^2 = H_0 + \mathbf{P}^2/2m, \quad \mathbf{P} = m\mathbf{u}.$$

La Lagrangiana para la partícula puntual libre es

$$\tilde{L}_0 = T\dot{t} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -H\dot{t} + \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -H_0\dot{t} + \frac{m}{2} \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{\dot{t}}, \quad (2.18)$$

donde  $H_0$  es la constante arbitraria  $-T_0$ , que no juega ningún papel en la dinámica ya que el término que la contiene es una derivada total y puede tomarse como  $H_0 = 0$ . Estará relacionada con el término  $mc^2$  de la partícula puntual relativista.

Si definimos el espín como el momento angular con respecto al punto  $\mathbf{r}$ , resulta

$$\mathbf{S} = \mathbf{J} - \mathbf{r} \times \mathbf{P} = \mathbf{J} - \frac{1}{m} \mathbf{K} \times \mathbf{P} = 0, \quad (2.19)$$

es una constante del movimiento idénticamente nula, por lo que la partícula puntual es una partícula sin espín.

### 2.1.3. Interacción con el exterior

La Lagrangiana más general de la partícula puntual es de la forma  $\tilde{L} = T\dot{t} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}}$ , donde las funciones  $T$  y  $\mathbf{R}$  son funciones de  $t, \dot{t}, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$  y homogéneas de grado cero en las derivadas  $\dot{t}$  y  $\dot{\mathbf{r}}$ , por lo que son funciones de las variables  $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{r}}/\dot{t}$ . En el caso libre, la Lagrangiana es invariante por traslaciones y por lo tanto no son funciones ni de  $t$  ni de  $\mathbf{r}$ , y toman la forma, en el caso Galileano

$$T_0 = -\frac{1}{2}m\mathbf{u}^2 = -H_m, \quad \mathbf{R}_0 = m\mathbf{u} = \mathbf{P}_m$$

mientras que en el caso Poincaré, ésta resulta ser, como veremos en la sección 2.3,

$$T_0 = \frac{-mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = -H_m, \quad \mathbf{R}_0 = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \mathbf{P}_m.$$

De ahí que la Lagrangiana libre tanto en el caso relativista como en el no relativista, se pueda escribir como  $\tilde{L}_0 = T_0\dot{t} + \mathbf{R}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}} = -H_m\dot{t} + \mathbf{P}_m \cdot \dot{\mathbf{r}}$ . A estas magnitudes relacionadas con la Lagrangiana libre, que da cuenta de la masa de la partícula, las hemos denotado con el subíndice  $m$ , para indicar que son propiedades mecánicas. Vemos que son funciones de  $\mathbf{u}$  y que en ambos casos cumplen las condiciones (2.6).

En el caso general, si la Lagrangiana de la partícula puntual bajo una actuación exterior es  $\tilde{L}$ , las ecuaciones dinámicas no tienen por qué ser invariantes por traslación, ya que cuando desplazamos las variables  $t$  y  $\mathbf{r}$ , si no desplazamos también cuantos dispositivos interactúan con ella, la dinámica será diferente. Pero la homogeneidad de  $\tilde{L}$  en términos de  $\dot{t}$  y  $\dot{\mathbf{r}}$  se mantendrá. Podemos definir la parte de interacción con el exterior como la diferencia de estas dos funciones homogéneas  $\tilde{L}_I = \tilde{L} - \tilde{L}_0$ , que sigue manteniendo la misma estructura homogénea en términos de las derivadas de las variables cinemáticas. Entonces,  $\tilde{L}_I = A_0\dot{t} + \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}}$ , donde  $A_0 = \partial\tilde{L}_I/\partial\dot{t}$ ,  $\mathbf{A} = \partial\tilde{L}_I/\partial\dot{\mathbf{r}}$ . Tanto  $A_0$  como  $\mathbf{A}$  serán en general, funciones de  $t, \mathbf{r}, \mathbf{u}$ . Está claro que estos términos modifican las definiciones de la  $H$  y de la  $\mathbf{P}$  de la partícula libre, y ahora  $H = -\partial\tilde{L}/\partial\dot{t} = H_m - A_0$  y  $\mathbf{P} = \partial\tilde{L}/\partial\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{P}_m + \mathbf{A}$ . La función  $-A_0$  es la modificación del momento temporal mecánico  $H_m$ , y  $\mathbf{A}$  la modificación del momento lineal mecánico  $\mathbf{P}_m$ , debidas a la interacción. Además de los observables  $H$  y  $\mathbf{P}$ , también  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{J}$  son modificados por los agentes externos.

Vamos a ver que la dependencia en  $\mathbf{u}$ , tanto de  $A_0$  como de  $\mathbf{A}$  es innecesaria, por lo que la interacción general, será dada por funciones (que denominaremos **campos**) solamente espacio-temporales e independientes de la velocidad. En efecto, consideremos el caso Galileano. Las ecuaciones dinámicas a partir de la Lagrangiana en su descripción temporal

$$L = \frac{m}{2} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 + A_0(t, \mathbf{r}) + \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{u},$$

son

$$\frac{\partial A_0}{\partial r_i} + u_j \frac{\partial A_j}{\partial r_i} - \frac{d}{dt} (mu_i + A_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

es decir

$$m \frac{d^2 r_i}{dt^2} = \frac{\partial A_0}{\partial r_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} + u_j \left( \frac{\partial A_j}{\partial r_i} - \frac{\partial A_i}{\partial r_j} \right)$$

el último término entre paréntesis es una función antisimétrica en  $i$  y  $j$ , por lo que puede ponerse como  $\epsilon_{ijk} B_k u_j$ , con lo que la variación del momento lineal mecánico de la partícula puntual

$$\frac{d\mathbf{P}_m}{dt} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}, \quad (2.20)$$

con

$$\mathbf{E} = \nabla A_0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

es igual a la fuerza de Lorentz asociada a sendos campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  funciones solamente de  $t$  y de  $\mathbf{r}$ . En el caso relativista también obtendríamos que  $d\mathbf{P}_m/dt = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ , pero la expresión de  $\mathbf{P}_m = \gamma(u)m\mathbf{u}$  en términos de la velocidad, es diferente. Si tanto  $A_0$  como  $\mathbf{A}$  fueran funciones de  $\mathbf{u}$ , al plantear las ecuaciones dinámicas tendríamos:

$$\frac{\partial A_0}{\partial r_i} + u_j \frac{\partial A_j}{\partial r_i} - \frac{d}{dt} \left( mu_i + \frac{\partial A_0}{\partial u_i} + A_i + u_j \frac{\partial A_j}{\partial u_i} \right) = 0.$$

Ahora bien, de la homogeneidad de la  $\tilde{L}_I = A_0 \dot{t} + A_j \dot{r}_j$ , al derivar ambos miembros con respecto a  $\dot{r}_j$ , se obtiene:

$$A_j = \dot{t} \frac{\partial A_0}{\partial u_j} \frac{1}{\dot{t}} + \dot{r}_i \frac{\partial A_i}{\partial u_j} \frac{1}{\dot{t}} + A_j,$$

por lo que el término adicional que aparece en las ecuaciones dinámicas

$$\frac{\partial A_0}{\partial u_i} + u_j \frac{\partial A_j}{\partial u_i} = 0,$$

que cumple las condiciones (2.6) que satisfacen respectivamente  $T$  y  $\mathbf{R}$ , es idénticamente nulo y no interviene en la dinámica, como si tanto  $A_0$  como  $\mathbf{A}$ , fueran independientes de  $\mathbf{u}$  como habíamos supuesto. Lo mismo se puede aplicar al caso de la partícula puntual relativista, por lo que la fuerza más general es una fuerza de tipo de Lorentz, con campos solamente espacio-temporales. Respecto de la variación de la energía mecánica, solamente la parte de la fuerza de interacción  $\mathbf{E}$  realiza trabajo. En efecto, en el caso no relativista,

$$H_m = \frac{m}{2} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2, \quad \frac{dH_m}{dt} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{E}.$$

En el caso relativista,  $H_m = \gamma(u)mc^2$ ,  $\mathbf{P}_m = \gamma(u)m\mathbf{u}$ , pero al ser una partícula elemental, el invariante masa, definido por  $H_m^2/c^2 - \mathbf{P}_m^2 = m^2c^2$ , no cambia debido a la interacción, por lo que derivando temporalmente esta expresión, tenemos:

$$\frac{2}{c^2} H_m \frac{dH_m}{dt} - 2\mathbf{P}_m \cdot \frac{d\mathbf{P}_m}{dt} = 0, \quad \frac{dH_m}{dt} = \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{P}_m}{dt} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{E}.$$

En ambos casos, la variación por unidad de tiempo de la energía mecánica de la partícula, es el trabajo de la fuerza  $\mathbf{E}$  debida a la interacción, a lo largo de la trayectoria que sigue el centro de masa de la partícula. Como los campos externos están definidos en el punto  $\mathbf{r}$ , este punto también representa la localización del centro de carga de la partícula.

Como  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , satisface  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , y se trata de un campo pseudovectorial sin fuentes, de divergencia nula. Por otra parte, tomando el rotacional de  $\mathbf{E}$ , se anula el  $\nabla \times (\nabla A_0)$ , por lo que unas ecuaciones que satisfacen estos campos son:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.21)$$

que son parte de las ecuaciones de Maxwell del campo electromagnético. Como son campos vectoriales, nos falta conocer, para que los campos queden definidos, cómo son las  $\nabla \cdot \mathbf{E}$  y  $\nabla \times \mathbf{B}$  y las correspondientes condiciones de contorno. En el caso de las ecuaciones de Maxwell, éstas son:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.22)$$

y no aparecen mientras no establezcamos la parte de la Lagrangiana que describa a los campos libres y cómo éstos son modificados por la presencia de la partícula. Es decir nos falta establecer la dinámica de los campos. En el caso del campo electromagnético  $\rho$  es la densidad de carga eléctrica y  $\mathbf{j}$  el vector densidad de corriente. Si tomamos la divergencia de la segunda ecuación y usamos la primera, llegamos a

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

que es la ley fundamental de conservación de la carga eléctrica.

Para una partícula puntual de carga  $e$  localizada en  $\mathbf{r}$  en el instante  $t$  su densidad de carga es  $\rho = e\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{x})\delta(t - T)$  y  $\mathbf{j} = e\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{x})\delta(t - T)\mathbf{u}$ , siendo  $\mathbf{x}$  cualquier punto del espacio,  $T$  cualquier otro instante y  $\delta(x - a)$  la función delta de Dirac. Las ecuaciones (2.21) no dependen para nada del estado de la partícula, mientras que las (2.22) nos muestran cómo la presencia de la partícula, y por lo tanto de la corriente a ella asociada, modifica localmente a los campos en el entorno de la misma. Hay que tener presente que lo que aquí aparecen son derivadas espacio-temporales de los campos, es decir derivadas con respecto a las variables cinemáticas de la partícula, por lo que se refieren desde el punto de vista local a cómo cambian estos campos en puntos próximos a la trayectoria de la partícula. La ley de conservación de la carga eléctrica nos pone de manifiesto la existencia de una propiedad escalar ligada a la partícula y que viaja con ella a lo largo de su trayectoria, por lo que se refuerza de nuevo el que el punto  $\mathbf{r}$  es el soporte o localización de la carga  $e$ .

Este formalismo no nos garantiza que los campos  $A_0$  y  $\mathbf{A}$ , o bien sus campos derivados  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ , satisfagan todas las ecuaciones de Maxwell, pero sí que la interacción es invariante bajo (2.23), como veremos a continuación. Pero parece indicar que la posible interacción que una partícula puntual pueda sufrir es mediante una fuerza de tipo Lorentz, expresada en términos de unos campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  sin restricción en cuanto a su alcance. La gravedad como interacción, ha quedado fuera del contexto de posibles interacciones, por la definición del Principio de Relatividad Restringido. De esta forma de proceder no se determinarían las otras interacciones conocidas de corto alcance como las de tipo fuerte o débil, que están confinadas a regiones del orden de  $10^{-15}$  a  $10^{-18}$  m, distancias en las que los fenómenos cuánticos son relevantes. Estas últimas interacciones se describen habitualmente en el contexto de la teoría cuántica de campos y no son predichas en esta descripción variacional clásica.

Los campos  $A_0$  y  $\mathbf{A}$ , no están unívocamente determinados, ya que lo que interviene en la dinámica son sus derivadas espacio-temporales. Si los modificamos en la forma

$$A_0 \rightarrow A_0 + \frac{\partial \lambda(t, \mathbf{r})}{\partial t}, \quad A_i \rightarrow A_i + \frac{\partial \lambda(t, \mathbf{r})}{\partial r_i}, \quad (2.23)$$

donde  $\lambda(t, \mathbf{r})$  es una función arbitraria de las variables cinemáticas, la Lagrangiana  $\tilde{L}_I$  se modifica en la forma

$$\frac{\partial \lambda(t, \mathbf{r})}{\partial t} \dot{t} + \frac{\partial \lambda(t, \mathbf{r})}{\partial r_i} \dot{r}_i = \frac{d\lambda}{d\tau},$$



que resulta ser una derivada total y puede eliminarse por no intervenir en la dinámica. La transformación (2.23), que deja invariantes las ecuaciones dinámicas, modificando los campos externos en cada punto del espacio-tiempo, recibe el nombre de **transformación gauge local**.

Pudiera parecer que al dejar las ecuaciones dinámicas invariantes, nos produciría una ley de conservación, utilizando el teorema de Noether. Pero no se trata de una transformación de un grupo uniparamétrico, sino de una transformación de tipo general, generada por una función arbitraria  $\lambda$ , que hace que la Lagrangiana no sea invariante, sino que transforme con una derivada total. Parece entonces que si asociado a ese término existe algún parámetro del sistema, éste puede ser la carga, lo mismo que en el caso no relativista el parámetro masa nos caracterizaba a la función gauge cuya derivada total aparecía en la variación de la Lagrangiana.

## 2.2. Partícula Galileana con espín

La partícula elemental no relativista más general <sup>1</sup> es el sistema Lagrangiano cuyo espacio cinemático  $X$  es todo el grupo de Galileo  $\mathcal{G}$ . Describimos el estado de la partícula en cada instante  $\tau$ , mediante el conocimiento del tiempo  $t(\tau)$ , la posición de un punto  $\mathbf{r}(\tau)$ , la velocidad de este punto  $\mathbf{u}(\tau) = d\mathbf{r}/dt$  y la orientación de un sistema cartesiano de ejes unidad  $\mathbf{e}_i(\tau)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , ligados a ese punto. Estas nueve componentes  $(\mathbf{e}_i)_j$  se pueden expresar en términos de tres parámetros esenciales  $\boldsymbol{\rho}(\tau)$ , como se puede ver en el apéndice 2.8 y en la expresión:

$$(\mathbf{e}_i)_j = R(\boldsymbol{\rho})_{ji} = \frac{1}{1 + \rho^2} [(1 - \rho^2) \delta_{ji} + 2\rho_j \rho_i + 2\varepsilon_{ikj} \rho_k] \quad (2.24)$$

Sin embargo, esta asignación que hace un observador inercial de las variables de orientación de la partícula, como un sistema de tres vectores unidad ortogonales ligados al punto es totalmente arbitraria. Esto quiere decir que la Lagrangiana no va a ser una función explícita del valor actual de estas variables, ya que cualquier otra asignación nos daría los mismos valores para la acción. Pero lo que verdaderamente importa es que esta orientación va cambiando, por lo que la Lagrangiana sí va a ser función de cómo la orientación cambia, es decir de la velocidad angular con que este sistema de ejes rota, la cual es independiente de cual sea esa asignación inicial. Quiere esto decir que si cualquier observador modifica la orientación de los ejes unidad que asigna a la partícula, esto no cambia el valor de la velocidad angular de los mismos, como veremos más adelante.

Tendremos por lo tanto otra simetría adicional a la del grupo cinemático, la de las rotaciones locales de los sistemas de ejes unidad asociados al punto. Le llamaremos el grupo de rotaciones Local, y lo designaremos por  $SO(3)_L$ , el cual conmuta con todo el grupo de Galileo, por lo que al menos el grupo de simetrías espacio-temporales es el  $\mathcal{G} \otimes SO(3)_L$ . El resultado es que  $\tilde{L}$  es función de las variables esenciales de orientación  $\boldsymbol{\rho}$  y  $\dot{\boldsymbol{\rho}}$  a través de su dependencia de la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$ , la cual se expresa en términos de  $\boldsymbol{\rho}$  y  $\dot{\boldsymbol{\rho}}$  en la forma (2.35), como veremos.

Entonces las variables cinemáticas son las diez variables reales  $x(\tau) \equiv (t(\tau), \mathbf{r}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \boldsymbol{\rho}(\tau))$  con dominios  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  y  $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}_c^3$  similarmente a los correspondientes parámetros del grupo. La relación entre los valores  $x'(\tau)$  y  $x(\tau)$  en cualquier instante  $\tau$  para cualquier par de observadores inerciales, y usando la representación pasiva de las rotaciones, está dado por:

$$t'(\tau) = t(\tau) + b, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{r}'(\tau) = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{r}(\tau) + \mathbf{v}t(\tau) + \mathbf{a}, \quad (2.26)$$

$$\mathbf{u}'(\tau) = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{u}(\tau) + \mathbf{v}, \quad (2.27)$$

$$\boldsymbol{\rho}'(\tau) = \frac{\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\rho}(\tau) - \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\rho}(\tau)}{1 - \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\rho}(\tau)}. \quad (2.28)$$

<sup>1</sup> M. Rivas, Classical Particle Systems: I. Galilei free particles, *J. Phys.* **A 18**, 1971 (1985).

Esta última expresión corresponde a que cada vector unidad transforma en la forma  $\mathbf{e}'_i = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{e}_i$ , y formando con los tres vectores en forma de columna la matriz  $R(\boldsymbol{\rho})$ , resulta  $R(\boldsymbol{\rho}') = R(\boldsymbol{\mu})R(\boldsymbol{\rho})$  y esta composición de matrices de rotación equivale a que entre los parámetros esenciales exista la ley de transformación mencionada (2.28).

Entre estas variables cinemáticas existen las tres ligaduras diferenciales  $\mathbf{u}(\tau) = \dot{\mathbf{r}}(\tau)/\dot{t}(\tau)$ , que junto con la homogeneidad de la Lagrangiana  $\tilde{L}$  en términos de las derivadas de las variables cinemáticas:

$$\tilde{L}(x, \dot{x}) = (\partial\tilde{L}/\partial\dot{x}_i)\dot{x}_i, \quad (2.29)$$

nos reducen de diez a seis los grados de libertad esenciales de la partícula.

Estos grados de libertad son, la posición  $\mathbf{r}(t)$  y la orientación  $\boldsymbol{\rho}(t)$ . La Lagrangiana depende hasta la segunda derivada de  $\mathbf{r}(t)$  y de la primera derivada de  $\boldsymbol{\rho}(t)$ . La expresión (2.29) está dada explícitamente por:

$$\tilde{L} = T\dot{t} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{V} \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}, \quad (2.30)$$

donde las funciones  $T = \partial\tilde{L}/\partial\dot{t}$ ,  $R_i = \partial\tilde{L}/\partial\dot{r}^i$ ,  $U_i = \partial\tilde{L}/\partial\dot{u}^i$ ,  $V_i = \partial\tilde{L}/\partial\dot{\rho}^i$  serán, en general, funciones de las variables cinemáticas  $(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$  y funciones homogéneas de grado cero en términos de las derivadas  $(\dot{t}, \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\boldsymbol{\rho}})$ .

Las variables generalizadas son  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{u}$  y  $\boldsymbol{\rho}$ , y sus momentos canónico conjugados son:

$$\mathbf{p}_r = \frac{\partial L}{\partial(d\mathbf{r}/dt)} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial(d^2\mathbf{r}/dt^2)} \right) = \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\mathbf{r}}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\ddot{\mathbf{u}}} \right) = \mathbf{R} - \frac{d\mathbf{U}}{dt},$$

$$\mathbf{p}_u = \frac{\partial L}{\partial(d\mathbf{u}/dt)} = \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\mathbf{u}}} = \mathbf{U},$$

$$\mathbf{p}_\rho = \frac{\partial L}{\partial(d\boldsymbol{\rho}/dt)} = \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{\rho}}} = \mathbf{V}.$$

Como variables canónico-conjugadas,  $\mathbf{p}_r$  es el momento conjugado de  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{p}_u$  es el momento conjugado de  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{p}_\rho$  es el momento conjugado de las variables de orientación  $\boldsymbol{\rho}$ .

Si suponemos que el parámetro de evolución  $\tau$  es invariante, las variables derivadas transforman bajo  $\mathcal{G}$ :

$$\dot{t}'(\tau) = \dot{t}(\tau), \quad (2.31)$$

$$\dot{\mathbf{r}}'(\tau) = R(\boldsymbol{\mu})\dot{\mathbf{r}}(\tau) + \mathbf{v}\dot{t}(\tau), \quad (2.32)$$

$$\dot{\mathbf{u}}'(\tau) = R(\boldsymbol{\mu})\dot{\mathbf{u}}(\tau), \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\rho}}'(\tau) &= \frac{(\dot{\boldsymbol{\rho}}(\tau) - \boldsymbol{\mu} \times \dot{\boldsymbol{\rho}}(\tau))(1 - \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\rho}(\tau))}{(1 - \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\rho}(\tau))^2} + \\ &\quad \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}(\tau)(\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\rho}(\tau) - \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\rho}(\tau))}{(1 - \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\rho}(\tau))^2}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

En vez de la derivada  $\dot{\boldsymbol{\rho}}(\tau)$  que transforma de una manera complicada, es mejor definir la velocidad angular de la partícula  $\boldsymbol{\omega}$  como función de ella, en la representación pasiva, en la forma

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{2}{1 + \boldsymbol{\rho}^2}(-\dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\rho} \times \dot{\boldsymbol{\rho}}), \quad (2.35)$$

como veremos más adelante.

Es una función lineal de  $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ , y transforma, como vemos más abajo, como:

$$\boldsymbol{\omega}'(\tau) = R(\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\omega}(\tau). \quad (2.36)$$

Dos observadores inerciales miden el mismo valor absoluto de la velocidad angular. La transformación inversa de la (2.35) es la

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \frac{1}{2} (-\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\omega})), \quad (2.37)$$

Estamos interpretando la matriz de rotación que define la orientación de la partícula  $R(\boldsymbol{\rho}(\tau))$  como una matriz cuyas tres columnas representan, en el instante  $\tau$ , las componentes de los tres vectores unidad ligados al punto. Entonces  $R(\boldsymbol{\rho}(\tau))$  representaría la rotación que lleva el sistema de ejes ligado a la partícula en el instante  $\tau = 0$  al sistema cartesiano en el instante  $\tau$ .

**Expresión de la velocidad angular.**

Si tenemos en  $\tau = 0$  los ejes  $\mathbf{e}_i(0)$ , que definen por columnas la matriz de rotación  $R(\boldsymbol{\rho}(0))$ , en el instante  $\tau$  serán

$$((\mathbf{e}_1(\tau))(\mathbf{e}_2(\tau))(\mathbf{e}_3(\tau))) = R(\boldsymbol{\rho}(\tau))R(\boldsymbol{\rho}(0))$$

y su cambio por unidad de parámetro  $\tau$

$$((\dot{\mathbf{e}}_1(\tau))(\dot{\mathbf{e}}_2(\tau))(\dot{\mathbf{e}}_3(\tau))) = \dot{R}(\boldsymbol{\rho}(\tau))R(\boldsymbol{\rho}(0)) = \dot{R}(\boldsymbol{\rho}(\tau))R^{-1}(\boldsymbol{\rho}(\tau))((\mathbf{e}_1(\tau))(\mathbf{e}_2(\tau))(\mathbf{e}_3(\tau)))$$

con lo que la velocidad de cambio de cada eje, considerado como vector columna, es la acción sobre el propio eje en el instante  $\tau$  de una matriz

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{d\tau} = \dot{R}(\boldsymbol{\rho}(\tau))R^{-1}(\boldsymbol{\rho}(\tau))\mathbf{e}_i(\tau) = \Omega\mathbf{e}_i(\tau),$$

donde la matriz  $\Omega = \dot{R}R^{-1} = \dot{R}R^T$  es antisimétrica. En efecto, en cualquier instante  $\tau$  se cumple,  $R(\boldsymbol{\rho}(\tau))R^T(\boldsymbol{\rho}(\tau)) = \mathbb{I}$ , donde el superíndice  $T$  significa la matriz transpuesta, y  $\mathbb{I}$  es la matriz unidad  $3 \times 3$ . Si tomamos la derivada con respecto a  $\tau$  de esta expresión,  $\dot{R}R^T + R\dot{R}^T = \Omega + \Omega^T = 0$ , por lo que las tres componentes esenciales de la matriz antisimétrica  $\Omega$  definen un vector  $\boldsymbol{\omega}$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix},$$

de tal manera que podemos escribir la dinámica de cada vector unidad como

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{d\tau} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i. \quad (2.38)$$

y  $\boldsymbol{\omega}$  se interpreta como la velocidad angular con que rota el sistema cartesiano ligado al punto. Las componentes de  $\boldsymbol{\omega}$ , expresadas como funciones de las variables  $\boldsymbol{\rho}$  y  $\dot{\boldsymbol{\rho}}$  vienen dadas en (2.35).

Si cada observador inercial cambia la matriz  $R(\tau)$  formada por los tres vectores unidad en el instante  $\tau$ , por otra cualquiera  $R'(\tau) = R(\tau)M$ , donde  $M$  es cualquier matriz ortogonal, entonces  $R'^T(\tau) = M^T R^T(\tau)$ , y para este observador  $\Omega' = \dot{R}'R'^T = \dot{R}MM^T R^T = \dot{R}R^T = \Omega$ , por lo que cualquier asignación que este observador haga de la orientación, nos produce la misma expresión de la velocidad angular como función de  $\boldsymbol{\rho}$  y  $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ , cualesquiera que sea la  $\boldsymbol{\rho}$ , en este sistema de referencia en cualquier instante. Esto justifica que la Lagrangiana no dependa explícitamente de las variables  $\boldsymbol{\rho}$  y  $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ , y sí lo sea a través de la expresión de la velocidad angular como función de ellas.

La expresión (2.28) corresponde a  $R(\boldsymbol{\rho}'(\tau)) = R(\boldsymbol{\mu})R(\boldsymbol{\rho}(\tau))$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \Omega' &= \dot{R}(\boldsymbol{\rho}'(\tau))R^T(\boldsymbol{\rho}'(\tau)) = R(\boldsymbol{\mu})\dot{R}(\boldsymbol{\rho}(\tau))R^T(\boldsymbol{\rho}(\tau))R^T(\boldsymbol{\mu}) \\ &= R(\boldsymbol{\mu})\Omega R^T(\boldsymbol{\mu}), \end{aligned}$$

que implica una relación lineal entre las componentes estrictas  $\omega'_i$  en términos de las  $\omega_j$ , lo que conduce a la ecuación (2.36) en términos de las componentes esenciales  $\boldsymbol{\omega}$  de la matriz antisimétrica  $\Omega$ . Ver el apéndice 2.8.3 para la descripción precisa de la orientación.

Esto hace que la parte de la Lagrangiana  $(\partial\tilde{L}/\partial\dot{\rho}^i)\dot{\rho}^i$  se pueda escribir como

$$\mathbf{V} \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}} \equiv \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\rho}^i} \dot{\rho}^i = \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\omega^j} \frac{\partial\omega^j}{\partial\dot{\rho}^i} \dot{\rho}^i = \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (2.39)$$

debido a la linealidad de  $\boldsymbol{\omega}$  en términos de  $\dot{\boldsymbol{\rho}}$  y donde  $W_i = \partial\tilde{L}/\partial\omega^i$ . Por lo tanto, la forma más general de la Lagrangiana de una partícula elemental no relativista, se escribe, en vez de (2.30), como:

$$\tilde{L} = T\dot{t} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (2.40)$$

y donde las funciones  $T$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{W}$  son funciones, en principio desconocidas y a determinar en cada caso, de las variables  $(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \mathbf{a}, \boldsymbol{\Omega})$ , donde  $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{u}}/\dot{t} = d\mathbf{u}/dt$ , es la aceleración del punto (no confundirlo con el parámetro de la traslación espacial), y la variable  $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}/\dot{t}$  es la velocidad angular en la descripción temporal. Pero no son funciones explícitas de las variables de orientación  $\boldsymbol{\rho}$ . Todo esto es independiente de si la partícula es libre o está en interacción.

Como estamos usando un parámetro arbitrario de evolución  $\tau$ , el mismo para todo observador inercial, y que lo podemos tomar adimensional, la Lagrangiana  $\tilde{L}$  tiene dimensiones de acción, por lo que cada uno de los sumandos de su desarrollo (2.40) tiene también dimensiones de acción. Esto trae consigo que cada una de las funciones desconocidas  $F_i = \partial\tilde{L}/\partial\dot{x}_i$  posee como dimensiones la de acción dividida por la dimensión de la correspondiente variable cinemática  $x_i$ , ya que al ser  $\tau$  adimensional  $x_i$  y  $\dot{x}_i$ , tienen la misma dimensión. Así,  $T$  tendrá dimensión de (acción/tiempo)=energía,  $\mathbf{R}$  dimensión de (acción/longitud)=masa×velocidad es decir momento lineal,  $\mathbf{U}$  la de (acción/velocidad)=masa×distancia o momento estático, y finalmente  $\mathbf{W}$  dimensión de acción o momento angular porque  $\boldsymbol{\omega}$  es adimensional.

### 2.2.1. Partícula libre con espín

Puesto que  $X$  es la totalidad del grupo de Galileo  $\mathcal{G}$ , la función gauge más general es efectivamente el exponente del grupo:

$$\alpha(g; x) = \xi(g, h_x) = m(v^2 t(\tau)/2 + \mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{r}(\tau)), \quad (2.41)$$

similar a (2.7), lo que nos permite interpretar el parámetro  $m$  como la masa de la partícula. Bajo la acción de un elemento arbitrario del grupo de Galileo, la Lagrangiana  $\tilde{L}_0$ , si las ecuaciones dinámicas son invariantes bajo el grupo de Galileo, transforma de acuerdo con:

$$\tilde{L}_0(gx(\tau), d(gx(\tau))/d\tau) = \tilde{L}_0(x(\tau), \dot{x}(\tau)) + d\alpha(g; x(\tau))/d\tau. \quad (2.42)$$

Esto nos conduce, a través de un cálculo similar al desarrollado en (2.9)-(2.11), a que estas funciones transforman:

$$T'(\tau) = T(\tau) - \mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{R}(\tau) - m\mathbf{v}^2/2, \quad (2.43)$$

$$\mathbf{R}'(\tau) = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{R}(\tau) + m\mathbf{v}, \quad (2.44)$$

$$\mathbf{U}'(\tau) = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{U}(\tau), \quad (2.45)$$

$$\mathbf{W}'(\tau) = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{W}(\tau). \quad (2.46)$$

### 2.2.2. Constantes del movimiento Noetherianas

Conocida la acción del grupo de Galileo sobre las variables cinemáticas dado en (2.25)-(2.28), el teorema de Noether nos define las siguientes constantes del movimiento para la partícula libre:

a) Bajo una traslación temporal la función acción es invariante,  $\lambda(x) = 0$ , y llamamos como es habitual a la magnitud conservada el **momento temporal total** de la partícula,  $H$ . Como  $\delta t = \delta b$  y  $\delta q_i^{(s)} = 0$ ,  $M = 1$  y  $M_i^{(s)} = 0$ , y aplicando (1.37), tenemos:

$$H = p_{(s)}^i q_i^{(s)} - L_0 = (\mathbf{R} - d\mathbf{U}/dt) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{u}}/\dot{t} + \mathbf{V} \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}/\dot{t} \\ - T - \mathbf{R} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{u}}/\dot{t} - \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\omega}/\dot{t}$$

y como  $\mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{V} \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}$ , resulta que

$$H = -T - \frac{dU}{dt} \cdot \mathbf{u}, \quad (2.47)$$

donde todos los términos tienen dimensiones de energía.

**b)** Bajo traslaciones espaciales,  $A(x_1, x_2)$  es invariante,  $\lambda_i(x) = 0$ , y se nos definen las tres componentes del **momento lineal total** de la partícula  $\mathbf{P}$ . Ahora

$$\delta t = 0, \quad M = 0, \quad \delta r_i = \delta a_i, \quad M_{ij}^{(r)} = \delta_{ij}, \quad \delta u_i = 0, \quad M_{ij}^{(u)} = 0,$$

$$\delta \rho_i = 0, \quad M_{ij}^{(\rho)} = 0,$$

y entonces

$$\mathbf{P} = \mathbf{R} - \frac{dU}{dt} = \mathbf{p}_r, \quad (2.48)$$

donde todos los términos tienen dimensiones de masa  $\times$  velocidad.

**c)** Bajo transformaciones Galileanas puras de velocidad  $\delta \mathbf{v}$ ,  $A(x_1, x_2)$  no es invariante sino que teniendo en cuenta (1.13) y la función gauge (2.41) a primer orden en los parámetros  $\delta v_i$ , la acción transforma como  $\delta A = m\mathbf{r}_2 \cdot \delta \mathbf{v} - m\mathbf{r}_1 \cdot \delta \mathbf{v}$  y por lo tanto,  $\lambda_i(x) = m\mathbf{r}_i$ , lo que nos define las componentes del **momento cinemático total** de la partícula,  $\mathbf{K}$ , en la forma:

$$\delta t = 0, \quad M = 0, \quad \delta r_i = \delta v_i t, \quad M_{ij}^{(r)} = \delta_{ij} t, \quad \delta u_i = \delta v_i, \quad M_{ij}^{(u)} = \delta_{ij},$$

$$\delta \rho_i = 0, \quad M_{ij}^{(\rho)} = 0,$$

y así

$$\mathbf{K} = m\mathbf{r} - \mathbf{P}t - \mathbf{U}, \quad (2.49)$$

donde todos los sumandos tienen dimensiones de masa  $\times$  distancia.

A partir de  $\dot{\mathbf{K}} = 0$ , nos lleva a  $\mathbf{P} = m\mathbf{u} - dU/dt$ , por lo que identificándolo con (2.48), la función  $\mathbf{R} = m\mathbf{u}$  independientemente de la Lagrangiana particular que escojamos. Observar que el momento lineal total no tiene la dirección de la velocidad  $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$ , del punto  $\mathbf{r}$ .

**d)** Finalmente, bajo rotaciones  $A(x_1, x_2)$  permanece invariante,  $\lambda_i(x) = 0$ , y la correspondiente constante del movimiento, el **momento angular total** de la partícula con respecto al origen del sistema de referencia del observador  $\mathbf{J}$ , proviene de la transformación infinitesimal de valor  $\delta \alpha_i$ , en tanto que el parámetro  $\delta \mu_i = \delta \alpha_i/2$ , es la mitad del ángulo infinitesimal rotado, por lo que

$$\delta t = 0, \quad M_i = 0, \quad \delta r_i = \epsilon_{ikj} r_k \delta \alpha_j, \quad M_{ij}^{(r)} = \epsilon_{ikj} r_k,$$

$$\delta u_i = \epsilon_{ikj} u_k \delta \alpha_j, \quad M_{ij}^{(u)} = \epsilon_{ikj} u_k,$$

$$\delta \rho_i = \delta \alpha_j (\delta_{ij} - \epsilon_{ijk} \rho_k + \rho_i \rho_j)/2, \quad M_{ij}^{(\rho)} = (\delta_{ij} - \epsilon_{ijk} \rho_k + \rho_i \rho_j)/2,$$

y como la constante del movimiento es

$$J_j = -p_{ri} M_{ij}^{(r)} - p_{ui} M_{ij}^{(u)} - p_{\rho i} M_{ij}^{(\rho)}$$

lo que nos lleva a

$$-P_i \epsilon_{ikj} r_k = \epsilon_{jki} r_k P_i, \quad -U_i \epsilon_{ikj} u_k = \epsilon_{jki} u_k U_i,$$

como de (2.35)

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{\rho}_i} = \frac{2}{1 + \rho^2} (-\delta_{ki} + \epsilon_{kli} \rho_l)$$

$$-V_i M_{ij}^{(\rho)} = -\frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial \omega_k} \frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{\rho}_i} M_{ij}^{(\rho)} = W_j,$$

puesto que

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{\rho}_i} M_{ij}^{(\rho)} = -\delta_{kj},$$

y por lo tanto, en forma vectorial

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{u} \times \mathbf{U} + \mathbf{W} = \mathbf{L} + \mathbf{Z} + \mathbf{W} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{S}, \quad (2.50)$$

donde todos los sumandos tienen dimensiones de acción o momento angular.  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$  representa al momento angular orbital,  $\mathbf{Z} = \mathbf{u} \times \mathbf{U}$  es el momento angular debido a la dependencia de la Lagrangiana de la aceleración y que, como veremos, proviene del movimiento orbital relativo del centro de carga alrededor del centro de masa (o *Zitterbewegung*) y  $\mathbf{W}$  proviene de la dependencia de la Lagrangiana de la velocidad angular y lo interpretamos como la parte rotativa del momento angular.

Como  $\mathbf{J}$  es el momento angular total de la partícula con respecto al origen del observador,  $\mathbf{S}$  representa el momento angular de la partícula o espín con respecto al punto  $\mathbf{r}$ . Como  $d\mathbf{J}/dt = 0$ , el espín  $\mathbf{S}$  satisface  $d\mathbf{S}/dt = \mathbf{P} \times \mathbf{u}$  y no es una constante del movimiento ni siquiera para la partícula libre. Es el momento angular clásico equivalente al operador espín de Dirac en el caso cuántico, puesto que satisface exactamente su misma ecuación dinámica.

e) Hemos mencionado que además del grupo de Galileo como grupo de simetrías de la partícula elemental libre tenemos el grupo de rotaciones locales  $SO(3)_L$ . Este grupo solamente afecta a las variables de orientación. Así, las variables cinemáticas transforman:

$$t' = t, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r}, \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u}, \quad R(\boldsymbol{\rho}') = R(\boldsymbol{\rho})M(\boldsymbol{\alpha}), \quad \forall M(\boldsymbol{\alpha}) \in SO(3)_L,$$

Solamente se nos transforman las variables  $\boldsymbol{\rho}$ , que corresponde en el caso infinitesimal a

$$\boldsymbol{\rho}' = \frac{\boldsymbol{\rho} + \delta\boldsymbol{\alpha}/2 - \boldsymbol{\rho} \times \delta\boldsymbol{\alpha}/2}{(1 - \boldsymbol{\rho} \cdot \delta\boldsymbol{\alpha}/2)}, \quad \delta\rho_i = \delta\alpha_j \frac{1}{2} (\delta_{ij} + \rho_i \rho_j - \epsilon_{ilj} \rho_l) = M_{ij}^{(L)} \delta\alpha_j.$$

Las magnitudes conservadas solo provienen de los momentos  $\mathbf{p}_\rho = \mathbf{V}$ , y serán:

$$T_j = -V_i M_{ij}^{(L)} = -\frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial \omega_k} \frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{\rho}_i} M_{ij}^{(L)},$$

pero

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{\rho}_i} M_{ij}^{(L)} = \frac{-1}{1 + \rho^2} ((1 - \rho^2)\delta_{kj} + 2\rho_k \rho_j + 2\epsilon_{kjs} \rho_s)$$

con lo que este término es en realidad la componente  $k$ , cambiada de signo, del vector unidad  $\mathbf{e}_j$ ,  $(\mathbf{e}_j)_k$ , dado en (2.24), con lo que estas constantes del movimiento son

$$T_j = -W_k (-\mathbf{e}_j)_k = \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_j, \quad (2.51)$$

la **proyección, en los vectores unidad de la partícula, del momento angular ligado con la rotación.**

De estas constantes del movimiento, el momento lineal  $\mathbf{P}$  proviene de la invariancia de  $L$  con respecto a las variables de posición  $\mathbf{r}$ , por lo que de las propias ecuaciones de Euler-Lagrange para estos grados de libertad podríamos haber obtenido:

$$\frac{\partial L_0}{\partial r_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_0}{\partial (dr_i/dt)} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial L_0}{\partial (d^2 r_i/dt^2)} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L_0}{\partial (dr_i/dt)} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_0}{\partial (d^2 r_i/dt^2)} \right) \right] = 0,$$

pues  $\partial L_0/\partial r_i = 0$ , con lo que obtenemos  $d\mathbf{P}/dt = 0$ , donde  $\mathbf{P}$  viene dado en (2.48).

La conservación de las proyecciones  $T_i$  se puede obtener también de las propias ecuaciones dinámicas relativas a la orientación. Como  $\tilde{L}$  depende de  $\boldsymbol{\rho}$  y de  $\dot{\boldsymbol{\rho}}$  a través de la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$ , estas ecuaciones dinámicas se reescriben como

$$\frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial \rho_i} - \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial \dot{\rho}_i} \right) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial \omega_j} \frac{\partial \omega_j}{\partial \rho_i} - \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial \omega_j} \frac{\partial \omega_j}{\partial \dot{\rho}_i} \right) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial \omega_j} = W_j,$$

que nos llevan a

$$\frac{d\mathbf{W}}{d\tau} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{W}, \quad (2.52)$$

y la variación de los ejes del cuerpo  $\mathbf{e}_i$ , hemos visto que es en (2.38)

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{d\tau} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i,$$

de donde con  $T_i = \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_i$ , derivando con respecto a  $\tau$ ,

$$\frac{dT_i}{d\tau} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{W}) \cdot \mathbf{e}_i + \mathbf{W} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i) = 0.$$

Veremos la importancia que tienen estas componentes conservadas del espín en el caso cuántico, para clasificar los estados básicos del espacio de Hilbert del electrón.

**Ejercicio:** Demostrar que si una Lagrangiana depende de las variables de orientación  $\boldsymbol{\rho}$  y  $\dot{\boldsymbol{\rho}}$  a través de la expresión (2.35) de la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})$ , entonces las ecuaciones dinámicas relacionadas con la orientación,

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \rho_i} - \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\rho}_i} \right) = 0,$$

se transforman en

$$d\mathbf{W}/d\tau = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{W}, \quad \text{con } W_i = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_i}.$$

### 2.2.3. Espín respecto del centro de masa

Podemos considerar también el momento angular de la partícula con respecto a su centro de masa, una vez que éste, esté adecuadamente definido. El observador del centro de masa se define como aquel observador inercial para el que  $\mathbf{P} = 0$  y  $\mathbf{K} = 0$ . Estas seis condiciones definen una clase de observadores definidos salvo una rotación arbitraria y una traslación temporal, también arbitraria. La condición  $\mathbf{P} = 0$  define la clase de observadores para los que el centro de masa está en reposo y  $\mathbf{K} = 0$  es la condición adicional de que el centro de masa esté situado en el origen del sistema de referencia. Esto proviene de (2.49), que si ponemos  $\mathbf{k} = \mathbf{U}/m$ , éste es un observable con dimensiones de longitud, y tomando la derivada con respecto a  $\tau$  en ambos lados, sabiendo que  $\dot{\mathbf{P}} = 0$ , obtenemos:

$$\dot{\mathbf{K}} = 0 = m\dot{\mathbf{r}} - \mathbf{P}\dot{t} - m\dot{\mathbf{k}}, \quad \text{es decir,} \quad \mathbf{P} = m \frac{d(\mathbf{r} - \mathbf{k})}{dt}. \quad (2.53)$$

Entonces el punto  $\mathbf{q} = \mathbf{r} - \mathbf{k}$  se mueve a velocidad constante y vemos que representa la posición del centro de masa de la partícula. Por lo tanto, el observable  $\mathbf{k} = \mathbf{r} - \mathbf{q}$  es la posición relativa del punto  $\mathbf{r}$  con respecto al centro de masa, el cual queda definido por

$$\mathbf{q} = \mathbf{r} - \frac{1}{m}\mathbf{U}. \quad (2.54)$$

Vemos que  $\mathbf{P} = 0$  y  $\mathbf{K} = 0$  dan lugar efectivamente a  $d\mathbf{q}/dt = 0$ , y  $\mathbf{r} = \mathbf{k}$ , es decir,  $\mathbf{q} = 0$ , como habíamos adelantado. Con esta definición, el momento cinemático se puede reescribir como  $\mathbf{K} = m\mathbf{q} - \mathbf{P}t$ , en términos de la posición del centro de masa  $\mathbf{q}$  y del momento lineal total  $\mathbf{P}$ .

Podemos definir el momento angular de la partícula con respecto a su centro de masa  $\mathbf{S}_{CM}$ , como la diferencia entre el momento angular total  $\mathbf{J}$  y el momento angular orbital del movimiento del centro de masa  $\mathbf{q} \times \mathbf{P}$ , por lo que

$$\mathbf{S}_{CM} = \mathbf{J} - \mathbf{q} \times \mathbf{P} = \mathbf{J} - \frac{1}{m}\mathbf{K} \times \mathbf{P} = \mathbf{S} + \mathbf{k} \times \mathbf{P} = -m\mathbf{k} \times \frac{d\mathbf{k}}{dt} + \mathbf{W}. \quad (2.55)$$

Vemos que también se escribe como el momento angular  $\mathbf{S}$  con respecto al punto  $\mathbf{r}$ , más el momento angular orbital de este punto  $\mathbf{k} \times \mathbf{P}$  con respecto al centro de masa. El espín  $\mathbf{S}_{CM}$ , queda expresado en términos de las constantes del movimiento  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{P}$ , y es por lo tanto otra constante del movimiento. Alternativamente lo podemos describir de acuerdo con la última expresión como la parte rotatoria del momento angular  $\mathbf{W}$  y del término  $-\mathbf{k} \times m d\mathbf{k}/dt$  que sugiere una contribución de naturaleza (anti)orbital debida al movimiento relativo del punto  $\mathbf{r}$  alrededor del centro de masa. Esta parte está relacionada con el *zitterbewegung*, o más precisamente con la función  $\mathbf{U} = m\mathbf{k}$  que refleja la dependencia de la Lagrangiana con la aceleración. El otro término  $\mathbf{W}$  proviene de la dependencia de los otros tres grados de libertad  $\rho_i$ , y, por lo tanto, de la velocidad angular. Este *zitterbewegung* refleja el movimiento del centro de carga alrededor del centro de masa. La consideración de que el punto  $\mathbf{r}$  representa al centro de carga, ha sido ya sugerido en trabajos previos sobre el electrón relativista <sup>2</sup>.

Debido a que para la partícula libre  $\dot{\mathbf{J}} = 0$ , y que  $d\mathbf{W}/d\tau = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{W}$  y a partir de la expresión de  $\mathbf{P}$ , (2.48), obtenemos una relación general entre diferentes observables para una partícula libre:

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{R} + \dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{U} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{W} = 0, \quad (2.56)$$

lo cual refleja que la velocidad, aceleración y velocidad angular no son magnitudes totalmente independientes. De alguna manera, podemos tomar como sistema de ejes ligados al punto  $\mathbf{r}$ , la terna de vectores unidad de Frenet-Serret de la trayectoria del punto. Según esto, con  $\dot{\mathbf{r}}$  y  $\ddot{\mathbf{r}}$ , se determinan el vector tangente y la normal principal, su producto vectorial nos define la binormal, y por lo tanto la derivada de la terna nos produce la velocidad angular que será también función de la tercera derivada.

Sabiendo que en el caso no relativista  $\mathbf{R}$  y  $\dot{\mathbf{r}}$  tienen la misma dirección, se reduce a

$$\dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{U} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{W} = 0. \quad (2.57)$$

#### 2.2.4. Dinámica del espín

Como el momento angular es un observable que está definido con respecto a un punto concreto, y la partícula elemental posee dos puntos característicos  $\mathbf{r}$  y el centro de masa  $\mathbf{q}$ , podemos analizar la dinámica del espín con respecto a esos dos puntos,  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{S}_{CM}$ , respectivamente. En cualquier caso, conocido el momento angular con respecto a un punto, nos permite calcular el momento angular con respecto a cualquier otro sin más que añadirle  $\mathbf{r} \times \mathbf{P}$ , siendo  $\mathbf{P}$  el momento lineal total del sistema y  $\mathbf{r}$  el vector de posición del primer punto con respecto al segundo. Para la partícula libre, el momento angular con respecto al origen del observador, se escribe:

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{S} = \mathbf{q} \times \mathbf{P} + \mathbf{S}_{CM}.$$

De aquí se deduce, derivando con respecto al tiempo que

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{P} \times \mathbf{u}, \quad \frac{d\mathbf{S}_{CM}}{dt} = 0.$$

<sup>2</sup> A.O. Barut and A.J. Bracken, *Zitterbewegung and the internal geometry of the electron*, *Phys. Rev. D* **23**, 2454 (1981).



Sin embargo, si sobre la partícula y en el punto  $\mathbf{r}$ , tenemos localizada una fuerza  $\mathbf{F}$ , el momento de esta fuerza con respecto al origen, nos dará la variación de  $\mathbf{J}$ ,

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{u} \times \mathbf{P} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \frac{d\mathbf{S}}{dt}$$

pero  $d\mathbf{P}/dt = \mathbf{F}$ , con lo que el espín  $\mathbf{S}$  satisface exactamente la misma ecuación dinámica que en el caso libre, es decir

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{P} \times \mathbf{u},$$

solo que ahora  $\mathbf{P}$  no es una constante del movimiento. Para el otro

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{v} \times \mathbf{P} + \mathbf{q} \times \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \frac{d\mathbf{S}_{CM}}{dt}$$

por lo que

$$\frac{d\mathbf{S}_{CM}}{dt} = (\mathbf{r} - \mathbf{q}) \times \mathbf{F},$$

es el par externo, de la fuerza definida en  $\mathbf{r}$ , con respecto al centro de masa. Si el espín con respecto al centro de masa no se conserva, entonces  $\mathbf{r} \neq \mathbf{q}$  y el centro de masa y el centro de carga son necesariamente dos puntos distintos.

### 2.2.5. Transformación de diversos observables

Las diferentes funciones que componen la Lagrangiana  $\tilde{L}$ , transforman bajo el grupo de Galileo de acuerdo con (2.43)-(2.46). Si la tercera de estas ecuaciones la derivamos con respecto a  $\tau$  y la dividimos por  $\dot{t}' = \dot{t}$ , resulta:

$$\frac{d\mathbf{U}'}{dt'} = R(\boldsymbol{\mu}) \frac{d\mathbf{U}}{dt}, \quad \mathbf{u}' \cdot \frac{d\mathbf{U}'}{dt'} = \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{U}}{dt} + \mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu}) \frac{d\mathbf{U}}{dt}$$

Esto nos lleva a que el momento lineal  $\mathbf{P}$  y el momento temporal  $H$ , transformen entre los observadores Galileanos en la forma dada en (2.16-2.17) para estos mismos observables en el caso de la partícula puntual.

$$H' = H + \mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{P} + \frac{1}{2}mv^2, \quad (2.58)$$

$$\mathbf{P}' = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{P} + m\mathbf{v}. \quad (2.59)$$

De esta forma, si  $H_0$  y  $\mathbf{P}_0 = 0$ , son los valores que toman estos observables para el observador del centro de masa, entonces, para cualquier otro observador que ve moverse al centro de masa con velocidad  $\mathbf{v}$

$$H = H_0 + \frac{1}{2}mv^2 = H_0 + \frac{\mathbf{P}^2}{2m}, \quad \mathbf{P} = m\mathbf{v}.$$

Por lo tanto, cualquiera que sea el observador, la magnitud  $H - \mathbf{P}^2/2m = H_0$  es un número constante y define una propiedad intrínseca de la partícula elemental, ya que su medida es independiente del observador. Además, la parte espacio-temporal de  $\tilde{L}$ , es la que define la parte variante gauge, y adopta la forma general

$$T\dot{t} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -H\dot{t} + \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{r}}.$$

En efecto

$$-H'\dot{t}' + \mathbf{P}' \cdot \dot{\mathbf{r}}' = -H\dot{t} + \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2}mv^2\dot{t} + m\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\dot{\mathbf{r}}.$$

De esta forma, la parte segunda de la Lagrangiana  $\mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\omega}$ , es necesariamente invariante Galileana. El otro parámetro intrínseco de la partícula elemental, el espín o la velocidad de rotación interna, aparecerá ligado a esta parte invariante. Si expresamos el Hamiltoniano en términos de los invariantes  $H_0$  y  $m$ , la primera parte nos queda

$$-H\dot{t} + \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -H_0\dot{t} + \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2\dot{t}} - \frac{1}{2m} \left( \frac{d\mathbf{U}}{dt} \right)^2 \dot{t}.$$

El primer término es una derivada total y se puede suprimir, el segundo es el que da lugar a la variación gauge de la Lagrangiana, y el tercero es necesariamente invariante Galileano.

La transformación del espín con respecto al centro de masa  $\mathbf{S}_{CM}$  definido en (2.55), proviene de cómo transforman  $\mathbf{k} = \mathbf{U}/m$  y  $\mathbf{W}$ ,

$$\mathbf{k}' = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{k}, \quad \frac{d\mathbf{k}'}{dt'} = R(\boldsymbol{\mu})\frac{d\mathbf{k}}{dt}, \quad \mathbf{W}' = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{W}$$

lo que nos lleva a que

$$\mathbf{S}'_{CM} = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{S}_{CM}$$

y por lo tanto  $S'^2_{CM} = S^2_{CM}$ , es una propiedad invariante entre observadores. Para la partícula libre es también constante es decir es un número o propiedad intrínseca de la partícula. La Lagrangiana de una partícula con espín dependerá de forma explícita de estos dos invariantes  $m$  y  $S_{CM}$ .

No podemos decir lo mismo del espín con respecto al centro de carga  $\mathbf{S} = \mathbf{u} \times \mathbf{U} + \mathbf{W}$  que transforma en la forma:

$$\mathbf{S}' = \mathbf{u}' \times \mathbf{U}' + \mathbf{W}' = (R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{U} + R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{W} = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{S} + \mathbf{v} \times R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{U},$$

y por lo tanto su módulo depende de  $\mathbf{v}$  y no es por lo tanto una propiedad intrínseca.

El centro de masa transforma como  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{q}'(\tau) = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{q}(\tau) + \mathbf{v}t(\tau) + \mathbf{a}.$$

Esto no va a ser así en el caso relativista y el centro de masa no transforma como la posición del punto. Esto se debe a que si  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{r}$  son considerados con simultaneidad en un referencial, sus transformados  $\mathbf{q}'$  y  $\mathbf{r}'$  no tienen por qué ser simultáneos en otro referencial relativista, cosa que sí ocurre en el caso no relativista. También, en el caso relativista, la definición del centro de masa  $\mathbf{q}$  depende de la aceleración del punto  $\mathbf{r}$ .

### 2.2.6. Partícula Galileana con espín (anti)orbital

Para analizar la estructura del espín de una partícula elemental vamos a ver ejemplos en los que las dos contribuciones asociadas a las funciones  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{W}$ , aparecen por separado.

Consideremos una partícula elemental Galileana cuyo espacio cinemático sea  $X = \mathcal{G}/SO(3)$ , de tal forma que cada punto  $x \in X$  está caracterizado por las siete variables  $x \equiv (t, \mathbf{r}, \mathbf{u})$ ,  $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$ , que se interpretan como tiempo, posición y velocidad de la partícula, respectivamente. En este ejemplo no tenemos variables de orientación. Como la Lagrangiana depende de las derivadas de estas variables, será también función de la aceleración.

Si la partícula es libre, debido a la invariancia por rotación y traslación, esto implica que  $L_0$  será función solamente de  $\mathbf{u}^2$ ,  $(d\mathbf{u}/dt)^2$  y  $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{u}/dt = d(u^2/2)/dt$ . Este último término es una derivada total, por lo que puede ser descartado.

A partir de la condición (2.57),  $\mathbf{U} \sim \dot{\mathbf{u}}$ , y por otra parte  $\mathbf{U} = m\mathbf{k}$ , pero  $\mathbf{k}$  es la posición relativa del punto  $\mathbf{r}$  con respecto al centro de masa, con lo que en este vector  $\mathbf{k}$  tiene que tener dirección opuesta a la aceleración de  $\mathbf{r}$ , porque si no el punto  $\mathbf{r}$  se separaría del  $\mathbf{q}$ , de ahí que el

término  $\mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{u}} \sim -\dot{\mathbf{u}}^2$ . Como por otra parte la expresión  $T\dot{t} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -H\dot{t} + \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{r}}$  nos produce el término gauge dependiente de la masa, esto sugiere que debe ser de la misma forma que en el caso de la partícula puntual.

Supongamos pues que nuestra partícula elemental viene dada por la siguiente Lagrangiana, que en términos de los tres grados de libertad  $\mathbf{r}$  y sus derivadas, se escribe:

$$L_0 = \frac{m}{2} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 - \frac{m}{2\omega^2} \left( \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right)^2. \quad (2.60)$$

El parámetro  $m$  es la masa de la partícula ya que el primer término es variante gauge con la misma función gauge (2.41) que depende de esta constante  $m$ , mientras que el parámetro  $\omega$  de dimensiones de tiempo<sup>-1</sup> representa una frecuencia interna constante e inmodificable. Es la frecuencia del zitterbewegung. Los parámetros  $m$  y  $\omega$  serían las propiedades intrínsecas de esta partícula.

En términos de las variables cinemáticas y de sus derivadas, y en términos de un parámetro de evolución  $\tau$  arbitrario, la Lagrangiana se reescribe

$$\tilde{L}_0 = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{m}{2\omega^2} \dot{\mathbf{u}}^2, \quad (2.61)$$

donde el punto significa derivada con respecto a  $\tau$ . Si consideramos que el parámetro de evolución es adimensional, entonces todos los términos en la Lagrangiana tienen dimensiones de acción. Por ser la Lagrangiana una función homogénea de grado uno en términos de las derivadas de las variables cinemáticas,  $\tilde{L}_0$  puede escribirse como

$$\tilde{L}_0 = T\dot{t} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{u}}, \quad (2.62)$$

donde las diferentes funciones que aparecen están definidas por

$$T = \frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial \dot{t}} = -\frac{m}{2} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2\omega^2} \left( \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right)^2, \quad (2.63)$$

$$\mathbf{R} = \frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

$$\mathbf{U} = \frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = -\frac{m}{\omega^2} \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (2.64)$$

Las ecuaciones dinámicas que se obtienen de la Lagrangiana (2.60) son:

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{d^4\mathbf{r}}{dt^4} + \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = 0, \quad (2.65)$$

cuya solución general es:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{A} + \mathbf{B}t + \mathbf{C} \cos \omega t + \mathbf{D} \sin \omega t, \quad (2.66)$$

en términos de 12 constantes de integración  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$ .

Al aplicar el teorema de Noether al grupo de Galileo, las correspondientes constantes del movimiento se pueden escribir en la forma:

$$\text{Momento temporal } H = -T - \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{U}}{dt}, \quad (2.67)$$

$$\text{Momento lineal } \mathbf{P} = \mathbf{R} - \frac{d\mathbf{U}}{dt} = m\mathbf{u} - \frac{d\mathbf{U}}{dt}, \quad (2.68)$$

$$\text{Momento cinemático } \mathbf{K} = m\mathbf{r} - \mathbf{P}t - \mathbf{U}, \quad (2.69)$$

$$\text{Momento angular } \mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{u} \times \mathbf{U}. \quad (2.70)$$

Al no tener la partícula variables de orientación no podemos definir la proyección  $T_i$  del momento angular de rotación en los ejes del cuerpo.

Es precisamente la presencia de la función  $\mathbf{U}$  lo que distingue a esta partícula de la partícula puntual. La magnitud  $\mathbf{S} = \mathbf{u} \times \mathbf{U}$  representa el espín con respecto al punto  $\mathbf{r}$ . Encontramos en este ejemplo más simple que el momento lineal tampoco tiene la dirección de la velocidad  $\mathbf{u}$ , y la estructura del espín está ligada con la dependencia de la Lagrangiana de la aceleración.

Si sustituimos la solución general (2.66) en (2.67-2.70) vemos que las constantes del movimiento se pueden escribir en términos de las constantes de integración,

$$H = \frac{m}{2}\mathbf{B}^2 - \frac{m\omega^2}{2}(\mathbf{C}^2 + \mathbf{D}^2), \quad (2.71)$$

$$\mathbf{P} = m\mathbf{B}, \quad (2.72)$$

$$\mathbf{K} = m\mathbf{A}, \quad (2.73)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{A} \times m\mathbf{B} - m\omega\mathbf{C} \times \mathbf{D}. \quad (2.74)$$

El momento cinemático  $\mathbf{K}$  en (2.69) difiere del de la partícula puntual (2.14) en el término  $-\mathbf{U}$ , de tal manera que si definimos el vector  $\mathbf{k} = \mathbf{U}/m$ , con dimensiones de longitud, entonces  $\dot{\mathbf{K}} = 0$  nos lleva de (2.69) a la ecuación:

$$\mathbf{P} = m \frac{d(\mathbf{r} - \mathbf{k})}{dt},$$

y  $\mathbf{q} = \mathbf{r} - \mathbf{k}$ , define la posición del centro de masa de la partícula, que es un punto distinto de  $\mathbf{r}$  y que usando (2.64) viene dado por

$$\mathbf{q} = \mathbf{r} - \frac{1}{m}\mathbf{U} = \mathbf{r} + \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (2.75)$$

Tiene la forma (2) que poseía el centro de masa en términos del centro de carga en el análisis hecho en el preámbulo de estas notas.

Las ecuaciones dinámicas (2.65) se pueden reescribir en la forma:

$$\frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2} = 0, \quad (2.76)$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \omega^2(\mathbf{r} - \mathbf{q}) = 0, \quad (2.77)$$

donde (2.76) es (2.65) después de derivar dos veces (2.75), y la ecuación (2.77) es (2.75) habiendo puesto todos los términos en el lado izquierdo.

A partir de (2.76) vemos que el punto  $\mathbf{q}$  se mueve en línea recta y a velocidad constante, mientras que el movimiento de  $\mathbf{r}$ , dado en (2.77), es un movimiento armónico isótropo de pulsación constante  $\omega$ , alrededor del punto  $\mathbf{q}$ .

El espín de la partícula con respecto al centro de masa,  $\mathbf{S}_{CM}$  se define como

$$\mathbf{S}_{CM} = \mathbf{J} - \mathbf{q} \times \mathbf{P} = \mathbf{J} - \frac{1}{m}\mathbf{K} \times \mathbf{P}, \quad (2.78)$$

que al quedar escrito en términos de constantes del movimiento, es claramente otra constante del movimiento. Su magnitud  $S^2$  es una propiedad constante e invariante para todos los observadores inerciales, por lo que será una propiedad intrínseca que caracteriza a la partícula. En términos de las constantes de integración se expresa como

$$\mathbf{S}_{CM} = -m\omega\mathbf{C} \times \mathbf{D}. \quad (2.79)$$

A partir de su definición, obtenemos

$$\mathbf{S}_{CM} = \mathbf{u} \times \mathbf{U} + \mathbf{k} \times \mathbf{P} = -m(\mathbf{r} - \mathbf{q}) \times \frac{d}{dt}(\mathbf{r} - \mathbf{q}) = -\mathbf{k} \times m \frac{d\mathbf{k}}{dt}, \quad (2.80)$$

y aparece como un momento angular (anti)orbital del movimiento relativo del punto  $\mathbf{r}$  alrededor del centro de masa  $\mathbf{q}$  en reposo, de tal manera que el momento angular total, se escribe

$$\mathbf{J} = \mathbf{q} \times \mathbf{P} + \mathbf{S}_{CM} = \mathbf{L} + \mathbf{S}_{CM}. \quad (2.81)$$

Es la suma del momento angular orbital  $\mathbf{L}$  asociado al movimiento del centro de masa y de la parte del espín  $\mathbf{S}_{CM}$ . Para una partícula libre, ambos  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{S}_{CM}$  son separadamente constantes del movimiento. Usamos el término (anti)orbital para sugerir que si el vector  $\mathbf{k}$  representa la posición de un punto de masa  $m$ , el momento angular de este movimiento tiene la dirección opuesta a la del observable espín. Pero como veremos en seguida,  $\mathbf{k}$  no representa la posición de ninguna masa sino que se trata de la posición relativa del centro de carga de la partícula, con respecto al centro de masa.

**Ejercicio:** Verificar que las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange de la partícula con espín antiorbital (2.60) en términos de las condiciones de contorno en dos puntos  $(t_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{u}_1)$  y  $(t_2, \mathbf{r}_2, \mathbf{u}_2)$  conducen a que la función acción es

$$\begin{aligned} A(t_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{u}_1; t_2, \mathbf{r}_2, \mathbf{u}_2) &= \frac{m}{2\Delta} \left[ \frac{1}{\omega} (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)^2 \sin \omega(t_2 - t_1) + \right. \\ &+ \omega(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 \sin \omega(t_2 - t_1) - (t_2 - t_1)(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)^2 \cos \omega(t_2 - t_1) + \\ &\left. + 2(t_2 - t_1)(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1)(1 - \cos \omega(t_2 - t_1)) - 2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)(1 - \cos \omega(t_2 - t_1)) \right], \end{aligned}$$

donde  $\Delta = 2(1 - \cos \omega(t_2 - t_1)) - \omega(t_2 - t_1) \sin \omega(t_2 - t_1)$ .

### 2.2.7. Interacción con un campo electromagnético externo

Si  $\mathbf{q}$  representa la posición del centro de masa, entonces ¿qué posición representa el punto  $\mathbf{r}$ ? El punto  $\mathbf{r}$  representa la posición de la carga de la partícula. Esto lo podemos ver considerando una cierta interacción con un campo externo. La homogeneidad de la Lagrangiana en términos de las derivadas de las variables cinemáticas sugiere una Lagrangiana de interacción de la forma:

$$\tilde{L}_I = -e\phi(t, \mathbf{r})\dot{t} + e\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}}, \quad (2.82)$$

lineal en las derivadas de las variables  $t$  y  $\mathbf{r}$  y donde los potenciales externos son solamente funciones de  $t$  y  $\mathbf{r}$ . Podríamos haber considerado otros términos de interacción de la forma  $\mathbf{N}(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{u}}$ , y que también las funciones  $\phi$  y  $\mathbf{A}$  dependieran de  $\mathbf{u}$  y  $\dot{\mathbf{u}}$ . Sin embargo, si la Lagrangiana de interacción depende de  $\dot{\mathbf{u}}$  esto implica que la interacción modifica la definición del observable  $\mathbf{U} = m\mathbf{k}$  el cual define el espín. Pero si la partícula es elemental, sus propiedades intrínsecas no pueden cambiar de tal manera que (2.82) es el término de interacción más general. Es lo que se denomina el acoplamiento mínimo, entre la corriente asociada al movimiento de la carga  $j_\mu$  con los potenciales externos en la forma  $j_\mu A^\mu$ , donde la corriente  $j_\mu$  se refiere al movimiento de la carga asociada al punto  $\mathbf{r}$ , como veremos a continuación. Por lo visto en la sección 2.1.3, ni  $\phi$  ni  $\mathbf{A}$  serán funciones de  $\mathbf{u}$ , por lo que (2.82) es la interacción más general.

Las ecuaciones dinámicas que se obtienen de  $L_0 + L_I$  son

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{d^4 \mathbf{r}}{dt^4} + \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{e}{m} (\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) + \mathbf{u} \times \mathbf{B}(t, \mathbf{r})), \quad (2.83)$$

donde el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y el campo magnético  $\mathbf{B}$  se expresan en términos de los potenciales en la forma habitual,  $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ ,  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Las ecuaciones dinámicas (2.83) pueden ser separadas en la forma

$$\frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} = \frac{e}{m} (\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) + \mathbf{u} \times \mathbf{B}(t, \mathbf{r})), \quad (2.84)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \omega^2(\mathbf{r} - \mathbf{q}) = 0. \quad (2.85)$$

El centro de masa  $\mathbf{q}$  satisface ecuaciones Newtonianas bajo la acción de la fuerza de Lorentz externa, mientras que el punto  $\mathbf{r}$  sigue satisfaciendo el mismo movimiento armónico isótropo de pulsación constante  $\omega$  alrededor de  $\mathbf{q}$ . Pero la fuerza externa y los campos están definidos en el punto  $\mathbf{r}$  y no en el punto  $\mathbf{q}$ . Además, es la velocidad  $\mathbf{u}$  del punto  $\mathbf{r}$  la que aparece en el término magnético de la fuerza de Lorentz. El punto  $\mathbf{r}$  representa claramente la posición de la carga de la partícula.

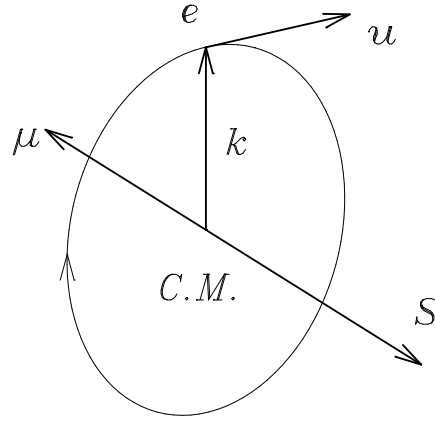


Figura 2.1: Movimiento de la carga  $e > 0$  en el sistema del C.M. El momento magnético tiene sentido contrario al espín y el momento dipolar eléctrico  $\mathbf{d} = e\mathbf{k}$ , es perpendicular al espín.

Esta carga efectúa un movimiento oscilante de muy alta frecuencia  $\omega$ , que para el electrón relativista es, como veremos,  $\omega = 2mc^2/\hbar \simeq 1,55 \times 10^{21}\text{s}^{-1}$ . El valor medio de la posición de la carga es el centro de masa pero este movimiento relativo da lugar al momento magnético  $\boldsymbol{\mu}$  de la partícula, dibujado en la figura en sentido opuesto al espín, en el supuesto de que la carga  $e > 0$  y ortogonal al plano del zitterbewegung. Su valor es, de acuerdo con su definición clásica: <sup>3</sup>

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \mathbf{j} d^3\mathbf{r} = \frac{e}{2} \mathbf{k} \times \frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\frac{e}{2m} \mathbf{S}_{CM}, \quad (2.86)$$

donde  $\mathbf{j} = e\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{k})d\mathbf{k}/dt$  es la corriente asociada al movimiento de la carga  $e$  localizada en el punto  $\mathbf{k}$ .

La partícula también posee un momento dipolar eléctrico oscilante  $\mathbf{d} = e\mathbf{k}$ , perpendicular a  $\boldsymbol{\mu}$  y por lo tanto a  $\mathbf{S}_{CM}$  para el observador del centro de masa, tal que para tiempos superiores a su período natural, su valor medio temporal es cero.

A pesar de ser éste un ejemplo no relativista, por (2.86) vemos que posee una relación giromagnética  $g = 1$ . Para que  $g \neq 1$  es necesario que exista otra componente del espín no relacionada con el movimiento de la carga. Sin embargo, es importante ver que contiene un número importante de detalles que aparecen cuando Dirac hace el análisis del electrón relativista <sup>4</sup>, donde ambos momentos  $\boldsymbol{\mu}$  y  $\mathbf{d}$  aparecen, dando lugar a dos posibles términos de interacción en el Hamiltoniano de Dirac. Regresaremos a este análisis cuando analicemos el electrón relativista.

<sup>3</sup> J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, NY (1998), 3rd. ed. p.186.

<sup>4</sup> P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum mechanics*, Oxford Univ. Press, 4th ed. (1967).

### 2.2.8. Interacción con un campo magnético uniforme externo

Consideremos la interacción de este modelo de partícula con espín (anti)orbital en un campo magnético uniforme externo  $\mathbf{B}$ . Es un ejemplo que puede resolverse de forma exacta. La ventaja de un modelo Lagrangiano es que no necesitamos postular ninguna ecuación para la dinámica del espín, la cual aparecerá como consecuencia de la dinámica de los diferentes grados de libertad. El resultado es que para el espín con respecto al centro de masa obtendremos una ecuación dinámica del tipo  $d\mathbf{S}_{CM}/dt = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$ , donde el momento magnético  $\boldsymbol{\mu}$  se expresará de forma adecuada en términos del movimiento relativo del centro de carga.

El sistema de ecuaciones (2.84-2.85) se reduce a

$$\frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2} = \frac{e}{m} \mathbf{u} \times \mathbf{B}, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \omega^2(\mathbf{r} - \mathbf{q}) = 0.$$

Con la definición de las variables  $\mathbf{v} = d\mathbf{q}/dt$ , es equivalente a un sistema lineal de doce ecuaciones diferenciales de primer orden para las componentes cartesianas de  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{v}$ . Si definimos la variable adimensional  $\tau = \omega t$ , entonces este sistema de ecuaciones depende únicamente del parámetro adimensional  $a = eB/m\omega$  que es el cociente entre la frecuencia ciclotrónica  $|\omega_c| = eB/m$  y  $\omega$ , la frecuencia natural del movimiento interno.

Si tomamos el campo magnético a lo largo del eje  $OZ$  la fuerza externa es ortogonal a él. Si llamamos  $q_3$  y  $r_3$  a las correspondientes coordenadas a lo largo de este eje, del centro de masa y del centro de carga, respectivamente, satisfacen

$$\frac{d^2q_3}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2r_3}{dt^2} + \omega^2(r_3 - q_3) = 0 \quad (2.87)$$

cuya solución general en términos de los valores iniciales  $q_3(0)$ ,  $r_3(0)$ ,  $v_3(0)$  y  $u_3(0)$  es

$$q_3(t) = q_3(0) + v_3(0)t, \quad (2.88)$$

$$r_3(t) = (r_3(0) - q_3(0)) \cos \omega t + \frac{1}{\omega}(u_3(0) - v_3(0)) \sin \omega t + q_3(0) + v_3(0)t. \quad (2.89)$$

Análogamente, las otras componentes del centro de masa en términos de la nueva variable de evolución

$$\frac{d^2q_1}{d\tau^2} = a \frac{dr_2}{d\tau}, \quad \frac{d^2q_2}{d\tau^2} = -a \frac{dr_1}{d\tau},$$

que integradas una vez obtenemos

$$\frac{dq_1}{d\tau} = ar_2 + b_1, \quad \frac{dq_2}{d\tau} = -ar_1 + b_2, \quad (2.90)$$

donde  $b_1$  y  $b_2$  son dos constantes de integración con dimensiones de longitud.

Nos queda integrar estas dos ecuaciones (2.90) y las ecuaciones de las otras dos componentes del centro de carga, que aparecen como

$$\frac{dr_1}{d\tau} = u_1, \quad \frac{dr_2}{d\tau} = u_2, \quad (2.91)$$

$$\frac{du_1}{d\tau} = q_1 - r_1, \quad \frac{du_2}{d\tau} = q_2 - r_2. \quad (2.92)$$

Como es un sistema lineal de primer orden, la matriz de este sistema en términos de las seis variables  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $u_1$  y  $u_2$ , tomadas en este orden es

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cuya ecuación característica es  $\lambda^6 + 2\lambda^4 + \lambda^2 + a^2 = 0$ . Posee seis raíces diferentes, que corresponden a los seis modos normales del sistema. Si llamamos  $\lambda = iz$ , estas variables verifican  $z^2(1 - z^2)^2 = a^2$ , por lo que si resolvemos la ecuación cúbica  $z(1 - z^2) = a$ , las seis soluciones de la forma  $\pm iz$  serán los seis valores propios del sistema. Si definimos

$$k = \frac{1}{3} \arcsin \left( \frac{3\sqrt{3}a}{2} \right), \quad (2.93)$$

los seis valores propios son  $\pm i\omega_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , donde:

$$\omega_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin k, \quad \omega_2 = -\cos k - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin k, \quad \omega_3 = \cos k - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin k. \quad (2.94)$$

Si  $3\sqrt{3}|a|/2 \leq 1$  entonces las seis raíces son imaginarias puras y el movimiento es un movimiento tri-periódico con esas tres frecuencias. En caso contrario, si existen raíces reales, la solución tiene un comportamiento exponencial. En general, para el electrón, como veremos más adelante, la frecuencia del zitterbewegung es  $\omega = 2mc^2/\hbar$ , y por lo tanto

$$a/B = e/m\omega = e\hbar/2m^2c^2 = 1,13 \times 10^{-10} \text{Tesla}^{-1},$$

por lo que incluso con campos magnéticos muy intensos, el parámetro  $a$  es muy pequeño y la solución correspondiente es oscilatoria.

La solución general del sistema completo será una combinación lineal de estas tres oscilaciones y dependerá de doce constantes de integración que se expresarán en términos de los doce valores iniciales de la posición y velocidad del centro de masa y del centro de carga. La forma de la solución para el centro de carga es:

$$\begin{aligned} r_1(\tau) &= A \cos \omega_1 \tau + B \sin \omega_1 \tau + C \cos \omega_2 \tau + D \sin \omega_2 \tau + E \cos \omega_3 \tau \\ &\quad + F \sin \omega_3 \tau + b_2/a, \\ r_2(\tau) &= B \cos \omega_1 \tau - A \sin \omega_1 \tau + D \cos \omega_2 \tau - C \sin \omega_2 \tau \\ &\quad + F \cos \omega_3 \tau - E \sin \omega_3 \tau - b_1/a, \\ r_3(t) &= (r_3(0) - q_3(0)) \cos \omega t \\ &\quad + \frac{1}{\omega} (u_3(0) - v_3(0)) \sin \omega t + q_3(0) + v_3(0)t, \end{aligned}$$

donde

$$b_1/a = v_1(0)/a\omega - r_2(0), \quad b_2/a = v_2(0)/a\omega + r_1(0).$$

Para las coordenadas del centro de masa, obtenemos:

$$\begin{aligned} q_1(\tau) &= (1 - \omega_1^2) (A \cos \omega_1 \tau + B \sin \omega_1 \tau) \\ &\quad + (1 - \omega_2^2) (C \cos \omega_2 \tau + D \sin \omega_2 \tau) \\ &\quad + (1 - \omega_3^2) (E \cos \omega_3 \tau + F \sin \omega_3 \tau) + b_2/a, \\ q_2(\tau) &= (1 - \omega_1^2) (B \cos \omega_1 \tau - A \sin \omega_1 \tau) \\ &\quad + (1 - \omega_2^2) (D \cos \omega_2 \tau - C \sin \omega_2 \tau) \\ &\quad + (1 - \omega_3^2) (F \cos \omega_3 \tau - E \sin \omega_3 \tau) - b_1/a, \\ q_3(t) &= q_3(0) + v_3(0)t. \end{aligned}$$

Las seis constantes  $A, B, C, D, E$ , y  $F$ , condimensiones de longitud, satisfacen el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ C \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2(0)/a\omega \\ -u_2(0)/\omega \\ r_1(0) - q_1(0) \end{pmatrix},$$



y

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ D \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(0)/a\omega \\ u_1(0)/\omega \\ r_2(0) - q_2(0) \end{pmatrix},$$

donde  $\mathbf{q}(0)$ ,  $\mathbf{v}(0)$  and  $\mathbf{r}(0)$ ,  $\mathbf{u}(0)$ , son, respectivamente la posición y velocidad del centro de masa y centro de carga en el instante  $t = 0$ .

Si llamamos  $N$  a la inversa de la matriz que contiene a las frecuencias, resulta ser:

$$N = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \omega_2\omega_3(\omega_3 - \omega_2) & \omega_2^2 - \omega_3^2 & \omega_3 - \omega_2 \\ \omega_1\omega_3(\omega_1 - \omega_3) & \omega_3^2 - \omega_1^2 & \omega_1 - \omega_3 \\ \omega_1\omega_2(\omega_2 - \omega_1) & \omega_1^2 - \omega_2^2 & \omega_2 - \omega_1 \end{pmatrix},$$

donde  $\Delta = (\omega_1 - \omega_2)(\omega_2 - \omega_3)(\omega_3 - \omega_1)$ , de tal manera que obtenemos la expresión final de las constantes de integración en términos de las condiciones iniciales.

A orden más bajo en el parámetro  $a$ , puesto que  $k \approx \sqrt{3}a/2$ , los modos normales son:

$$\omega_1 = a + O(a^3), \quad \omega_2 = -1 - \frac{a}{2} + \frac{3a^2}{8} + O(a^3), \quad \omega_3 = 1 - \frac{a}{2} - \frac{3a^2}{8} + O(a^3). \quad (2.95)$$

En términos de los parámetros físicos, y en la evolución temporal, estas frecuencias normales son, a orden más bajo:

$$\omega_1 = \omega_c, \quad \omega_2 = \omega - \frac{\omega_c}{2} - \frac{3\omega_c^2}{8\omega}, \quad \omega_3 = \omega + \frac{\omega_c}{2} - \frac{3\omega_c^2}{8\omega}, \quad (2.96)$$

donde  $\omega_c = eB/m$  y  $\omega$  son la frecuencia ciclotrónica y la del zitterbewegung, respectivamente.

Para expresar estos valores iniciales en términos de parámetros físicos, como el radio del movimiento interno  $R_0$ , el radio ciclotrónico  $R_c$ , la velocidad del centro de masa  $v$  o la frecuencia del zitterbewegung  $\omega$ , consideremos un electrón que se lanza con velocidad  $\mathbf{v}$ , perpendicular al campo magnético uniforme externo  $\mathbf{B}$ . Tomamos el plano  $XOY$  de tal manera que la posición inicial del centro de masa está en la coordenada  $R_c = -vm/eB$  sobre el eje  $OX$ , y la velocidad inicial  $v$  es a lo largo de la dirección positiva del eje  $OY$ . Con este convenio, el centro de masa efectúa una precesión alrededor del eje  $OZ$  con una velocidad angular  $|\omega_c|$  en la dirección positiva. Para una partícula de carga positiva la posición inicial se habría tomado en  $-|R_c|$  sobre el eje  $OX$  y la velocidad angular iría en sentido negativo del eje  $OZ$ .

La posición inicial del centro de carga se caracteriza por los tres parámetros  $\phi$ ,  $\theta$  y  $\psi$ , donde  $\theta$  y  $\phi$  representan la orientación inicial de la velocidad angular interna  $\omega$ , y el parámetro  $\psi$  es la fase inicial del centro de carga como se muestra en la Figura 2.2. Con todos estos valores nulos,  $\boldsymbol{\omega}$  apunta a lo largo del eje  $OZ$  y la posición del centro de carga es el punto  $R_c + R_0$  sobre el eje  $OX$ .

Estos valores iniciales, escritos en forma matricial son:

$$\mathbf{q}(0) = \begin{pmatrix} R_c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}(0) = \begin{pmatrix} R_c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{R}_{OZ}(\phi)\mathcal{R}_{OY}(\theta)\mathcal{R}_{OZ}(\psi) \begin{pmatrix} R_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{R}_{OZ}(\phi)\mathcal{R}_{OY}(\theta)\mathcal{R}_{OZ}(\psi) \begin{pmatrix} 0 \\ \omega R_0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde  $\mathcal{R}_{OZ}(\alpha)$  representa una rotación en sentido activo, de valor  $\alpha$  alrededor del eje  $OZ$ . Como el espín antiorbital tiene su orientación opuesta a la de la velocidad angular, su valor inicial es

$$\mathbf{S}_{CM}(0) = \mathcal{R}_{OZ}(\phi)\mathcal{R}_{OY}(\theta) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -S \end{pmatrix}, \quad (2.97)$$

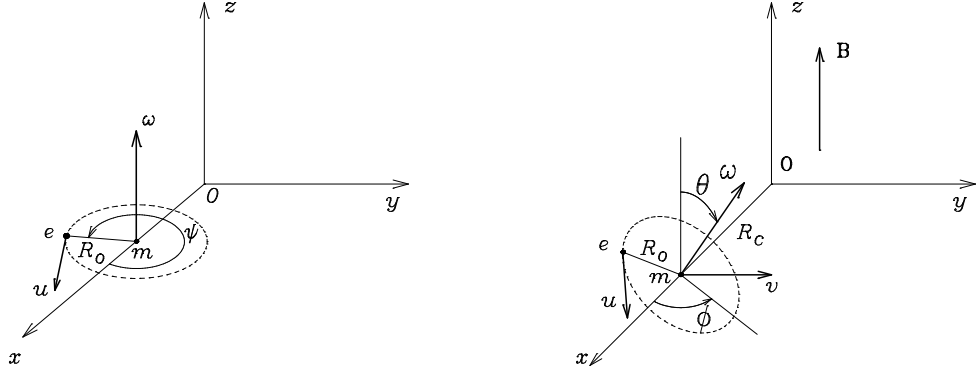


Figura 2.2: Fase inicial  $\psi$  del centro de carga y orientación inicial  $(\theta, \phi)$  de la velocidad angular  $\omega$ .

donde  $S = m\omega R_0^2$ . Entonces, las condiciones iniciales para determinar los coeficientes de la solución general son:

$$\begin{pmatrix} -v_2(0)/a\omega \\ -u_2(0)/\omega \\ r_1(0) - q_1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_c \\ aR_c - \alpha R_0 \\ \beta R_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_1(0)/a\omega \\ u_1(0)/\omega \\ r_2(0) - q_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma R_0 \\ \delta R_0 \end{pmatrix},$$

donde  $R_c = -vm/eB$ ,  $\omega_c = -eB/m = -a\omega$ , como anteriormente, y los parámetros constantes:

$$\begin{aligned} \alpha &= -\sin \phi \cos \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi, \\ \beta &= \cos \phi \cos \theta \cos \psi - \sin \phi \sin \psi, \\ \gamma &= -\cos \phi \cos \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi, \\ \delta &= \sin \phi \cos \theta \cos \psi + \cos \phi \sin \psi. \end{aligned}$$

A orden más bajo en  $a$ , las frecuencias son:

$$\begin{aligned} \omega_1 - \omega_2 &= 1 + \frac{3}{2}a, & \omega_2 - \omega_3 &= -2, & \omega_3 - \omega_1 &= 1 - \frac{3}{2}a, \\ \omega_1 + \omega_2 &= -1 + \frac{a}{2}, & \omega_2 + \omega_3 &= -a, & \omega_3 + \omega_1 &= 1 + \frac{a}{2}, \\ \omega_1\omega_2 &= -a \left(1 + \frac{a}{2}\right), & \omega_2\omega_3 &= -\left(1 - \frac{a^2}{4}\right), & \omega_3\omega_1 &= a \left(1 - \frac{a}{2}\right), \end{aligned}$$

y la inversa de la matriz  $N$ , a orden  $O(a^2)$ , es

$$N = \begin{pmatrix} 1 + 2a^2 & -a & -1 - 9a^2/4 \\ a/2 - a^2 & -1/2 + a/2 - 3a^2/4 & 1/2 - 3a/4 + 9a^2/8 \\ -a/2 - a^2 & 1/2 + a/2 + 3a^2/4 & 1/2 + 3a/4 + 9a^2/8 \end{pmatrix}.$$

De esta forma, los coeficientes de la solución general, a primer orden en  $a$ , son:

$$\begin{aligned} A &= R_c - \beta R_0 + aR_0\alpha, \\ B &= -R_0(a\gamma + \delta), \\ C &= \frac{R_0}{2}(\alpha + \beta) - \frac{aR_0}{4}(2\alpha + 3\beta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D &= \frac{R_0}{2}(\delta - \gamma) + \frac{aR_0}{4}(2\gamma - 3\delta), \\
E &= \frac{R_0}{2}(\beta - \alpha) + \frac{aR_0}{4}(3\beta - 2\alpha), \\
F &= \frac{R_0}{2}(\delta + \gamma) + \frac{aR_0}{4}(2\gamma + 3\delta),
\end{aligned}$$

y los coeficientes

$$b_1/a = -\delta R_0, \quad b_2/a = \beta R_0.$$

Este movimiento depende del radio ciclotrónico  $R_c$ , a través del parámetro  $A$ , y el resto de los términos dependen del radio interno  $R_0$ .

La solución general, despreciando términos de orden  $aR_0$ , se puede escribir en forma vectorial como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) &= \mathcal{R}_{OZ}(\omega_c t) \begin{pmatrix} R_c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (\mathbb{I} - \mathcal{R}_{OZ}(\omega_c t)) \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} R_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&+ \mathcal{R}_{OZ}\left(-\frac{\omega_c t}{2}\right) \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi + \omega t) \begin{pmatrix} R_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + O(aR_0),
\end{aligned}$$

donde  $\mathbb{I}$  es la matriz unidad  $3 \times 3$  y  $\mathcal{R}(\phi, \theta, \psi) \equiv \mathcal{R}_{OZ}(\phi)\mathcal{R}_{OY}(\theta)\mathcal{R}_{OZ}(\psi)$ . Los dos primeros términos representan el movimiento del centro de masa a este orden de aproximación, mientras que el tercero es precisamente el movimiento relativo del centro de carga alrededor del centro de masa. La contribución a orden  $aR_0$ , que hemos despreciado, se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
&O(aR_0) \\
&= -J_z \left[ \mathcal{R}_{OZ}(\omega_c t) \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi) - \mathcal{R}_{OZ}\left(-\frac{\omega_c t}{2}\right) \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi + \omega t) \right] \begin{pmatrix} 0 \\ aR_0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&- J_z \left[ \frac{\sin(\omega t)}{2} \mathcal{R}_{OZ}\left(-\frac{\omega_c t}{2}\right) \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} aR_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right],
\end{aligned}$$

donde

$$J_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

es la matriz  $3 \times 3$ , generadora de las rotaciones alrededor del eje  $OZ$ . Los dos primeros términos representan la corrección a este orden, del movimiento del centro de masa, y el tercero es la corrección del movimiento relativo interno. La presencia del generador  $J_z$  en este término, implica que esta corrección no produce ninguna contribución al movimiento alrededor del eje  $OZ$ . La solución alrededor de  $OZ$  es exactamente:

$$q_3(t) = 0, \quad r_3(t) = -R_0 \sin \theta \cos(\omega t + \psi), \quad (2.98)$$

es decir, un movimiento armónico de amplitud  $R_0 \sin \theta$ , y frecuencia  $\omega$ .

La posición relativa del centro de carga con respecto al centro de masa verifica:

$$\mathbf{k}(t) = \mathcal{R}_{OZ}\left(-\frac{\omega_c t}{2}\right) \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi + \omega t) \begin{pmatrix} R_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-J_z \left[ \frac{\sin(\omega t)}{2} \mathcal{R}_{OZ} \left( -\frac{\omega_c t}{2} \right) \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} aR_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \quad (2.99)$$

y si despreciamos las contribuciones al orden  $aR_0$ , se reduce al primer término

$$\mathbf{k}(t) \approx \mathcal{R}_{OZ} \left( -\frac{\omega_c t}{2} \right) \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi + \omega t) \begin{pmatrix} R_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.100)$$

que representa una oscilación con la frecuencia natural  $\omega$  del zitterbewegung alrededor del eje inicial del espín, y con una precesión hacia atrás con la velocidad angular  $\omega_c/2$ .

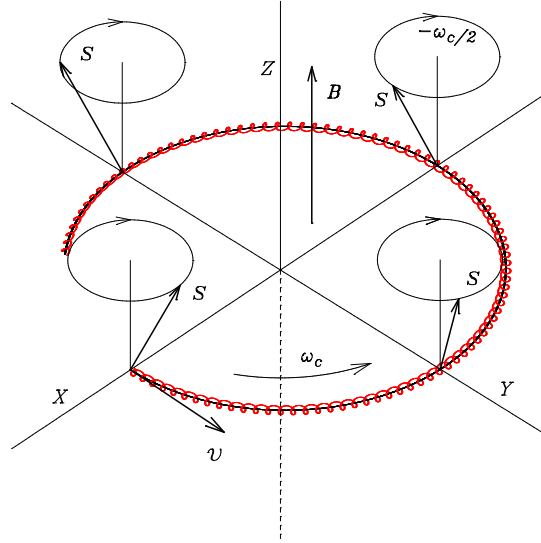


Figura 2.3: Movimiento del centro de masa y centro de carga (en rojo) de una partícula negativamente cargada, en un campo magnético uniforme. El espín con respecto al centro de masa precesa en sentido contrario del movimiento ciclotrónico y con la mitad de la velocidad angular. La velocidad del centro de masa es perpendicular al campo.

La trayectoria de los centros de masa y carga se ha dibujado en la Figura 2.3, donde el movimiento rizado representa la trayectoria del centro de carga.

Para el estudio de la dinámica del espín con respecto al centro de masa, sustituiremos la solución general en su definición analítica

$$\mathbf{S}_{CM}(t) = -m\mathbf{k}(t) \times \frac{d\mathbf{k}(t)}{dt}, \quad (2.101)$$

donde lo único que tenemos que calcular es la derivada (2.100). Para este cálculo, tenemos que tener en cuenta que

$$\mathcal{R}_{OZ}(\omega t) = \exp(J_z \omega t),$$

y por lo tanto

$$\dot{\mathcal{R}}_{OZ}(\omega t) = \exp(J_z \omega t) J_z \omega = \mathcal{R}_{OZ}(\omega t) J_z \omega = J_z \omega \mathcal{R}_{OZ}(\omega t).$$

Tomando la derivada de (2.100) obtenemos los siguientes términos:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{k}}{dt} &= \mathcal{R}_{OZ} \left( -\frac{\omega_c t}{2} \right) J_z \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi + \omega t) \begin{pmatrix} -\omega_c R_0/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \mathcal{R}_{OZ} \left( -\frac{\omega_c t}{2} \right) \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi + \omega t) \begin{pmatrix} 0 \\ \omega R_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.102)$$

donde

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \omega R_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \omega J_z \begin{pmatrix} R_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.103)$$

De todos estos términos, el primero es de orden  $\omega_c R_0 = v R_0 / R_c = a \omega R_0 = ac$ , que incluso con campos magnéticos intensos se puede despreciar.

La dinámica del espín con respecto al centro de masa se reduce a:

$$\mathbf{S}_{CM}(t) = \mathcal{R}_{OZ} \left( -\frac{\omega_c t}{2} \right) \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi + \omega t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m\omega R_0^2 \end{pmatrix} = \mathcal{R}_{OZ} \left( -\frac{\omega_c t}{2} \right) \mathbf{S}_{CM}(0), \quad (2.104)$$

donde  $\mathbf{S}_{CM}(0)$  viene dado en (2.97). El espín con respecto al centro de masa precesa hacia atrás con la mitad de la velocidad angular del movimiento ciclotrónico mientras que su valor absoluto permanece constante a este orden de aproximación. En la Figura 2.4 representamos esta evolución durante el mismo intervalo temporal que la de la Figura 2.3 con una orientación inicial  $\theta = 30^\circ$  y  $\phi = 90^\circ$ , donde podemos observar, además de la precesión con velocidad angular constante, una pequeña nutación, al siguiente orden de aproximación.

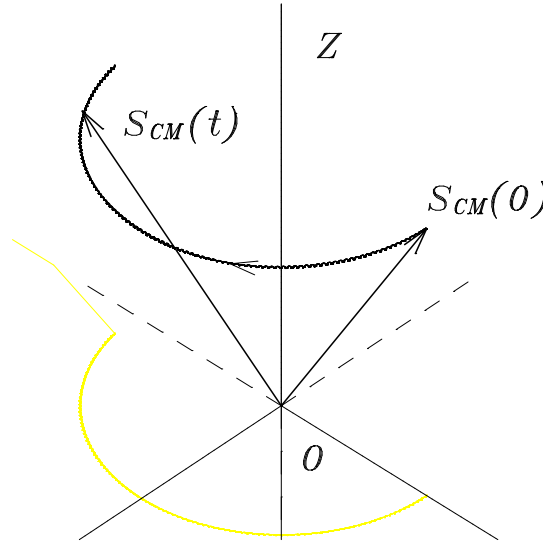


Figura 2.4: Precesión del espín con respecto al centro de masa  $\mathbf{S}_{CM}$ , alrededor del eje  $OZ$ .

La energía del sistema es

$$H = -T - \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{U}}{dt}, \quad (2.105)$$

que se puede expresar como:

$$H = \frac{m}{2} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 - \frac{m}{2\omega^2} \left( \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right)^2 + \frac{m}{\omega^2} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} + eV(\mathbf{r}, t),$$

y, como  $V(\mathbf{r}, t) = 0$  en presencia de un campo magnético constante, resulta:

$$H = \frac{m}{2} \left( \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right)^2 - \frac{m}{2} \left( \frac{d\mathbf{k}}{dt} \right)^2 - \frac{m\omega^2}{2} \mathbf{k}^2 = \frac{(\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2}{2m} + H_0. \quad (2.106)$$

A orden más bajo, la contribución proviene de

$$\mathbf{q}(t) = \mathcal{R}_{OZ}(\omega_c t) \begin{pmatrix} R_c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (\mathbb{I} - \mathcal{R}_{OZ}(\omega_c t)) \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} R_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathcal{R}_{\text{OZ}}(\omega_c t) \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} - \mathcal{R}_{\text{OZ}}(\omega_c t) J_z \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} \omega_c R_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de tal manera que teniendo en cuenta (2.99) y (2.102)

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{q}}{dt}\right)^2 &= v^2 + \left[ J_z \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} \omega_c R_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^2 \\ &\quad - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[ J_z \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} \omega_c R_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \\ \left(\frac{d\mathbf{k}}{dt}\right)^2 &= \omega^2 R_0^2 + \left[ J_z \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi + \omega t) \begin{pmatrix} -\omega_c R_0/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^2 \\ &+ 2 \left[ J_z \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi + \omega t) \begin{pmatrix} -\omega_c R_0/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \left[ \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi + \omega t) \begin{pmatrix} 0 \\ \omega R_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Como

$$\mathcal{R}(\phi, \theta, \psi + \omega t) = \begin{pmatrix} \beta(t) & \gamma(t) & \cos \phi \sin \theta \\ \delta(t) & \alpha(t) & \sin \phi \sin \theta \\ -\sin \theta \cos(\omega t + \psi) & \sin \theta \sin(\omega t + \psi) & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$J_z \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi + \omega t) = \begin{pmatrix} -\delta(t) & -\alpha(t) & -\sin \phi \sin \theta \\ \beta(t) & \gamma(t) & \cos \phi \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= -\sin \phi \cos \theta \sin(\psi + \omega t) + \cos \phi \cos(\psi + \omega t), \\ \beta(t) &= \cos \phi \cos \theta \cos(\psi + \omega t) - \sin \phi \sin(\psi + \omega t), \\ \gamma(t) &= -\cos \phi \cos \theta \sin(\psi + \omega t) - \sin \phi \cos(\psi + \omega t), \\ \delta(t) &= \sin \phi \cos \theta \cos(\psi + \omega t) + \cos \phi \sin(\psi + \omega t) \end{aligned}$$

entonces

$$J_z \mathcal{R}(\phi, \theta, \psi + \omega t) \begin{pmatrix} \omega_c R_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \omega_c R_0 \begin{pmatrix} -\delta(t) \\ \beta(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{q}}{dt}\right)^2 &= v^2 + \omega_c^2 R_0^2 (\delta(0)^2 + \beta(0)^2) - 2v\omega_c R_0 \beta(0), \\ \left(\frac{d\mathbf{k}}{dt}\right)^2 &= \omega^2 R_0^2 + \frac{\omega_c^2 R_0^2}{4} (\delta(t)^2 + \beta(t)^2) + \omega\omega_c R_0^2 (\delta(t)\gamma(t) - \beta(t)\alpha(t)). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \delta(t)\gamma(t) - \beta(t)\alpha(t) &= -\cos \theta, \\ \delta(0)^2 + \beta(0)^2 &= 1 - \sin^2 \theta \cos^2 \psi, \\ \delta(t)^2 + \beta(t)^2 &= 1 - \sin^2 \theta \cos^2(\psi + \omega t), \end{aligned}$$

si expresamos  $\omega_c$  en términos del parámetro  $a$ ,  $\omega_c = -a\omega$ , en el caso del electrón  $\omega R_0 = c$ , la energía a orden más bajo en  $a$  es:

$$H = H_0 - a \left( \frac{mc^2 \cos \theta}{2} - mvc\beta(0) \right) + a^2 \frac{mc^2}{2} \left( \delta(0)^2 + \beta(0)^2 - \frac{1}{4}(\delta(t)^2 + \beta(t)^2) \right).$$

Al orden más bajo, la energía de interacción se puede poner como:

$$H_I = -\frac{1}{2}amc^2 \cos \theta = -\frac{eB}{2m} \frac{mc^2}{\omega} \cos \theta = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}, \quad (2.107)$$

y como  $S = m\omega R_0^2 = mc^2/\omega$ ,  $S_z = -S \cos \theta$ , implica que

$$\mu_z = \frac{eS \cos \theta}{2m} = -\frac{eS_z}{2m}, \quad (2.108)$$

o bien

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{2m} \mathbf{S}_{CM}. \quad (2.109)$$

La energía de interacción se puede también escribir como:

$$H_I = -\frac{eB}{2m} S \cos \theta = \frac{e}{2m} \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}_{CM} = \frac{-\omega_c}{2} \cdot \mathbf{S}_{CM}, \quad (2.110)$$

i.e., como el producto escalar del espín con respecto al centro de masa y la velocidad angular de precesión del espín.

Desde otro punto de vista, si suponemos que la relación entre el espín y el momento magnético viene dada por (2.109), y que la dinámica del momento angular con respecto al centro de masa viene dada por la ecuación del momento

$$\frac{d\mathbf{S}_{CM}}{dt} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} = -\frac{e}{2m} \mathbf{S}_{CM} \times \mathbf{B} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{S}_{CM}.$$

La velocidad angular constante de precesión del espín, es la frecuencia angular de Larmor

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{e\mathbf{B}}{2m} = -\frac{\boldsymbol{\omega}_c}{2},$$

ya que  $\boldsymbol{\omega}_c = -e\mathbf{B}/m$ , i.e., de valor mitad y dirección opuesta a la velocidad angular ciclotrónica, como se pone de manifiesto en la Figura 2.4. Esto produce la contribución a primer orden, ya que a este orden el espín conserva su valor absoluto. Sin embargo, esta hipótesis no contiene los términos adicionales de corrección a los modos normales  $\omega_i$ , que pueden ser relevantes en procesos de alta energía, y que se pueden obtener usando la solución general exacta.

### 2.2.9. Partícula Galileana con orientación

Otro ejemplo simple de partícula con espín es aquél en el que el espín está relacionado con las variables de orientación.

Desde el punto de vista matemático, el espacio cinemático es el  $X = \mathcal{G}/\mathbb{R}_v^3$ , donde  $\mathbb{R}_v^3 \equiv \{\mathbb{R}^3, +\}$  es el sugbrupo Abelian de las transformaciones Galileanas puras con velocidad constante. De esta forma, las variables cinemáticas son  $x \equiv (t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})$ , que se interpretan como el tiempo, la posición y la orientación, respectivamente.

Una Lagrangiana para este espacio cinemático tiene la forma general

$$\tilde{L} = T\dot{t} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Debido a la estructura del exponente (2.240), la función gauge es la misma que en los ejemplos anteriores. La relación general (2.57) nos lleva a que  $\mathbf{W} \times \boldsymbol{\omega} = 0$ , ya que la Lagrangiana es independiente de  $\dot{\mathbf{u}}$ , y por lo tanto  $\mathbf{W}$  y  $\boldsymbol{\omega}$  son colineales. De acuerdo con la forma de transformar de la Lagrangiana, el término  $\mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\omega}$  es invariante Galileano y como  $\mathbf{W}$  y  $\boldsymbol{\omega}$  son colineales, podemos tomar  $\mathbf{W} \sim \boldsymbol{\omega}$  y una posible Lagrangiana puede ser de la forma:

$$\tilde{L} = \frac{m}{2} \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{\dot{t}} + \frac{I}{2} \frac{\boldsymbol{\omega}^2}{\dot{t}}. \quad (2.111)$$

Las diferentes constantes del movimiento Noetherianas son

$$H = \frac{m}{2} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 + \frac{I}{2} \Omega^2, \quad \mathbf{P} = m\mathbf{u},$$

$$\mathbf{K} = m\mathbf{r} - \mathbf{P}t, \quad \mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{W},$$

donde  $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$  es la velocidad del punto  $\mathbf{r}$ , y  $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}/\dot{t}$  es la velocidad angular en términos de la evolución temporal, frente a la  $\boldsymbol{\omega}$  que representa la velocidad angular pero no con respecto al tiempo sino con respecto al parámetro de evolución arbitrario  $\tau$ . El punto  $\mathbf{r}$  se mueve con velocidad constante y representa tanto la posición del centro de carga como la posición del centro de masa. El espín con respecto al centro de masa es el observable  $\mathbf{S} \equiv \mathbf{W}$  que satisface la ecuación dinámica  $d\mathbf{S}/dt = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S} = 0$ , y por lo tanto, el sistema cartesiano local asociado al punto  $\mathbf{r}$  rota con velocidad angular constante  $\boldsymbol{\Omega}$ .

El espín toma el valor constante  $\mathbf{S} = I\boldsymbol{\Omega}$ , y cuyo valor absoluto es independiente del observador inercial. El parámetro  $I$  juega el papel de momento principal de inercia, lo que sugiere una proporcionalidad directa entre el espín y la velocidad angular, lo que corresponde a un sistema mecánico con simetría esférica. Podríamos asociar un cierto tamaño a la partícula ya que sugiere que posee un radio de giro  $R_0$ , relacionado con los otros parámetros por  $I = mR_0^2$ .

Este modelo correspondería clásicamente a un sólido rígido con simetría esférica (los tres momentos principales de inercia iguales) de tal manera que las variables de orientación  $\boldsymbol{\rho}$  describen la orientación de sus ejes principales de inercia. Es una partícula de seis grados de libertad. Tres representan la posición del centro de carga  $\mathbf{r}$  y los otros tres  $\boldsymbol{\rho}$ , la orientación de un sistema cartesiano, comóvil, ligado al punto  $\mathbf{r}$ . Como no hay dependencia de la Lagrangiana de la aceleración los centros de carga y centro de masa, son el mismo punto.

Para el observador del centro de masa no existe corriente asociada al movimiento del centro de carga, por lo que no es posible asociarle ni momento magnético ni momento dipolar eléctrico. Por lo visto en los ejemplos anteriores, las propiedades magnéticas de la partícula están asociadas con la parte del espín relacionada con el zitterbewegung, y están ausentes en este modelo de tipo sólido rígido.

## PARTÍCULAS RELATIVISTAS

### 2.3. Partícula puntual relativista

El grupo cinemático asociado al Principio de Relatividad Restringido es el grupo de Poincaré. Ver el Apéndice al final del capítulo sobre el grupo de Poincaré para la notación y propiedades que vamos a usar en este capítulo.

Consideremos un espacio cinemático caracterizado por las variables  $(t, \mathbf{r}) \equiv x$ , con dominios  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ , similares a los parámetros del grupo  $b$  y  $\mathbf{a}$ , respectivamente. Este espacio



cinemático es la estructura cociente  $X = \mathcal{P}/\mathcal{L}$ , donde  $\mathcal{P}$  es el grupo de Poincaré y el subgrupo  $\mathcal{L}$  es el grupo de Lorentz. Supondremos que son funciones de un cierto parámetro de evolución  $\tau$  y que en cualquier instante  $\tau$  de la evolución dos observadores inerciales cualesquiera relacionan sus medidas espacio-temporales mediante la acción del elemento del grupo  $g \equiv (b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{P}$ , dada por:

$$t'(\tau) = \gamma t(\tau) + \gamma(\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{r}(\tau))/c^2 + b, \quad (2.112)$$

$$\mathbf{r}'(\tau) = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{r}(\tau) + \gamma\mathbf{v}t(\tau) + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)c^2}(\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{r}(\tau))\mathbf{v} + \mathbf{a}, \quad (2.113)$$

Estas variables se interpretan como el tiempo y la posición de la partícula. Si el parámetro de evolución  $\tau$  es invariante bajo el grupo tomando las derivadas con respecto a  $\tau$  de (2.112) y (2.113) obtenemos la ley de transformación de las derivadas de las variables cinemáticas

$$\dot{t}'(\tau) = \gamma\dot{t}(\tau) + \gamma(\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\dot{\mathbf{r}}(\tau))/c^2, \quad (2.114)$$

$$\dot{\mathbf{r}}'(\tau) = R(\boldsymbol{\mu})\dot{\mathbf{r}}(\tau) + \gamma\mathbf{v}\dot{t}(\tau) + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)c^2}(\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\dot{\mathbf{r}}(\tau))\mathbf{v}. \quad (2.115)$$

La velocidad del punto  $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$  transforma entre observadores inerciales como

$$\mathbf{u}'(\tau) = \frac{\dot{\mathbf{r}}'}{\dot{t}'} = \frac{R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{u}(\tau) + \gamma\mathbf{v} + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)c^2}(\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{u}(\tau))\mathbf{v}}{\gamma(1 + \mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{u}(\tau)/c^2)}. \quad (2.116)$$

De la misma manera obtendríamos la ley de transformación de las sucesivas derivadas temporales, como la aceleración, etc.

Si a partir de (2.116) calculamos el módulo de la velocidad, resulta:

$$u'^2 = \frac{u^2 - c^2}{\gamma^2(1 + \mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{u}(\tau)/c^2)^2} + c^2. \quad (2.117)$$

En principio el valor de la velocidad del punto no está restringido, pero si  $u < c$  entonces  $u' < c$  para todo observador inercial, y lo mismo si  $u > c$ ,  $u' > c$  y también si  $u = c$  resulta que  $u' = c$ . La formulación relativista nos brinda la descripción de tres tipos diferentes de partículas puntuales, según que su velocidad  $u$  sea  $u < c$ ,  $u = c$  o  $u > c$ , para todo observador inercial. Para los casos  $u = c$  y  $u > c$  no es posible encontrar un observador en reposo respecto de ellas, ya que el parámetro  $\mathbf{v}$  del grupo de Poincaré satisface  $v < c$ .

No existen ligaduras entre estas variables y solamente la homogeneidad de la Lagrangiana en términos de las derivadas de las variables cinemáticas nos reducen de cuatro a tres el número de grados de libertad de la partícula. Esta homogeneidad nos lleva a la forma general:

$$\tilde{\mathcal{L}} = T\dot{t} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}}, \quad (2.118)$$

donde  $T = \partial\tilde{\mathcal{L}}/\partial\dot{t}$  y  $R_i = \partial\tilde{\mathcal{L}}/\partial\dot{r}_i$  son todavía funciones desconocidas de las variables cinemáticas y de sus derivadas, tanto si la partícula es libre o está en interacción. Además, son funciones homogéneas de grado cero de las derivadas de las variables cinemáticas, por lo que son funciones de  $(t, \mathbf{r}, \mathbf{u})$  y debido a esta homogeneidad no son totalmente independientes pues satisfacen como en el caso Galileano las ecuaciones (2.6).

### 2.3.1. Partícula puntual libre

Si la partícula es libre, las ecuaciones dinámicas son invariantes bajo  $\mathcal{P}$ , y también la Lagrangiana porque el grupo de Poincaré no posee exponentes no triviales y las posibles funciones gauge asociadas a su transformación son nulas.

Desde el punto de vista de las transformaciones infinitesimales, como  $\tilde{L}_0(t, \mathbf{r}, \dot{t}, \dot{\mathbf{r}})$  depende de estas variables que transforman según (2.112-2.115), los diferentes generadores del grupo de Poincaré al actuar sobre funciones de estas variables son:

$$H = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{P} = \nabla, \quad \mathbf{J} = \mathbf{r} \times \nabla + \dot{\mathbf{r}} \times \nabla_{\dot{\mathbf{r}}}, \quad \mathbf{K} = \frac{\mathbf{r}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} + t \nabla + \frac{\dot{\mathbf{r}}}{c^2} \frac{\partial}{\partial \dot{t}} + t \nabla_{\dot{\mathbf{r}}},$$

como en el caso Galileano, salvo el generador de los boosts  $\mathbf{K}$ , que tiene una estructura diferente porque la transformación de velocidad  $\mathbf{v}$  afecta no solo a las variables espaciales  $\mathbf{r}$  y  $\dot{\mathbf{r}}$  como en el caso Galileano, sino que también a las variables temporales  $t$  y  $\dot{t}$ .

Si  $H\tilde{L}_0 = 0$  y  $\mathbf{P}\tilde{L}_0 = 0$ , implica que  $\tilde{L}_0$  no es función de  $t$  ni de  $\mathbf{r}$ . Además  $\mathbf{J}\tilde{L}_0 = 0$  implica que es función de  $\dot{\mathbf{r}}^2$  y también de  $\dot{t}$  para ser homogénea de grado 1. Finalmente, si es invariante bajo los boosts Lorentzianos  $\mathbf{K}\tilde{L}_0 = 0$ , lo que implica que

$$\left( \frac{\dot{\mathbf{r}}}{c^2} \frac{\partial}{\partial \dot{t}} + t \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} \right) \tilde{L}_0 = 0,$$

que nos lleva a que  $\tilde{L}_0$  es una función arbitraria de  $c^2 \dot{t}^2 - \dot{\mathbf{r}}^2$ . Además hay que exigirle que sea homogénea de grado 1 en estas derivadas y que tenga dimensiones de acción. Una posibilidad es que sea de la forma  $s\sqrt{c^2 \dot{t}^2 - \dot{\mathbf{r}}^2}$ , con  $s$  un parámetro de dimensiones de masa×velocidad, por ejemplo  $mc$ .

Como la Lagrangiana es invariante bajo  $\mathcal{P}$ , desde el punto de vista de transformaciones finitas, las funciones  $T$  y  $\mathbf{R}$  transforman bajo  $\mathcal{P}$  en la forma:

$$T' = \gamma T - \gamma(\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{R}), \quad (2.119)$$

$$\mathbf{R}' = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{R} - \gamma \mathbf{v} T / c^2 + \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} (\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{R}) \mathbf{v} / c^2. \quad (2.120)$$

Donde vemos que, al no depender estas ecuaciones de  $b$  y  $\mathbf{a}$ , las funciones  $T$  y  $\mathbf{R}$  son invariantes bajo traslaciones y, por lo tanto, independientes de  $t$  y de  $\mathbf{r}$ .

Los momentos conjugados de las variables generalizadas  $q_i = r_i$  son  $p_i = \partial \tilde{L}_0 / \partial \dot{r}_i$ , y las constantes del movimiento Noetherianas se calculan de forma similar al caso Galileano. La única diferencia es que ahora la función gauge es nula, y para el cálculo del momento cinemático tenemos que las transformaciones infinitesimales son  $\delta t = \mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{v} / c^2$ ,  $M_i = r_i / c^2$  y  $\delta \mathbf{r} = t \delta \mathbf{v}$ ,  $M_{ij} = t \delta_{ij}$  por lo que obtenemos:

$$\text{Momento temporal } H = -T, \quad (2.121)$$

$$\text{Momento lineal } \mathbf{P} = \mathbf{R} = \mathbf{p}, \quad (2.122)$$

$$\text{Momento cinemático } \mathbf{K} = H\mathbf{r}/c^2 - \mathbf{P}t, \quad (2.123)$$

$$\text{Momento angular } \mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}. \quad (2.124)$$

La energía (momento temporal) y el momento lineal transforman como:

$$H'(\tau) = \gamma H(\tau) + \gamma(\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{P}(\tau)), \quad (2.125)$$

$$\mathbf{P}'(\tau) = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{P}(\tau) + \frac{\gamma \mathbf{v}}{c^2} H(\tau) + \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma)c^2} (\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{P}(\tau)) \mathbf{v}. \quad (2.126)$$

Es decir, como las componentes de un tetravector contravariante  $P^\mu \equiv (H/c, \mathbf{P})$ . Los observables  $c\mathbf{K}$  y  $\mathbf{J}$  son las componentes esenciales del tensor antisimétrico  $J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu} = x^\mu P^\nu - x^\nu P^\mu$ ,  $cK_i = J^{i0}$  y  $J_k = \epsilon_{kil} J^{il} / 2$ .

Tomando la derivada  $\tau$  del momento cinemático,  $\dot{\mathbf{K}} = 0$ , obtenemos que  $\mathbf{P} = H\dot{\mathbf{r}}/c^2 \dot{t} = H\mathbf{u}/c^2$ , donde  $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{r}}/\dot{t}$  es la velocidad de la partícula y el punto  $\mathbf{r}$  representa tanto la posición de la carga como el centro de masa.

Las seis condiciones  $\mathbf{P} = 0$  y  $\mathbf{K} = 0$ , implican  $\mathbf{u} = 0$  y  $\mathbf{r} = 0$ , de manera que la partícula está en reposo y localizada en el origen del sistema de referencia, como en el caso no relativista. Denominamos a estos observadores la clase de observadores del centro de masa.

De (2.125) y (2.126) vemos que la magnitud  $(H'/c)^2 - \mathbf{P}'^2 = (H/c)^2 - \mathbf{P}^2$  es invariante Poincaré y además una constante del movimiento. Como  $\mathbf{P}^2 = (H/c)^2 u^2/c^2$ , con  $u < c$ , esto implica que este invariante sea definido positivo, de dimensiones masa  $\times$  velocidad al cuadrado, y lo escribamos como el cuadrado  $(mc)^2$  en términos de una magnitud constante, la masa de la partícula que la tomamos como el número positivo  $m$ . Despejando  $H$ , obtenemos dos posibilidades

$$H = \pm mc^2(1 - u^2/c^2)^{-1/2} = \pm\gamma(u)mc^2.$$

De aquí que  $\mathbf{P} = \pm\gamma(u)m\mathbf{u}$ . Vamos a ver que el signo de  $H$ , que puede ser positivo o negativo, es otra propiedad invariante Poincaré.

Para el observador del centro de masa,  $\mathbf{P} = 0$ , por lo que  $H = \pm mc^2$ . Si  $H > 0$  para el observador del centro de masa, entonces de (2.125) se tiene que para cualquier otro observador,  $H' = \gamma H \geq H > 0$ , pues  $\gamma \geq 1$ . Si  $H < 0$ , entonces también  $H' = \gamma H \leq H < 0$ . El signo de  $H$  es otra propiedad invariante entre observadores.

La velocidad  $u < c$ , porque en caso contrario  $H$  sería imaginario. Si  $u > c$  el invariante  $(H/c)^2 - \mathbf{P}^2 < 0$  y no es posible definir la masa en reposo de la partícula. Si sustituímos las expresiones de  $T$  y  $\mathbf{R}$  en (2.118), obtenemos dos posibles Lagrangianas para una partícula puntual libre de masa  $m$ , caracterizadas además, por el signo de  $H$

$$\tilde{L}_0 = \mp mc\sqrt{c^2\dot{t}^2 - \dot{\mathbf{r}}^2}. \quad (2.127)$$

La partícula que describe la Lagrangiana (2.127) con el signo  $+$ , posee un momento temporal  $H < 0$ , y la de signo  $-$ ,  $H > 0$ . Partículas y antipartículas aparecen de forma más simétrica en la formulación relativista. Si desarrollamos la Lagrangiana al orden más bajo en  $u/c$ , en el caso  $H > 0$ , obtenemos

$$\tilde{L}_0 = -mc^2\dot{t} + \frac{m}{2} \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{\dot{t}},$$

por lo que el primer término  $-mc^2\dot{t}$  es equivalente al término Galileano  $-H_0\dot{t}$  de (2.18). La Lagrangiana con  $H < 0$  posee como límite de baja velocidad  $-(m/2)\dot{\mathbf{r}}^2/\dot{t}$  que no aparece descrita como un posible ejemplo en el caso Galileano. Ver la sección 2.7 para la diferencia entre partículas y antipartículas por lo que respecta a su interacción.

El espín con respecto al centro de masa se define similarmente al caso no relativista

$$\mathbf{S}_{CM} \equiv \mathbf{J} - \mathbf{q} \times \mathbf{P} = \mathbf{J} - \frac{c^2}{H} \mathbf{K} \times \mathbf{P} = 0, \quad (2.128)$$

es nulo, por lo que la partícula puntual relativista no posee espín.

## 2.4. Partículas relativistas con espín

Los espacios homogéneos de mayor dimensión de  $\mathcal{P}$ , pueden ser parametrizados por las variables  $(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ , donde el parámetro velocidad  $\mathbf{u}$  puede ser  $u < c$ ,  $u = c$ , o bien  $u > c$ , por lo que el grupo de Poincaré describe tres tipos maximales de partículas con espín. Las denominaremos, de acuerdo con el valor de este parámetro, por los nombres siguientes: al primer grupo, en el que la carga de la partícula se mueve con  $u < c$ , le llamaremos **bradión**, a partir del griego  $\beta\rho\alpha\delta\nu\varsigma$  que significa lento. Los bradiones son por lo tanto aquellas partículas elementales cuya posición de la carga  $\mathbf{r}$  nunca alcanza la velocidad de la luz. A la segunda clase de partículas con  $(u = c)$  las denominaremos **luxones** puesto que el punto  $\mathbf{r}$  se mueve siempre a la velocidad de la luz para todo observador, y finalmente, a las del tercer grupo que como  $u > c$ , las llamaremos **taquiones**, a partir del griego  $\tau\alpha\chi\nu\varsigma$ , rápido.

Para el segundo grupo hemos usado el nombre latino de luxones en vez del griego fotones, porque en este grupo, además de describir fotones clásicos con espín también vamos a encontrar la descripción clásica del electrón. Esta clase de partículas relativistas y los taquiones no poseen equivalentes no relativistas.

La primera clase corresponde a partículas cuyo espacio cinemático es todo el grupo de Poincaré y produce modelos que van a tener correspondencia, en el caso de baja velocidad frente a  $c$ , con los modelos que se analizan en el caso Galileano. De acuerdo con el análisis hecho en el preámbulo sobre el movimiento del centro de carga, cuya velocidad debe ser inalcanzable para todo observador inercial, es precisamente al grupo de luxones al que vamos a dedicar el estudio que sigue. Quienes quieran analizar otros ejemplos relativistas, en particular los taquiones, pueden consultar el libro del autor. En el caso de los taquiones no es posible encontrar modelos que al ser cuantizados tengan espín  $1/2$ .

## 2.5. Luxones

Consideremos aquellas partículas elementales cuyo espacio cinemático está formado por las variables  $(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$  de dominios  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^3$ , y  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  pero con  $u = c$ . Como  $u = c$  vamos a denominar a esta clase de partículas con el nombre de **Luxones**. Esta variedad es un espacio homogéneo del grupo de Poincaré  $\mathcal{P}$ . En efecto, consideremos el punto de esta variedad  $x \equiv (0, 0, \mathbf{u}, 0)$ . El grupo que lo deja invariante (the little group) es el subgrupo uniparamétrico  $\mathcal{V}_u$  de transformaciones de Lorentz puras en la dirección del vector  $\mathbf{u}$ . Entonces  $X \sim \mathcal{P}/\mathcal{V}_u$ , resulta ser un espacio homogéneo de dimensión nueve.

Para estas partículas, las variables  $t, \mathbf{r}$  transforman de acuerdo con (2.112) y (2.113), respectivamente. Sus derivadas como en (2.114) y (2.115). Para la velocidad  $\mathbf{u}$  la forma de transformar (2.116) y de su módulo (2.117) por lo que si  $u = c$  para un observador, esto implica  $u' = c$ , para todos por lo que la variedad dada es un espacio homogéneo de  $\mathcal{P}$ .

La forma general de transformación de las variables de orientación  $\boldsymbol{\rho}$ , se obtiene de (2.252) pero ahora las funciones  $\mathbf{F}$  y  $G$ , que involucran factores  $\gamma(u)$ , se hacen infinitas en el límite  $u \rightarrow c$ , pero su cociente tiene un límite finito que nos lleva finalmente a

$$\boldsymbol{\rho}'(\tau) = \frac{\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\rho}(\tau) - \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\rho}(\tau) + \mathbf{F}_c(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}; \mathbf{u}(\tau), \boldsymbol{\rho}(\tau))}{1 - \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\rho}(\tau) + G_c(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}; \mathbf{u}(\tau), \boldsymbol{\rho}(\tau))}, \quad (2.129)$$

donde las funciones  $\mathbf{F}_c$  y  $G_c$  vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_c(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}; \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) &= \frac{\gamma(v)}{(1 + \gamma(v))c^2} [\mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\mu}) + \mathbf{v}(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\rho}) \\ &+ \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu}) + (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\rho}) \times \mathbf{v} + (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\rho})(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu}) \\ &+ (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\rho})(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\mu}) + (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\rho}) \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu})], \end{aligned} \quad (2.130)$$

$$\begin{aligned} G_c(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}; \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) &= \frac{\gamma(v)}{(1 + \gamma(v))c^2} [\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu}) + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\rho}) \\ &- (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\rho})(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\mu}) + (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\rho}) \cdot (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu})]. \end{aligned} \quad (2.131)$$

Como  $u' = u = c$ , el valor absoluto de la velocidad es invariante lo cual significa que  $\mathbf{u}'$  puede ser obtenido a partir de  $\mathbf{u}$  mediante una rotación:

$$\mathbf{u}' = R(\phi)\mathbf{u}, \quad (2.132)$$

donde el parámetro  $\phi$ , que caracteriza a esta matriz de rotación, es

$$\phi = \frac{\boldsymbol{\mu} + \mathbf{F}_c(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}; \mathbf{u}(\tau), 0)}{1 + G_c(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}; \mathbf{u}(\tau), 0)} = \frac{\boldsymbol{\mu} + \frac{\gamma}{(1+\gamma)c^2} [\mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\mu}) + \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu})]}{1 + \frac{\gamma}{(1+\gamma)c^2} [\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu})]}. \quad (2.133)$$

La ecuación (2.129) corresponde a

$$R(\boldsymbol{\rho}') = R(\boldsymbol{\phi})R(\boldsymbol{\rho}), \quad \boldsymbol{\rho}' = \frac{\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{\rho}}{1 - \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (2.134)$$

y si son  $\mathbf{e}'_i$  los tres vectores unidad columna que configuran la matriz ortogonal  $R(\boldsymbol{\rho}')$ , y  $\mathbf{e}_i$  los tres vectores unidad columna que configuran la matriz ortogonal  $R(\boldsymbol{\rho})$ , esta relación equivale a

$$\mathbf{e}'_i = R(\boldsymbol{\phi})\mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

con la misma  $\boldsymbol{\phi}$  en ambos casos, como en (2.133).

Puesto que la variable  $u(\tau) = c$ , durante toda la evolución y para cualquier observador, podemos encontrar dos tipos distintos de partículas. En efecto, si derivamos con respecto a  $\tau$  la expresión de  $u^2 = c^2$ , obtenemos que  $\dot{\mathbf{u}}(\tau) \cdot \mathbf{u}(\tau) = 0$ , es decir, partículas para las cuales siempre  $\dot{\mathbf{u}}(\tau) = 0$  que como veremos son partículas masa nula, y partículas para las que  $\dot{\mathbf{u}}(\tau) \neq 0$  pero es siempre ortogonal a  $\mathbf{u}$ . Estas partículas corresponden a objetos con masa cuya carga se está moviendo siempre a la velocidad constante  $c$ , y cuyo centro de masa se va a mover con velocidad inferior a  $c$ . Este tipo de partículas son consistentes con lo analizado en el preámbulo, para objetos elementales cuyo centro de carga y centro de masa son puntos diferentes.

### 2.5.1. Partículas sin masa. (El fotón)

Si  $\dot{\mathbf{u}} = 0$ ,  $\mathbf{u}$  es constante y el punto  $\mathbf{r}$  sigue una trayectoria rectilínea con velocidad constante. Por lo tanto las variables cinemáticas se reducen a  $(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})$  con los mismos dominios y significados habituales de tiempo, posición y orientación, respectivamente. Las derivadas  $\dot{t}$  y  $\dot{\mathbf{r}}$  transforman como (2.114) y (2.115) y, en vez de la variable  $\dot{\boldsymbol{\rho}}$  vamos a utilizar la variable  $\boldsymbol{\omega}$  definida en (2.35) y que transforma bajo  $\mathcal{P}$ :

$$\boldsymbol{\omega}'(\tau) = R(\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{\omega}(\tau), \quad (2.135)$$

donde de nuevo,  $\boldsymbol{\phi}$  viene dada en (2.133).

En efecto, a partir de (2.134), como  $\dot{\mathbf{u}} = 0$ , si tomamos la derivada  $\tau$  de ambos miembros,

$$\dot{R}(\boldsymbol{\rho}') = R(\boldsymbol{\phi})\dot{R}(\boldsymbol{\rho}),$$

y la matriz antisimétrica  $\Omega = \dot{R}(\boldsymbol{\rho})R^T(\boldsymbol{\rho})$  posee por componentes esenciales las componentes del vector velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$ ,

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.136)$$

Podemos ver que transforma

$$\Omega' = \dot{R}(\boldsymbol{\rho}')R^T(\boldsymbol{\rho}') = R(\boldsymbol{\phi})\dot{R}(\boldsymbol{\rho})R^T(\boldsymbol{\rho})R^T(\boldsymbol{\phi}) = R(\boldsymbol{\phi})\Omega R^T(\boldsymbol{\phi}),$$

y esta transformación de la matriz conduce a que sus componentes esenciales transformen de acuerdo con (2.135).

Para esta partícula no existen ligaduras entre sus variables cinemáticas, y como  $\dot{\mathbf{u}} = 0$ , la forma más general de su Lagrangiana utilizando la homogeneidad, es

$$\tilde{L} = T\dot{t} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (2.137)$$

Las funciones  $T = \partial\tilde{L}/\partial\dot{t}$ ,  $R_i = \partial\tilde{L}/\partial\dot{r}^i$ ,  $W_i = \partial\tilde{L}/\partial\omega^i$ , serán funciones de  $(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})$  y funciones homogéneas de grado cero de las derivadas de las variables cinemáticas  $(\dot{t}, \dot{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\omega})$ . Como  $\dot{t} \neq 0$  las podremos expresar en términos de  $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{r}}/\dot{t}$  y de  $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}/\dot{t}$ , que son efectivamente la velocidad y velocidad angular de la partícula, respectivamente. Si la partícula es libre, la invariancia de la Lagrangiana bajo  $\mathcal{P}$ , nos lleva a que estas funciones transformen bajo  $\mathcal{P}$ :

$$T' = \gamma T - \gamma(\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}(\boldsymbol{\mu})\mathbf{R}), \quad (2.138)$$

$$\mathbf{R}' = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{R} - \gamma\mathbf{v}T/c^2 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)c^2}(\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{R})\mathbf{v}, \quad (2.139)$$

$$\mathbf{W}' = R(\phi)\mathbf{W}. \quad (2.140)$$

Son invariantes por traslación y por lo tanto independientes de  $t$  y de  $\mathbf{r}$ . Son por lo tanto únicamente funciones de  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\Omega})$ , con la ligadura  $u = c$ . La invariancia bajo rotación nos prohíbe la dependencia explícita de  $\boldsymbol{\rho}$ , de tal manera que la dependencia en las variables  $\boldsymbol{\rho}$  y  $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ , lo es a través de la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$ , como hemos comentado en la sección 2.2.

El teorema de Noether nos da lugar, como anteriormente, a las siguientes constantes del movimiento:

$$\text{Momento temporal } H = -T, \quad (2.141)$$

$$\text{Momento lineal } \mathbf{P} = \mathbf{R}, \quad (2.142)$$

$$\text{Momento cinemático } \mathbf{K} = H\mathbf{r}/c^2 - \mathbf{P}t - \mathbf{W} \times \mathbf{u}/c^2, \quad (2.143)$$

$$\text{Momento angular } \mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{W}. \quad (2.144)$$

En este caso no existe en el momento angular el término del zitterbewegung  $\mathbf{u} \times \mathbf{U}$ , porque la Lagrangiana no depende de la  $\dot{\mathbf{u}}$ . La partícula, localizada en el punto  $\mathbf{r}$ , se mueve en línea recta a la velocidad de la luz, por lo que no es posible encontrar un observador inercial que la vea en reposo. Para cualquier observador inercial  $\mathbf{P} \neq 0$ . A pesar de no existir el observador del centro de masa, definimos el espín como el momento angular de la partícula con respecto al punto  $\mathbf{r}$ , mediante la expresión:  $\mathbf{S} = \mathbf{J} - \mathbf{r} \times \mathbf{P} = \mathbf{W}$ .

Si tomamos en (2.144) la derivada con respecto a  $\tau$ , obtenemos  $d\mathbf{S}/dt = \mathbf{P} \times \mathbf{u}$ . Como  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{u}$  son dos constantes del movimiento, entonces el espín tiene una derivada temporal constante. Representa a un sistema mecánico con un espín que crece continuamente. Esto no es lo que entendemos por un sistema elemental salvo que esa constante sea cero y  $d\mathbf{S}/dt = 0$ . Entonces el espín es constante y como  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{u}$  son vectores no nulos, deben ser necesariamente vectores colineales, aunque no sabemos todavía su orientación relativa, ni la expresión de  $\mathbf{P}$  en términos de  $\mathbf{u}$ .

El momento temporal y el momento lineal son las componentes de un tetravector y juntamente con el espín transforman como

$$H' = \gamma H + \gamma(\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{P}), \quad (2.145)$$

$$\mathbf{P}' = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{P} + \gamma\mathbf{v}H/c^2 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)c^2}(\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{P})\mathbf{v}, \quad (2.146)$$

$$\mathbf{S}' = R(\phi)\mathbf{S}. \quad (2.147)$$

La relación entre  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{u}$  se obtiene a partir de (2.143), tomando la derivada con respecto a  $\tau$  y con la condición de que el espín, que se reduce a  $\mathbf{W}$ , es constante,  $\dot{\mathbf{K}} = 0 = H\dot{\mathbf{r}}/c^2 - \mathbf{P}\dot{t}$ , es decir,  $\mathbf{P} = H\mathbf{u}/c^2$ . Tomando ahora el producto escalar de esta expresión con  $\mathbf{u}$  obtenemos que  $H = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}$ .

A partir de (2.145) y (2.146), la magnitud  $(H/c)^2 - \mathbf{P}^2$  es una propiedad invariante y constante del movimiento, que debido a la relación entre sus términos, es idénticamente nula. La partícula es de masa nula. Para esta partícula, ambos observables  $H$  y  $\mathbf{P}$  son siempre no nulos para todo observador inercial. En caso contrario, si se anulan para un observador se anulan para todos. Por (2.147),  $S^2$  es otro invariante y constante del movimiento, por lo que juntamente con la masa nula es otra propiedad intrínseca de la partícula.

La parte de la Lagrangiana  $T\dot{t} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -H\dot{t} + \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{r}}$ , puede ponerse como  $-(H - \mathbf{P} \cdot \mathbf{u})\dot{t} = 0$ , por lo que es idénticamente nula. La Lagrangiana se reduce solamente al tercer término que es de la forma  $\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega}$ . Una partícula de masa nula que se mueve en línea recta a la velocidad

de la luz, necesariamente tiene que venir caracterizada por variables de orientación, pues en caso contrario  $\tilde{L} = 0$ , es decir, **los fotones necesariamente van rotando**. La formulación relativista prohíbe la existencia de partículas puntuales masivas que se mueven en línea recta a la velocidad de la luz.

Vemos a partir de (2.132) y (2.147) que la magnitud adimensional  $\epsilon = \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}/Sc$ , es otro invariante y constante del movimiento, y lo que esperamos es que la Lagrangiana sea una función explícita de él y de  $S$ . Teniendo en cuenta la forma de transformar bajo  $\mathcal{P}$  de  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  y  $\mathbf{S}$ , dadas en (2.132), (2.135) y (2.147) respectivamente, resulta que el espín debe ser necesariamente función vectorial de  $\mathbf{u}$  y  $\boldsymbol{\omega}$ . Por otra parte, la Lagrangiana debe ser función explícita y homogénea de grado uno de todas las derivadas de las variables cinemáticas, luego  $\mathbf{S}$  tiene que ser una función homogénea de grado cero de  $\dot{t}$  y  $\dot{\mathbf{r}}$ .

Si el espín no es transversal, como ocurre con los fotones reales, entonces  $\mathbf{S} = \epsilon S\mathbf{u}/c$  con  $\epsilon = \pm 1$ , por lo que la Lagrangiana queda finalmente:

$$\tilde{L} = \left( \frac{\epsilon S}{c} \right) \frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\omega}}{\dot{t}}. \quad (2.148)$$

Para esta Lagrangiana, el momento temporal es  $H = -\partial\tilde{L}/\partial\dot{t} = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Omega}$ , donde  $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}/\dot{t}$  es la velocidad angular de la partícula. El momento lineal es  $\mathbf{P} = \partial\tilde{L}/\partial\dot{\mathbf{r}} = \epsilon S\boldsymbol{\Omega}/c$ , y como  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{u}$  son colineales,  $\boldsymbol{\Omega}$  y  $\mathbf{u}$  deben ser también colineales. Si  $H$  es positivo, entonces  $\boldsymbol{\Omega} = \epsilon\boldsymbol{\Omega}\mathbf{u}/c$ .

Esto significa que la energía  $H = S\boldsymbol{\Omega} = S2\pi\nu$ . Para los fotones, según Planck  $H = h\nu$ , y por lo tanto  $S = h/2\pi = \hbar$  y el fotón es un bosón. De esta forma la frecuencia de un fotón es la frecuencia de su movimiento de rotación alrededor de la dirección de su desplazamiento, en el mismo sentido si  $\epsilon = 1$  y en sentido contrario si  $\epsilon = -1$ . Vemos que el espín es constante y no es finalmente función de la velocidad angular, aunque para partículas con  $H > 0$  tiene la misma dirección que ésta. Conviene observar que no hay dependencia entre ellos, porque  $S$  es invariante bajo  $\mathcal{P}$  mientras que  $\boldsymbol{\Omega}$  no lo es. Al cambiar de observador el espín permanece el mismo, pero la frecuencia sufre el denominado *efecto Doppler*.

Si el observador del laboratorio  $O_L$  ve moverse a otro observador inercial  $O$  con velocidad  $\mathbf{v}$  y tienen los ejes paralelizados, la relación entre ambos observadores viene dada por un boost  $L(\mathbf{v})$  y tal vez sendas traslaciones temporal y espacial. Para la relación entre las medidas de energía y momento lineal de un fotón solamente interviene el boost  $L(\mathbf{v})$ , que es la matriz Jacobiana de la transformación. Si el observador  $O$  emite fotones de frecuencia  $\nu$ , las medidas realizadas en  $O_L$  vienen expresadas por

$$H_L = \gamma H + \gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}, \quad \mathbf{p}_L = \mathbf{p} + \gamma H \mathbf{v}/c^2 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{v}.$$

Como  $H = h\nu$ ,  $\mathbf{p} = H\mathbf{u}/c^2$ , para la frecuencia medida en  $O_L$  llegamos a

$$\nu_L = \gamma\nu(1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}/c^2)$$

donde  $\mathbf{u}$  es la velocidad del fotón medida por  $O$ . Supongamos en primer lugar que el origen de  $O$  se aleja  $O_L$ , por lo que los fotones que llegan al origen de  $O_L$  son los que  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = -vc$ , de ahí que la frecuencia detectada vale

$$\nu_L = \gamma\nu(1 - v/c) = \nu \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}, \quad \nu_L < \nu.$$

Sin embargo cuando  $O_L$  ve a  $O$  acercarse, entonces los fotones que le llegan son los que  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = vc$ , por lo que la frecuencia que detecta es mayor y vale:

$$\nu_L = \gamma\nu(1 + v/c) = \nu \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}, \quad \nu_L > \nu.$$

Decimos que la Lagrangiana (2.148) representa a un fotón de espín  $S$  y polarización  $\epsilon$ . Un conjunto de fotones de esta clase, todos de la misma polarización, corresponden a un haz de luz polarizada circular, como se ha comprobado midiendo el momento angular que llevan estos fotones.

### Experimento de Beth

El experimento de Beth <sup>5</sup>, realizado en el año 1936, consiste en producir un haz de luz monocromática polarizada circular de frecuencia  $\nu$ , y hacerla incidir sobre una placa adherida a un péndulo de torsión, para ser absorbidos los fotones por ella. Si la potencia del haz polarizado es  $P$  el haz lleva  $n = P/h\nu$  fotones por segundo, todos con el espín en la misma dirección. Entonces al ser absorbidos por la placa, ésta varía su momento angular  $J$  con respecto al punto  $O$ , en la forma  $dJ/dt = n\hbar$  por segundo, lo que da lugar a que el momento  $M$  de las fuerzas externas producidas por la torsión del péndulo debe igualar a esta variación.

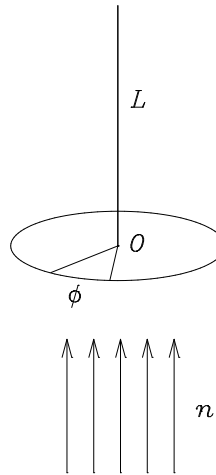


Figura 2.5: **Haz de luz monocromática polarizada circular de intensidad  $n$  fotones por segundo, que son absorbidos por una placa que está en equilibrio mediante un hilo de torsión. Al absorber los fotones, la placa gira un ángulo  $\phi$ , a derechas o a izquierdas, según que el haz de luz polarizada circular sea a derechas o a izquierdas, comprobándose que todos los fotones del haz tienen el espín en la misma dirección.**

Para un hilo de longitud  $L$ , radio  $a$  y módulo de torsión  $\mu$ , el momento de las fuerzas externas que lo hace rotar un ángulo  $\phi$ , vale:

$$M = \mu \frac{\pi a^4}{2L} \phi.$$

Midiendo el ángulo  $\phi$  que ha girado la placa, se comprueba en el experimento que  $M = n\hbar$ , ya que cada fotón absorbido lleva un momento angular de valor  $\hbar$ .

Pero el dispositivo del experimento de Beth es también un analizador de la polarización de los fotones. Si al hacer incidir el haz de luz polarizada circular sobre el disco de la figura, éste gira hacia la derecha, el haz contiene fotones con sus espines hacia adelante. Si el disco gira hacia la izquierda, los fotones tienen su espín hacia atrás.

Fotones polarizados a izquierda o derecha corresponden a  $\epsilon = -1$  y  $\epsilon = 1$ , respectivamente. La energía está relacionada con la frecuencia angular  $H = \hbar\Omega$ , y el momento lineal con el número de onda  $\mathbf{P} = \hbar\mathbf{k}$ , que resulta estar relacionado con la velocidad angular por  $\mathbf{k} = \epsilon\boldsymbol{\Omega}/c$ . Si pudiéramos hablar de la *longitud de onda* de un solo fotón, ésta sería la distancia recorrida en el tiempo en que tarda en dar una vuelta.

<sup>5</sup> R. A. Beth, *Mechanical detection and measurement of the angular momentum of light*, Phys. Rev. **50**, 115 (1936).



Los antifotones, es decir partículas para las que  $H < 0$ , se corresponden con las que cumplen  $H = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} < 0$  y por lo tanto el espín y la velocidad angular tienen sentidos opuestos y lo mismo la velocidad y el momento lineal. En cualquier caso poseen la misma energía que los fotones con  $H > 0$ . Para saber si un sistema material absorbe un fotón o un antifotón, habría que medir por separado el espín del fotón absorbido, que es una medida mecánica, y por otra la velocidad angular del fotón, de la cual solamente se conoce su valor absoluto, la frecuencia. Pero también midiendo la dirección del momento lineal que debe ser opuesta a la velocidad. Lo que parece es que las partículas producidas por radiación son fotones, ya que la presión de radiación, y por lo tanto la dirección del momento lineal coinciden. Por eso resulta difícil de determinar de forma experimental si lo que se absorbe es un fotón o un antifotón. En la interacción electromagnética electrón-núcleo, si la interpretamos como un intercambio de fotones, para que las partículas se aproximen y la órbita sea una trayectoria ligada intercambiando una partícula fotónica, ésta tiene que ser un antifotón. En cambio, en la interacción electrón-electrón, las partículas se separan, por lo que lo que intercambian es un fotón. Ver la sección 2.7 para el análisis de partículas y antipartículas.

La relación entre los diversos observables para el fotón ( $H > 0$ ) y el antifotón ( $H < 0$ ) viene representada en la figura 2.6

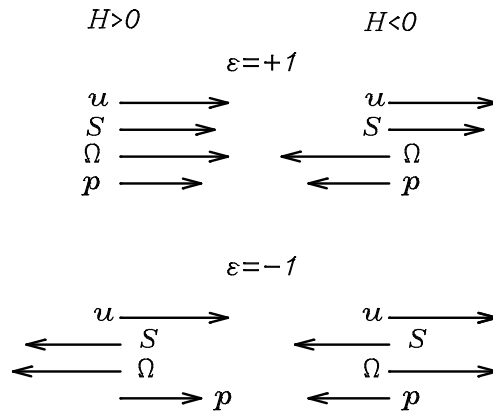


Figura 2.6: Relación entre los diferentes observables  $u$ ,  $S$ ,  $\Omega$  y  $p$ , para el fotón  $H > 0$  en la columna izquierda y para el antifotón  $H < 0$  en la columna derecha para las dos helicidades  $\epsilon = \pm 1$ .  $\mathbf{S} = \epsilon S \mathbf{u}/c$ ,  $\mathbf{p} = H \mathbf{u}/c^2 = \epsilon S \boldsymbol{\Omega}/c$ ,  $H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Omega}$ .

Si los posibles estados del fotón los representamos de forma vectorial como  $|\text{sign}(H), \epsilon \rangle$ , los estados de la izquierda de la figura son los  $|+, + \rangle$  y  $|+, - \rangle$ , y los de la derecha  $|-, + \rangle$  y  $|-, - \rangle$ , respectivamente. Son estados independientes y ortogonales. Si el campo de radiación solamente está compuesto de fotones ( $H > 0$ ), es por lo que la descripción clásica de los estados vectoriales de la luz monocromática, aparece descrita por vectores complejos del espacio de Hilbert  $\mathbb{C}^2$  y los estados de polarización por la esfera de Poincaré, como la combinación lineal convexa de estados puros (Ver apéndice 3.4). Sobre la posible detección de antifotones ir a la sección 2.7 y siguiente.

### 2.5.2. Partículas con masa. (el electrón)

Si consideramos ahora la otra posibilidad,  $\dot{\mathbf{u}} \neq 0$  pero ortogonal a  $\mathbf{u}$ , entonces las variables  $\dot{t}$  y  $\dot{\mathbf{r}}$  transforman como en el caso anterior (2.114) y (2.115), pero para  $\dot{\mathbf{u}}$  y  $\boldsymbol{\omega}$  tenemos que:

$$\dot{\mathbf{u}}' = R(\phi)\dot{\mathbf{u}} + \dot{R}(\phi)\mathbf{u}, \quad (2.149)$$

$$\boldsymbol{\omega}' = R(\phi)\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_\phi, \quad (2.150)$$

donde el parámetro de rotación  $\phi$  es el mismo de (2.133) y el vector  $\boldsymbol{\omega}_\phi$  es:

$$\boldsymbol{\omega}_\phi = \frac{\gamma R\mathbf{u} \times \mathbf{v} - (\gamma - 1)R(\mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}}) + 2\gamma^2(\mathbf{v} \cdot R(\mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}}))\mathbf{v}/(1 + \gamma)c^2}{\gamma(c^2 + \mathbf{v} \cdot R\mathbf{u})}. \quad (2.151)$$

La expresión (2.149) es la derivada  $\tau$  de (2.132) y se puede escribir en la forma:

$$\dot{\mathbf{u}}' = \frac{R(\phi)\dot{\mathbf{u}}}{\gamma(1 + \mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{u}/c^2)}. \quad (2.152)$$

la expresión (2.150) viene de  $R(\boldsymbol{\rho}') = R(\phi)R(\boldsymbol{\rho})$ , que tomando la derivada con respecto a  $\tau$ ,  $\dot{R}(\boldsymbol{\rho}') = \dot{R}(\phi)R(\boldsymbol{\rho}) + R(\phi)\dot{R}(\boldsymbol{\rho})$ , debido a que el parámetro  $\phi$  depende de  $\tau$  a través de la velocidad  $\mathbf{u}(\tau)$ , y por lo tanto

$$\Omega' = \dot{R}(\boldsymbol{\rho}')R^T(\boldsymbol{\rho}') = R(\phi)\Omega R^T(\phi) + \dot{R}(\phi)R^T(\phi).$$

$R(\phi)\Omega R^T(\phi)$  corresponde a  $R(\phi)\boldsymbol{\omega}$  y la matriz antisimétrica  $\Omega_\phi = \dot{R}(\phi)R^T(\phi)$  tiene por componentes esenciales el vector  $\boldsymbol{\omega}_\phi$ , es decir, la ecuación (2.151).

La condición de homogeneidad de la Lagrangiana conduce a la forma general

$$\tilde{L} = T\dot{t} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (2.153)$$

donde  $T = \partial\tilde{L}/\partial\dot{t}$ ,  $R_i = \partial\tilde{L}/\partial\dot{r}^i$ ,  $U_i = \partial\tilde{L}/\partial\dot{u}^i$  y  $W_i = \partial\tilde{L}/\partial\omega^i$ , y en el caso de la partícula libre el teorema de Noether, debido a la invariancia bajo el grupo de Poincaré, nos produce las siguientes constantes del movimiento:

$$\text{Momento temporal } H = -T - (d\mathbf{U}/dt) \cdot \mathbf{u}, \quad (2.154)$$

$$\text{Momento lineal } \mathbf{P} = \mathbf{R} - (d\mathbf{U}/dt), \quad (2.155)$$

$$\text{Momento cinemático } \mathbf{K} = H\mathbf{r}/c^2 - \mathbf{P}t - \mathbf{S} \times \mathbf{u}/c^2, \quad (2.156)$$

$$\text{Momento angular } \mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{S}. \quad (2.157)$$

En este caso el espín  $\mathbf{S}$ , es decir el momento angular con respecto al punto  $\mathbf{r}$ , viene dado como en el caso Galileano, por

$$\mathbf{S} = \mathbf{u} \times \mathbf{U} + \mathbf{W} = \mathbf{Z} + \mathbf{W}, \quad (2.158)$$

no es una magnitud conservada sino que satisface la ecuación dinámica

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{P} \times \mathbf{u},$$

que se anula solamente si  $\mathbf{P} = 0$ .

Como en el caso Galileano, tenemos también la invariancia de las ecuaciones dinámicas bajo el grupo de rotaciones locales  $SO(3)_L$  que nos cambian las variables de orientación sin modificar la velocidad angular por lo que como en (2.51) obtenemos las tres constantes del movimiento

$$\text{Momento angular Local } T_i = \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_i, \quad (2.159)$$

proyección en los ejes del cuerpo de la parte rotativa del espín  $\mathbf{W}$ .

Las expresiones (2.154, 2.155) implican que  $H/c$  y  $\mathbf{P}$  transforman como las componentes de un tetravector, como en (2.125-2.126), y definen un invariante y constante del movimiento  $(H/c)^2 - \mathbf{P}^2 = m^2 c^2$ , que lo expresamos en función de un parámetro positivo  $m$ , que se interpreta como la masa de la partícula.

El observable  $\mathbf{S}$  transforma como:

$$\mathbf{S}'(\tau) = \gamma R(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{S}(\tau) - \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)c^2} (\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{S}(\tau)) \mathbf{v} + \frac{\gamma}{c^2} (\mathbf{v} \times R(\boldsymbol{\mu}) (\mathbf{S}(\tau) \times \mathbf{u})), \quad (2.160)$$

una expresión que corresponde a la transformación de un tensor antisimétrico  $S^{\mu\nu}$  con componentes estrictas  $S^{0i} = (\mathbf{S} \times \mathbf{u})^i / c$ , y  $S^{ij} = \epsilon^{ijk} S_k$ , bajo el grupo de Poincaré,

$$S'^{\mu\nu} = \Lambda_\sigma^\mu(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) \Lambda_\lambda^\nu(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) S^{\sigma\lambda}, \quad \Lambda(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) = L(\mathbf{v}) R(\boldsymbol{\mu})$$

Si definimos el vector, con dimensiones de longitud,  $\mathbf{k} = \mathbf{S} \times \mathbf{u} / H$ , el momento cinemático (2.156) se puede reescribir como

$$\mathbf{K} = H\mathbf{q}/c^2 - \mathbf{P}t,$$

donde  $\mathbf{q} = \mathbf{r} - \mathbf{k}$ , representa la posición del centro de masa de la partícula. Si tomamos la derivada temporal de esta expresión, podemos expresar la relación que existe entre  $H$  y  $\mathbf{P}$  como en el caso de la partícula puntual:

$$\mathbf{P} = \frac{H}{c^2} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{q}}{dt}$$

en términos de la velocidad del centro de masa  $\mathbf{v}$ . Esto nos lleva de nuevo a que  $H$  y  $\mathbf{P}$  se expresen en términos de la velocidad del centro de masa y del invariante  $m$ , como

$$H = \gamma(v) m c^2, \quad \mathbf{P} = \gamma(v) m \mathbf{v}.$$

Si llamamos  $\mathbf{v}_{CM}$  a la velocidad del centro de masa, ésta transforma entre observadores inerciales como:

$$\mathbf{v}'_{CM}(\tau) = \frac{R(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{v}_{CM}(\tau) + \gamma \mathbf{v} + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)c^2} (\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{v}_{CM}(\tau)) \mathbf{v}}{\gamma(1 + \mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{v}_{CM}(\tau)/c^2)}. \quad (2.161)$$

Aunque el transformado Poincaré de la posición del centro de masa para un observador no se corresponde con el centro de masa del electrón en el nuevo sistema de referencia, la velocidad del centro de masa es efectivamente la transformada de dicha velocidad. Si  $\mathbf{v}_{CM} = 0$  es la velocidad del centro de masa en el sistema de referencia del CM, entonces la velocidad en otro sistema de referencia es  $\mathbf{v}$ , siendo  $\mathbf{v}$  la velocidad que un observador arbitrario ve moverse al observador del centro de masa.

El espín con respecto al centro de masa se define como es habitual mediante

$$\mathbf{S}_{CM} = \mathbf{J} - \mathbf{q} \times \mathbf{P} = \mathbf{J} - \frac{c^2}{H} \mathbf{K} \times \mathbf{P}, \quad (2.162)$$

y es una constante del movimiento para la partícula libre por expresarse en términos de constantes del movimiento. Toma la forma

$$\mathbf{S}_{CM} = \mathbf{S} + \mathbf{k} \times \mathbf{P} = \mathbf{S} + \frac{1}{H} (\mathbf{S} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{P}. \quad (2.163)$$

La helicidad  $\mathbf{S}_{CM} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{P}$ , es también una constante del movimiento para la partícula libre. Podemos construir el tetravector de Pauli-Lubanski (2.260)

$$w^\mu \equiv (\mathbf{P} \cdot \mathbf{S}_{CM}, H \mathbf{S}_{CM} / c) = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{S}, H \mathbf{S} / c + (\mathbf{S} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{P} / c) = \frac{H}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{S}_{CM}, c \mathbf{S}_{CM}), \quad (2.164)$$

que queda expresado para la partícula libre en términos de constantes del movimiento y por lo tanto es otra constante del movimiento. Su módulo,  $-w^\mu w_\mu = m^2 c^2 S_{CM}^2$ , donde  $S_{CM}$  es el espín medido por el observador del centro de masa, es también otra constante del movimiento para la partícula libre, y si aceptamos el principio atómico, debe tomar el mismo valor incluso bajo interacción. Queda expresado en términos de las propiedades invariantes y por lo tanto intrínsecas  $m$  y  $S_{CM}$  de la partícula, siendo  $S_{CM}^2$  el módulo al cuadrado de  $\mathbf{S}_{CM}$ , que en el caso cuántico es  $3\hbar^2/4$ . El módulo de este espín no es invariante y para un observador que ve moverse el centro de masa con velocidad  $\mathbf{v}$ , éste toma el valor

$$S_{CM}^{\prime 2} = \left( \frac{c^2 - v^2}{c^2 - v^2 \cos^2 \phi} \right) S_{CM}^2,$$

siendo  $\phi$  el ángulo que forma  $\mathbf{v}$  con  $\mathbf{S}_{CM}$ .

### 2.5.3. Movimiento del electrón para el observador del CM

El observador del centro de masa se define por las condiciones  $\mathbf{P} = \mathbf{K} = 0$ . Para este observador  $\mathbf{q} = 0$  y  $\mathbf{v} = 0$ , el centro de masa está en reposo y en el origen de sistema de referencia. El espín  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{CM}$  es constante,  $H = \pm mc^2$  y de (2.156) obtenemos

$$\mathbf{r} = \pm \frac{1}{mc^2} \mathbf{S} \times \mathbf{u}. \quad (2.165)$$

Esta ecuación es la dinámica del punto  $\mathbf{r}$  para el observador del centro de masa y este movimiento interno tiene lugar en un plano ortogonal al espín constante  $\mathbf{S}$ . El producto escalar con  $\mathbf{u}$  nos lleva a  $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}/dt = 0$ , por lo que el radio de este movimiento (el zitterbewegung) es constante. Tomando la derivada temporal de ambos miembros de (2.165), obtenemos  $mc^2 \mathbf{u} = \pm (\mathbf{S} \times d\mathbf{u}/dt)$ , debido a que el espín es constante en este referencial, con lo que  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{S}$  son ortogonales. Si volvemos a derivar esta expresión concluimos que  $d\mathbf{u}/dt$  y  $\mathbf{S}$  son también ortogonales. Si introducimos en (2.165) esta expresión de  $\mathbf{u}$  y tenemos presente la ortogonalidad entre el espín y la aceleración, tanto para la partícula como la antipartícula, se llega a

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \omega^2 \mathbf{r} = 0, \quad \omega = \frac{mc^2}{S}. \quad (2.166)$$

que es exactamente la misma ecuación del preámbulo (2) y de la partícula no relativista (2.75) cuando el centro de masa está en reposo. Haciendo en (2.165) el producto vectorial con  $\mathbf{u}$  y usando la ortogonalidad del espín con la velocidad se llega a

$$\mathbf{S} = \pm m\mathbf{u} \times \mathbf{r}. \quad (2.167)$$

Como  $S$  y  $u = c$  son constantes, el movimiento armónico es un círculo de radio  $R_0 = S/mc$ . Para el electrón veremos que al cuantizarlo  $S = \hbar/2$ , y el radio resulta ser  $\hbar/2m_e c = 1,93 \times 10^{-13}$  m, la mitad de la longitud de onda Compton del electrón. La frecuencia de este movimiento en el sistema de referencia del C.M. es  $\nu = 2m_e c^2/h = 2,47 \times 10^{20}$  s<sup>-1</sup>, y la velocidad angular  $\omega = 2\pi\nu = 1,55 \times 10^{21}$  rad s<sup>-1</sup>. La relación de este radio con el denominado radio clásico del electrón  $R_{cl} = e^2/8\pi\epsilon_0 m_e c^2 = 1,409 \times 10^{-15}$  m, es precisamente  $R_{cl}/R_0 = e^2/4\pi\epsilon_0 \hbar c = \alpha \approx 1/137$ , la constante de estructura fina. El radio del electrón, estimado a partir de la colisión  $e - e$  a alta energía en los experimentos desarrollados en el LEP del CERN, arrojan un valor  $R_e < 10^{-19}$  m. El análisis de la medida de la relación giromagnética  $g$  en una cavidad de Penning arroja un límite todavía más pequeño,  $R_e < 10^{-22}$  m.<sup>6</sup> Si lo comparamos con el radio de Bohr,

<sup>6</sup>H. Dehmelt, *A single atomic particle forever floating at rest in free space: New value for Electron radius*, Physica Scripta **T22**, 102-110 (1988)

radio estimado de la trayectoria circular de un electrón con momento angular orbital  $L = 1$ , es  $R_B = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/m_e e^2$ ,  $R_B/R_0 = 2/\alpha \approx 274$ .

Lo que vemos es que hay dos tipos diferentes de partículas en cuanto al signo de  $H$ . En ambos, la energía en reposo es  $mc^2$ . A la partícula con  $H > 0$  se le denomina materia y antimateria a la de  $H < 0$ . Ésta tiene un movimiento opuesto a la otra. Movimientos de este tipo de partículas que se mueven a la velocidad de la luz, ya han sido considerados en la literatura posterior a la publicación de la ecuación de Dirac, cuyo análisis de la cinemática del electrón sugería que éste se movía precisamente a la velocidad de la luz. Sin embargo, en estos trabajos y en los de Dirac, la distinción entre el movimiento del centro de carga y del centro de masa, no está suficientemente clara <sup>7, 8</sup>. Parte de la dificultad estriba en que cuando un punto se mueve a la velocidad de la luz, a la partícula se le asocia una masa nula. Esto es correcto si el punto representa lo que denominaríamos el centro de masa, pero no es el caso cuando el punto representa al centro de carga.

En el modelo que estamos analizando, parece sugerir que el electrón tiene un tamaño del orden del radio del zitterbewegung, o que la carga se mueve en una región del tamaño de la longitud de onda Compton de la partícula, como sugiere el comentario de Barut en la contraportada. Sin embargo la idea de tamaño no es necesaria desde el punto de vista dinámico ya que todo el interés se centra en describir la trayectoria de un punto, el centro de carga, a partir del cual determinaremos el resto de las propiedades del electrón. La ecuación dinámica (2.165) para el caso de la partícula ( $H > 0$ ), se representa en la figura 2.7, que es la figura de la portada, donde hemos separado las dos contribuciones al espín  $\mathbf{S} = \mathbf{Z} + \mathbf{W}$ , que están relacionadas con el movimiento orbital  $\mathbf{Z}$  y el movimiento de rotación  $\mathbf{W}$ . En el caso del positrón, ( $H < 0$ ), lo representamos en la figura 2.8.

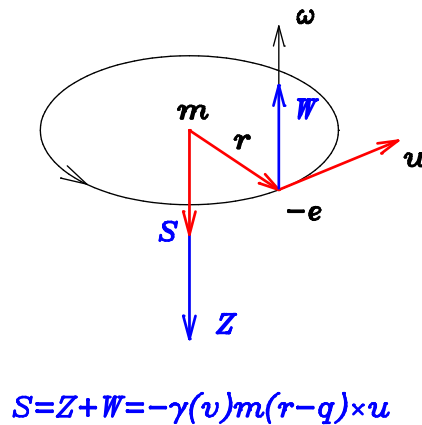


Figura 2.7: Movimiento del centro de carga del electrón en el sistema de referencia del centro de masa. La parte antiorbital  $\mathbf{Z} = \mathbf{u} \times \mathbf{U}$  del espín tiene la dirección de  $\mathbf{S}$  y la parte  $\mathbf{W}$  tiene la dirección de  $\boldsymbol{\omega}$ . El espín es ortogonal a la velocidad del centro de carga y a la separación entre CC y CM.

<sup>7</sup> M. Mathisson, *Neue mechanik materieller systeme*, Acta Phys. Pol. **6**, 163 (1937); *Das zitternde elektron und seine dynamik*, **6**, 218 (1937)

<sup>8</sup> M.H.L. Weyssenhof, *On two relativistic models of Dirac's electron*, Acta Phys. Pol. **9**, 46 (1947). M.H.L. Weyssenhof and A. Raabe, *Relativistic dynamics of spin-fluids and spin-particles*, Acta Phys. Pol. **9**, 7 (1947); *Relativistic dynamics of spin-particles moving with the velocity of light*, **9**, 19 (1947).

### 2.5.4. El espín y el centro de masa para un observador arbitrario

Si tomamos en (2.156) la derivada con respecto a  $\tau$  y el producto escalar con la velocidad  $\mathbf{u}$  obtenemos la expresión invariante Poincaré:

$$H = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \cdot \left( \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{u} \right). \quad (2.168)$$

De esta forma, el momento temporal o Hamiltoniano de Dirac, se escribe como la suma de dos términos, uno de tipo traslacional asociado con  $\mathbf{P}$  y que es nulo para el observador del centro de masa, y otro rotacional relacionado con  $\mathbf{S}$  y que no se anula nunca. En el caso cuántico va a dar lugar a  $H = c\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \beta mc^2$ , en términos de las matrices hermiticas de Dirac,  $\boldsymbol{\alpha}$  y  $\beta$ . Puesto que para Dirac  $c\boldsymbol{\alpha}$  se interpreta como el operador velocidad local  $\mathbf{u}$  del electrón<sup>9</sup>, tenemos  $H = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} + \beta mc^2$  y esta relación sugiere que

$$\beta = \frac{1}{mc^4} \mathbf{S} \cdot \left( \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{u} \right).$$

Volveremos a esta relación cuando cuanticemos el sistema.

Vamos a encontrar la expresión general del espín y de la posición del centro de masa, en términos de la cinemática del centro de carga. La ecuación de transformación del espín  $\mathbf{S}$ , (2.160) se puede escribir también

$$\mathbf{S}' = \gamma(1 + \mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{u}/c^2)R(\phi)\mathbf{S}, \quad (2.169)$$

con lo que su módulo no es invariante Poincaré y teniendo presente cómo transforma  $\dot{\mathbf{u}}$  dado en (2.152), se tiene que  $\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{S}' \cdot \dot{\mathbf{u}}'$  y de (2.132)  $\mathbf{S}' \cdot \mathbf{u}' = \gamma(1 + \mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{u}/c^2)\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}$ . Puesto que el espín es ortogonal a  $\mathbf{u}$  y  $\dot{\mathbf{u}}$ , para el observador del centro de masa, resulta ser siempre ortogonal a  $\mathbf{u}$  y  $\dot{\mathbf{u}}$  para cualquier otro observador inercial.

Un método alternativo para ver esto es tomar la derivada temporal en (2.156) y (2.157), y de aquí

$$H\mathbf{u} - c^2\mathbf{P} - \frac{d\mathbf{S}}{dt} \times \mathbf{u} - \mathbf{S} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0,$$

como

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{P} \times \mathbf{u},$$

es decir,

$$\mathbf{S} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} = (H - \mathbf{u} \cdot \mathbf{P})\mathbf{u}.$$

y un producto escalar con  $\mathbf{S}$ , conduce a  $(H - \mathbf{u} \cdot \mathbf{P})\mathbf{u} \cdot \mathbf{S} = 0$ . El factor entre paréntesis no se anula puesto que el invariante  $H^2/c^2 - P^2 = m^2c^2$  es definido positivo y si resultase que  $H = \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}$ , entonces  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{P})^2/c^2 - P^2$  con  $u \leq c$  sería negativo, lo que es una contradicción. Por lo tanto  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{u} = 0$ . Si ahora tomamos la derivada temporal de esta expresión, sabiendo que  $d\mathbf{S}/dt$  es ortogonal a  $\mathbf{u}$ , obtenemos  $\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0$ . El observable  $\mathbf{S}$  tiene siempre la dirección del vector no nulo  $\dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{u}$  para las partículas ( $H > 0$ ) y en sentido contrario para las antipartículas ( $H < 0$ ).

Si tomamos la derivada temporal del momento cinemático de la partícula libre (2.156), obtenemos

$$H\mathbf{u} - c^2\mathbf{P} - \frac{d\mathbf{S}}{dt} \times \mathbf{u} - \mathbf{S} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0.$$

Teniendo presente que  $d\mathbf{S}/dt = \mathbf{P} \times \mathbf{u}$  y haciendo el producto vectorial con  $d\mathbf{u}/dt$ , obtenemos

$$\mathbf{S} = \left( \frac{H - \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}}{(d\mathbf{u}/dt)^2} \right) \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{u}, \quad (2.170)$$

y  $\mathbf{q} = \mathbf{r} - \mathbf{S} \times \mathbf{u}/H$  conduce a que la posición del centro de masa se escribe

$$\mathbf{q} = \mathbf{r} + \frac{c^2}{H} \left( \frac{H - \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}}{(d\mathbf{u}/dt)^2} \right) \frac{d\mathbf{u}}{dt}. \quad (2.171)$$

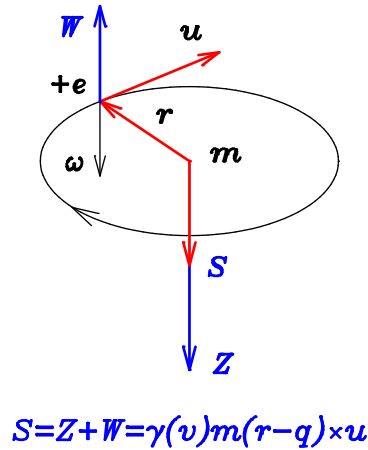


Figura 2.8: Movimiento del centro de carga del positrón en el sistema de referencia del centro de masa. La parte  $W$  de su espín tiene sentido contrario a la velocidad angular de rotación del sistema cartesiano ligado al punto y que aquí no se ha dibujado. La parte  $Z$  tiene el sentido orbital y por lo tanto la misma dirección que  $S$ .

La expresión (2.170) del espín con respecto al centro de carga se puede reescribir como

$$\mathbf{S} = \frac{(H\dot{t} - \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{r}})}{\dot{\mathbf{u}}^2} \dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{u}.$$

Como sabemos de (2.132) que  $\mathbf{u}' = R(\phi)\mathbf{u}$  y de (2.152) que  $\dot{\mathbf{u}}' = R(\phi)\dot{\mathbf{u}}/\gamma(1 + \mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{u}/c^2)$ , resulta que  $\dot{\mathbf{u}}'^2 = \dot{\mathbf{u}}^2/\gamma^2(1 + \mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{u}/c^2)^2$  y el numerador  $(H\dot{t} - \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{r}})$  es invariante Poincaré, de donde obtenemos la expresión anteriormente planteada de la forma de transformar  $\mathbf{S}$ , (2.169).

Desde el punto de vista geométrico, como el vector  $\mathbf{u}$  es tangente a la trayectoria del centro de carga y su derivada es perpendicular a él, resulta de (2.170) que el espín de la partícula con respecto al centro de carga  $\mathbf{S}$  tiene dirección opuesta a la binormal, y dirección según la binormal para la antipartícula.

El centro de masa, con respecto al centro de carga, está en la dirección de la aceleración tanto para la partícula como para la antipartícula. El punto  $\mathbf{r}$ , como en el caso no relativista, efectúa un movimiento central alrededor del centro de masa. Si de (2.171) expresamos la aceleración en términos de  $\mathbf{r} - \mathbf{q}$ , el espín con respecto al punto  $\mathbf{r}$  también puede ponerse como:

$$\mathbf{S} = -\frac{H}{c^2}(\mathbf{r} - \mathbf{q}) \times \mathbf{u} = \mp\gamma(v)m(\mathbf{r} - \mathbf{q}) \times \mathbf{u}, \quad (2.172)$$

que refuerza la idea de su carácter antiorbital con respecto al centro de masa para la partícula ( $H > 0$ ) y orbital para la antipartícula ( $H < 0$ ). Queda expresado en términos de los dos puntos característicos,  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{q}$ , de sus velocidades respectivas  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , y del parámetro positivo  $m$ , la masa. Como en cualquier caso se compone de dos términos  $\mathbf{S} = \mathbf{Z} + \mathbf{W}$ , esto quiere decir que para la antipartícula  $\mathbf{Z}$  tiene también la dirección de  $\mathbf{S}$  y por lo tanto la parte  $\mathbf{W}$  en sentido contrario, con lo que esta parte  $\mathbf{W}$  tiene sentido opuesto a la velocidad angular. En esto coincide con los fotones, en los que el espín que es únicamente rotativo tiene la dirección de la velocidad angular para la partícula y sentido contrario a la velocidad angular para la antipartícula.

<sup>9</sup> J.J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Addison-Wesley Reading, MA (1967).

Vemos que la partícula tiene masa y espín, el centro de carga se mueve en círculos a la velocidad de la luz en un plano perpendicular al espín. Todas estas propiedades son independientes del tipo de Lagrangiana de la forma (2.153) que consideremos. De la última expresión de (2.172) y en el caso de la partícula libre ( $v = \text{constante}$ ) se obtiene  $d\mathbf{S}/dt = \mathbf{P} \times \mathbf{u}$ .

### 2.5.5. Invariancia Poincaré del Hamiltoniano de Dirac

La expresión que va a dar lugar a la ecuación de Dirac vamos a ver que es invariante Poincaré y por lo tanto se escribe de la misma forma en cualquier sistema de referencia. En efecto, si de (2.168) pasamos todos los términos al primer miembro y multiplicamos por  $\dot{t}$ , tenemos

$$iH - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{P} - \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \cdot (\dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{u}) = 0.$$

La primera parte  $iH - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{P} = \dot{x}^\mu P_\mu = \dot{x}'^\mu P'_\mu$ , con  $\dot{x}^\mu \equiv (c\dot{t}, \dot{\mathbf{r}})$  y  $P^\mu \equiv (H/c, \mathbf{P})$ , es invariante Poincaré. En cuanto al término del espín vemos que de (2.132), (2.152) y (2.169), la velocidad  $\mathbf{u}$ , aceleración  $\dot{\mathbf{u}}$  y espín  $\mathbf{S}$ , respectivamente, transforman:

$$\mathbf{u}' = R(\phi)\mathbf{u}, \quad \dot{\mathbf{u}}' = \frac{R(\phi)\dot{\mathbf{u}}}{\gamma(1 + \mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{u}/c^2)}, \quad \mathbf{S}' = \gamma \left( 1 + \frac{\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{u}}{c^2} \right) R(\phi)\mathbf{S},$$

de donde se deduce que

$$\mathbf{S}' \cdot (\dot{\mathbf{u}}' \times \mathbf{u}') = \mathbf{S} \cdot (\dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{u}).$$

### 2.5.6. Análisis de Dirac

Para terminar esta sección, y teniendo en mente este modelo de electrón, vamos a repasar los aspectos más salientes del análisis que hace Dirac<sup>10</sup>, cuando trata de determinar la cinemática del electrón libre en su formulación cuántica. Para Dirac, si el punto  $\mathbf{r}$  representa a las variables espaciales de las que depende el espinor  $\psi(t, \mathbf{r})$ , entonces cuando calcula la velocidad de este punto  $\mathbf{r}$ , Dirac llega a:

a) La velocidad  $\mathbf{u} = i/\hbar[H, \mathbf{r}] = c\boldsymbol{\alpha}$ , queda expresada en términos de las matrices  $\boldsymbol{\alpha}$ , cuyos valores propios son  $\pm 1$  y escribe ‘... una medida de cualquier componente de la velocidad de un electrón libre debe conducir de forma precisa al valor  $\pm c$ ’.

b) El momento lineal no tiene la misma dirección que la velocidad de este punto  $\mathbf{u}$ , sino que está relacionado con un cierto valor medio de la misma: ... ‘la componente  $x_1$  de la velocidad,  $c\alpha_1$ , tiene dos partes, una parte constante de valor  $c^2 p_1 H^{-1}$ , y ligada con el momento lineal por la expresión relativista habitual, y una parte oscilante, cuya frecuencia es por lo menos  $2mc^2/h$ , ...’.

c) Acerca de las componentes del vector de posición  $\mathbf{r}$ : ‘La parte oscilante de  $x_1$  es pequeña, ... , es del orden de magnitud de  $\hbar/mc$ , ...’.

d) En el artículo original de 1928,<sup>11</sup> cuando analiza la interacción del electrón con un campo electromagnético externo, después de hacer el cuadrado del operador de Dirac, obtiene dos nuevos términos en el Hamiltoniano de interacción:

$$\frac{e\hbar}{2m} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B} + \frac{ie\hbar}{2mc} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E}, \quad (2.173)$$

y donde el espín del electrón aparece escrito como  $\mathbf{S} = \hbar\boldsymbol{\Sigma}/2$ ,

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{e}{m} \mathbf{S} = 2 \frac{e}{2m} \mathbf{S}, \quad g = 2,$$

<sup>10</sup> P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum mechanics*, Oxford Univ. Press, 4th ed. Oxford (1967).

<sup>11</sup> P.A.M. Dirac, The quantum theory of the electron, *Proc. Roy. Soc. Lon.* **A117**, 610 (1928). La traducción que ofrecemos en las notas es del autor.



y la partícula de Dirac posee una relación giromagnética  $g = 2$ . Los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  son los campos eléctrico y magnético externos, respectivamente. Entonces dice, ‘El electrón se va a comportar como si tuviera un momento magnético  $(e\hbar/2m)\mathbf{\Sigma}$  y un momento dipolar eléctrico  $(ie\hbar/2mc)\mathbf{\alpha}$ . El momento magnético es el mismo que el del modelo de electrón con espín’ (modelo de Pauli). ‘El momento dipolar eléctrico, como es imaginario puro, podemos esperar que no aparezca en el modelo.’

Sin embargo, en nuestro modelo clásico, y para el observador del centro de masa, existe un momento dipolar eléctrico instantáneo y un momento magnético, dados por

$$\mathbf{d} = e\mathbf{k} = \frac{e}{mc^2}\mathbf{S} \times \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2}\mathbf{k} \times \frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\frac{e}{2m}\mathbf{Z}, \quad (2.174)$$

donde  $\mathbf{S}$  es el espín total y  $\mathbf{Z} = -m\mathbf{k} \times d\mathbf{k}/dt$ , la parte del espín que proviene del zitterbewegung, o movimiento orbital de la carga. El valor medio de  $\mathbf{d}$  es cero, y el valor medio de  $\boldsymbol{\mu}$  es el vector constante  $\boldsymbol{\mu}$ .

e) En su libro<sup>12</sup> analiza la dinámica del espín  $\mathbf{S} = \hbar\boldsymbol{\sigma}/2$ , y llega a la conclusión que

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{p} \times c\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{p} \times \mathbf{u}$$

tanto para el electrón libre como en interacción, y que por lo tanto satisface la misma ecuación dinámica que el momento angular de una partícula con respecto a su centro de carga. El operador espín de Dirac representa al momento angular del electrón con respecto al centro de carga.

Este modelo clásico produce una predicción cinemática que es la misma que la del modelo no relativista descrito en la Sec.2.2.7. Si la carga de la partícula es negativa, la corriente de la misma Fig.2.7 produce un momento magnético que tiene la misma dirección que el espín. Todos los experimentos realizados para medir de forma precisa la relación giromagnética, están basados en la determinación de frecuencias de precesión del espín, las cuales son independientes de la orientación del mismo. El hecho de que sea difícil separar a los electrones en dos haces en un experimento de tipo Stern-Gerlach, está sugiriendo realizar experimentos de polarización a la hora de determinar la orientación relativa entre el espín y el momento magnético. Hemos sugerido recientemente, un par de experimentos para encontrar cómo es esta orientación relativa<sup>13</sup>, y que es analizado en la sección 4.2.6.

Otra consecuencia del modelo clásico es que refuerza el que la interacción con un campo externo sea del tipo del denominado **acoplamiento mínimo**, de la forma  $j_\mu A^\mu$ , entre la corriente asociada al movimiento de la carga y los potenciales externos. Las propiedades magnéticas del electrón provienen de esta corriente y no de ninguna distribución de momentos dipolares magnéticos, de tal manera que la única interacción posible entre un punto cargado  $\mathbf{r}$ , y un campo externo, es el de la corriente  $j^\mu$ , asociada al movimiento del punto  $\mathbf{r}$ , con los potenciales externos.

## 2.6. La ecuación dinámica del electrón con espín

Hemos visto que las partículas relativistas que satisfacen  $u = c$  y  $\mathbf{u}$  perpendicular a  $\dot{\mathbf{u}}$ , el vector de posición  $\mathbf{r}$  se mueve en círculos de acuerdo con la ecuación dinámica (2.165) y para el observador del centro de masa el movimiento armónico (2.166), como vemos dibujado en la figura 2.7. Pero esta solución es independiente del tipo de la Lagrangiana particular que escojamos, como función invariante Poincaré de las variables cinemáticas y sus derivadas, y

<sup>12</sup>P.A.M. Dirac, *The principles of Quantum Mechanics*, Oxford 4th edition 1958, p. 266

<sup>13</sup>M. Rivas, *Are the electron spin and magnetic moment parallel or antiparallel vectors?*, ArXiv:physics/0112057.

que satisfaga la condición de ortogonalidad  $\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0$ . En esta sección vamos a ver en qué se transforma esta ecuación dinámica de la evolución de la carga, para un observador arbitrario.<sup>14</sup>

Como se menciona en el Preámbulo, sea  $\mathbf{r}(t)$ ,  $t \in [t_1, t_2]$  la trayectoria que sigue el punto para un observador arbitrario. Cualquier otro observador  $O'$ , la describe mediante el correspondiente cambio del grupo cinemático

$$t' = T(t, \mathbf{r}(t); g_1, \dots, g_r), \quad \mathbf{r}' = \mathbf{R}(t, \mathbf{r}(t); g_1, \dots, g_r),$$

donde las funciones  $T$  y  $\mathbf{R}$  definen la acción sobre el espacio-tiempo del grupo cinemático  $G$ , de parámetros  $(g_1, \dots, g_r)$ . Entonces, eliminando  $t$  como función de  $t'$  de la primera y sustituyendo en la segunda, obtenemos

$$\mathbf{r}'(t') = \mathbf{r}'(t'; g_1, \dots, g_r). \quad (2.175)$$

Como  $O'$  puede ser cualquier observador, la ecuación (2.175) representa a la familia completa de todas las trayectorias del punto para todos los observadores inerciales. Esta familia está parametrizada por los parámetros del grupo  $g_i$ . Si eliminamos los parámetros  $g_i$  entre la función  $\mathbf{r}'(t')$  y sus sucesivas derivadas temporales, obtendremos la ecuación diferencial invariante que satisface la trayectoria del punto, para cualquier observador inercial. Que es invariante se ve por construcción ya que es independiente de los parámetros del grupo. Vamos a considerar a continuación que  $G$  sea el grupo de Poincaré y obtendremos la ecuación diferencial invariante relativista.

### 2.6.1. El electrón relativista con espín

Supongamos el modelo relativista de electrón. Para el observador  $O^*$  del centro de masa, la trayectoria del centro de carga del electrón está contenida en el plano  $XOY$  y expresada en forma vectorial, y con unidades  $R_0 = \hbar/2mc$ ,  $\omega_0 = 2mc^2/\hbar$

$$\mathbf{r}^*(t^*) = R_0 \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t^* \\ \sin \omega_0 t^* \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{r}^*}{dt^*} = c \begin{pmatrix} -\sin \omega_0 t^* \\ \cos \omega_0 t^* \\ 0 \end{pmatrix},$$

Para el observador del centro de masa  $O^*$  el punto satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 \mathbf{r}^*(t^*)}{dt^{*2}} = -\omega_0^2 \mathbf{r}^*(t^*). \quad (2.176)$$

Como la carga se mueve con la velocidad  $c$  para el observador del centro de masa  $O^*$ , se mueve también con  $c$  para cualquier otro observador  $O$ . La relación de sus medidas viene dada por

$$\begin{aligned} t(t^*; g) &= \gamma(t^* + \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{r}^*(t^*)) + b, \\ \mathbf{r}(t^*; g) &= \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{r}^*(t^*) + \gamma \mathbf{v} t^* + \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{r}^*(t^*)) \mathbf{v} + \mathbf{a}. \end{aligned}$$

La velocidad del punto para el observador  $O$

$$\mathbf{r}^{(1)} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}/dt^*}{dt/dt^*},$$

y lo mismo para sus sucesivas derivadas.

<sup>14</sup>M. Rivas, *The dynamical equation of the spinning electron*, J. Phys. A, **36**, 4703, (2003), ArXiv:physics/0112005.

Si usamos las siguientes abreviaturas para las diversas expresiones, funciones de  $t^*$ :

$$\mathbf{K}(t^*) = R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{r}^*(t^*), \quad \mathbf{V}(t^*) = R(\boldsymbol{\alpha})\frac{d\mathbf{r}^*(t^*)}{dt^*} = \frac{d\mathbf{K}}{dt^*}, \quad \frac{d\mathbf{V}}{dt^*} = -\omega_0^2\mathbf{K},$$

$$B(t^*) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{K}/c^2, \quad A(t^*) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{V}/c^2 = \frac{dB}{dt^*}, \quad \frac{dA}{dt^*} = -\omega_0^2 B,$$

con  $A$  adimensional y  $B$  con dimensiones de tiempo.  $\mathbf{K}$  tiene dimensiones de longitud y  $\mathbf{V}$  de velocidad. En particular

$$\frac{dt}{dt^*} = \gamma(1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{V}/c^2) = \gamma(1 + A),$$

Por otra parte

$$\mathbf{K}^2 = R_0^2, \quad \mathbf{V}^2 = c^2, \quad \mathbf{K} \cdot \mathbf{V} = 0, \quad \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} = c^2 B, \quad \mathbf{V} \cdot \mathbf{v} = c^2 A.$$

Haciendo uso de la relación (2.176) y sus derivadas, obtenemos mediante derivación las siguientes expresiones para las derivadas temporales del punto  $\mathbf{r}$  en el sistema de referencia arbitrario  $O$ :

$$\mathbf{r}^{(1)} = \frac{1}{\gamma(1+A)} \left( \mathbf{V} + \frac{\gamma}{1+\gamma} (1+\gamma+\gamma A)\mathbf{v} \right) \quad (2.177)$$

$$\mathbf{r}^{(2)} = \frac{\omega_0^2}{\gamma^2(1+A)^3} \left( -(1+A)\mathbf{K} + B\mathbf{V} + \frac{\gamma}{1+\gamma} B\mathbf{v} \right), \quad (2.178)$$

$$\mathbf{r}^{(3)} = \frac{\omega_0^2}{\gamma^3(1+A)^5} \left( -3\omega_0^2 B(1+A)\mathbf{K} - (1+A-3\omega_0^2 B^2)\mathbf{V} + \frac{\gamma}{1+\gamma} (A(1+A) + 3\omega_0^2 B^2)\mathbf{v} \right) \quad (2.179)$$

$$\mathbf{r}^{(4)} = \frac{\omega_0^4}{\gamma^4(1+A)^7} \left( (1+A)(1-2A-3A^2-15\omega_0^2 B^2)\mathbf{K} - (7+4A-3A^2-15\omega_0^2 B^2)B\mathbf{V} - \frac{\gamma}{1+\gamma} (1-8A-9A^2-15\omega_0^2 B^2)B\mathbf{v} \right). \quad (2.180)$$

De éstas se obtiene

$$\left( \mathbf{r}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(1)} \right) = \omega_0^2 R_0^2 = c^2, \quad \left( \mathbf{r}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(2)} \right) = 0, \quad (2.181)$$

$$\left( \mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)} \right) = - \left( \mathbf{r}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(3)} \right) = \frac{\omega_0^4 R_0^2}{\gamma^4(1+A)^4}, \quad (2.182)$$

$$\left( \mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(3)} \right) = -\frac{1}{3} \left( \mathbf{r}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(4)} \right) = \frac{\omega_0^5 R_0^2}{\gamma^5(1+A)^6} (2\omega_0 B), \quad (2.183)$$

$$\left( \mathbf{r}^{(3)} \cdot \mathbf{r}^{(3)} \right) = \frac{\omega_0^6 R_0^2}{\gamma^6(1+A)^8} (1-A^2+3\omega_0^2 B^2), \quad (2.184)$$

$$\left( \mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(4)} \right) = \frac{\omega_0^6 R_0^2}{\gamma^6(1+A)^8} (-1+2A+3A^2+9\omega_0^2 B^2), \quad (2.185)$$

$$\left( \mathbf{r}^{(3)} \cdot \mathbf{r}^{(4)} \right) = \frac{4\omega_0^7 R_0^2}{\gamma^7(1+A)^{10}} (1+A+3\omega_0^2 B^2) (\omega_0 B). \quad (2.186)$$

Como  $\omega_0 B$  es adimensional, las dimensiones de estos términos están en los coeficientes  $\omega_0^k R_0^2$ , es decir  $L^2 T^{-k}$ .

Por inspección de (2.177-2.180) vemos que las cuatro derivadas temporales de la posición del centro de carga se expresan como combinación lineal de los tres vectores  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{v}$ , donde los dos primeros son ortogonales y el tercero es un vector constante que, en general, no es combinación lineal de los otros dos.

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}^{(1)} - 3B\gamma(1+A)\mathbf{r}^{(2)} + \frac{\gamma^2(1+A)^3}{\omega_0^2}\mathbf{r}^{(3)}, \quad (2.187)$$

$$\mathbf{V} = \frac{\gamma A}{1+\gamma}\mathbf{r}^{(1)} + \frac{3\gamma^2 B}{1+\gamma}(1+\gamma+\gamma A)(1+A)\mathbf{r}^{(2)} - \frac{\gamma^3(1+A)^3}{(1+\gamma)\omega_0^2}(1+\gamma+\gamma A)\mathbf{r}^{(3)} \quad (2.188)$$

$$\mathbf{K} = \frac{\gamma B}{1+\gamma}\mathbf{r}^{(1)} + \frac{\gamma^2(1+A)}{(1+\gamma)\omega_0^2}[3\omega_0^2 B^2 \gamma - (1+\gamma)(1+A)]\mathbf{r}^{(2)} - \frac{\gamma^4 B(1+A)^3}{(1+\gamma)\omega_0^2}\mathbf{r}^{(3)}. \quad (2.189)$$

Está claro que las tres derivadas  $\mathbf{r}^{(i)}$ ,  $i = 2, 3, 4$  se podrán expresar como una combinación lineal. Si definimos

$$\mathbf{d}_1 = \gamma(1+A)\mathbf{r}^{(1)}, \quad \mathbf{d}_2 = \frac{\gamma^2(1+A)^3}{\omega_0^2}\mathbf{r}^{(2)}, \quad \mathbf{d}_3 = \frac{\gamma^3(1+A)^5}{\omega_0^2}\mathbf{r}^{(3)}, \quad \mathbf{d}_4 = \frac{\gamma^4(1+A)^7}{\omega_0^4}\mathbf{r}^{(4)},$$

obtenemos la relación:

$$(1 - 2A - 3A^2 + 3\omega_0^2 B^2)\mathbf{d}_2 - 6B\mathbf{d}_3 + \mathbf{d}_4 = 0,$$

que en términos de las derivadas  $\mathbf{r}^{(i)}$ , queda

$$(1 - 2A - 3A^2 + 3\omega_0^2 B^2)\mathbf{r}^{(2)} - 6B\gamma(1+A)^2\mathbf{r}^{(3)} + \frac{1}{\omega_0^2}\gamma^2(1+A)^4\mathbf{r}^{(4)} = 0, \quad (2.190)$$

que representa la ecuación diferencial invariante que satisface la posición del centro de carga, en cualquier sistema de referencia inercial.

A partir de las ecuaciones (2.182)-(2.184) podemos expresar las magnitudes  $A$ ,  $B$  y  $\gamma$  en términos de los productos escalares entre las diferentes derivadas temporales  $(\mathbf{r}^{(i)} \cdot \mathbf{r}^{(j)})$ ,  $i, j = 2, 3$ . La ligadura de que la velocidad es  $c$ , implica que estos productos escalares y los sucesivos para derivadas de orden superior, se pueden expresar solamente en términos de tres de ellos, ya que todos se expresan como funciones de  $\gamma$ ,  $A$  y  $B$ .

$$1 + A = \frac{8(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})^{5/2}/R_0}{4(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})^{5/2}/R_0 + 4(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})(\mathbf{r}^{(3)} \cdot \mathbf{r}^{(3)}) - 3(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(3)})^2}, \quad (2.191)$$

$$\omega_0 B = \frac{4(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})^{5/4}(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(3)})/R_0^{1/2}}{4(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})^{5/2}/R_0 + 4(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})(\mathbf{r}^{(3)} \cdot \mathbf{r}^{(3)}) - 3(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(3)})^2}, \quad (2.192)$$

$$\gamma = \frac{4(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})^{5/2}/R_0 + 4(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})(\mathbf{r}^{(3)} \cdot \mathbf{r}^{(3)}) - 3(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(3)})^2}{8(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})^{11/4}/(cR_0^{1/2})}. \quad (2.193)$$

con  $R_0 = c/\omega_0$  y así todos los términos en numerador y denominador tienen las mismas dimensiones espacio-temporales. De esta forma

$$\mathbf{r}^{(4)} - \frac{3(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(3)})}{(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})}\mathbf{r}^{(3)} + \left( \frac{2(\mathbf{r}^{(3)} \cdot \mathbf{r}^{(3)})}{(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})} - \frac{3(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(3)})^2}{4(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})^2} - \frac{1}{R_0}(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})^{1/2} \right)\mathbf{r}^{(2)} = 0. \quad (2.194)$$

Es una ecuación diferencial de cuarto orden que contiene como soluciones trayectorias descritas a la velocidad de la luz. En efecto, si  $(\mathbf{r}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(1)}) = c^2$ , entonces por derivaciones sucesivas obtenemos que  $(\mathbf{r}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(2)}) = 0$  y volviendo a derivar  $(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)}) + (\mathbf{r}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(3)}) = 0$ . Teniendo esto presente y haciendo el producto escalar de (2.194) con  $\mathbf{r}^{(1)}$ , obtenemos  $(\mathbf{r}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(4)}) + 3(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(3)}) =$

0, que es otra de las relaciones entre las derivadas como consecuencia de que  $|\mathbf{r}^{(1)}| = c$ . Vamos a compararla con la ecuación diferencial más general de un punto en el espacio tridimensional dada en el preámbulo (6),

$$\mathbf{r}^{(4)} - \left( \frac{2\dot{\kappa}}{\kappa} + \frac{\dot{\tau}}{\tau} \right) \mathbf{r}^{(3)} + \left( \kappa^2 + \tau^2 + \frac{\dot{\kappa}\dot{\tau}}{\kappa\tau} + \frac{2\dot{\kappa}^2 - \kappa\ddot{\kappa}}{\kappa^2} \right) \mathbf{r}^{(2)} + \kappa^2 \left( \frac{\dot{\kappa}}{\kappa} - \frac{\dot{\tau}}{\tau} \right) \mathbf{r}^{(1)} = 0,$$

donde los puntos sobre  $\kappa$  y  $\tau$  representan derivadas temporales. La ecuación diferencial del centro de carga describe un movimiento helicoidal ya que carece del término en la primera derivada  $\mathbf{r}^{(1)}$ , que implica, de acuerdo con lo expresado en el preámbulo, que existe una relación constante entre curvatura y torsión. En efecto, si el término en  $\mathbf{r}^{(1)}$  es cero, esto implica que  $\dot{\kappa}/\kappa = \dot{\tau}/\tau$ , y por lo tanto el coeficiente de  $\mathbf{r}^{(3)}$  resulta ser  $-3\dot{\kappa}/\kappa$ . En efecto como la curvatura  $\kappa = |d^2\mathbf{r}/ds^2| = (\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})^{1/2}/c^2$ , en términos de derivadas temporales y derivando de nuevo con respecto al tiempo, se deduce que

$$\dot{\kappa} = \frac{1}{c^2} \frac{(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(3)})}{(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})^{1/2}}, \quad \frac{3\dot{\kappa}}{\kappa} = \frac{3(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(3)})}{(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})},$$

que es efectivamente el coeficiente de  $\mathbf{r}^{(3)}$  en (2.194).

Como en términos del parámetro longitud de arco en términos de la terna de Frenet-Serret,

$$\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{t}, \quad \mathbf{r}^{(2)} = \kappa\mathbf{n}, \quad \mathbf{r}^{(3)} = -\kappa^2\mathbf{t} + \dot{\kappa}\mathbf{n} + \kappa\tau\mathbf{b},$$

resulta que

$$\frac{(\mathbf{r}^{(3)} \cdot \mathbf{r}^{(3)})}{(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})} = \kappa^2 + \tau^2 + \left( \frac{\dot{\kappa}}{\kappa} \right)^2,$$

el coeficiente de  $\mathbf{r}^{(2)}$ , teniendo presente la relación entre curvatura y torsión es

$$\kappa^2 + \tau^2 + 3 \left( \frac{\dot{\kappa}}{\kappa} \right)^2 - \frac{\ddot{\kappa}}{\kappa} = \frac{(\mathbf{r}^{(3)} \cdot \mathbf{r}^{(3)})}{(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})} + 2 \left( \frac{\dot{\kappa}}{\kappa} \right)^2 - \frac{\ddot{\kappa}}{\kappa},$$

y como

$$\frac{\ddot{\kappa}}{\kappa} = \frac{(\mathbf{r}^{(3)} \cdot \mathbf{r}^{(3)}) + (\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(4)})}{(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})} - \frac{(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(3)})^2}{(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})^2},$$

y donde el producto escalar  $(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(4)})$  se podrá expresar en términos de los otros 3. Este coeficiente que se puede comprobar sumando los términos de (2.182)-(2.184), es

$$(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(4)}) = \frac{1}{R_0} (\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})^{3/2} - 2(\mathbf{r}^{(3)} \cdot \mathbf{r}^{(3)}) + \frac{15(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(3)})^2}{4(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})}$$

$$2 \left( \frac{\dot{\kappa}}{\kappa} \right)^2 - \frac{\ddot{\kappa}}{\kappa} = \frac{(\mathbf{r}^{(3)} \cdot \mathbf{r}^{(3)})}{(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})} - \frac{3(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(3)})^2}{4(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})^2} - \frac{1}{R_0} (\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})^{1/2},$$

por lo que finalmente obtenemos el coeficiente de la derivada  $\mathbf{r}^{(2)}$ .

Por supuesto, si escogemos como condiciones de contorno para resolver esta ecuación una con la condición  $|\mathbf{r}^{(1)}(0)| \neq c$ , esta ecuación diferencial contiene soluciones en las que el punto  $\mathbf{r}$  no se mueve con velocidad de valor absoluto constante. Pero si  $|\mathbf{r}^{(1)}(0)| = c$ , entonces la solución satisface  $|\mathbf{r}^{(1)}(t)| = c$ , para todo  $t$ .

### 2.6.2. El centro de masa

La posición del centro de masa se define por

$$\mathbf{q} = \mathbf{r} + \frac{1}{\omega_0^2} \gamma^2 (1+A)^3 \mathbf{r}^{(2)} = \mathbf{r} + \frac{2(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)}) \mathbf{r}^{(2)}}{(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})^{3/2} / R_0 + (\mathbf{r}^{(3)} \cdot \mathbf{r}^{(3)})} - \frac{3(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(3)})^2}{4(\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})}. \quad (2.195)$$

ya que si  $\mathbf{v}$  representa la velocidad del origen de  $O^*$  con respecto a  $O$ , de acuerdo con (2.161) es también la velocidad del centro de masa medida por  $O$ . Podemos ver que la derivada temporal de

$$\mathbf{q} = \mathbf{r} + \frac{1}{\omega_0^2} \gamma^2 (1+A)^3 \mathbf{r}^{(2)}, \quad \mathbf{q}^{(1)} = \mathbf{r}^{(1)} + \frac{1}{\omega_0^2} \gamma^2 (1+A)^3 \mathbf{r}^{(3)} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{3\gamma^2 (1+A)^2 (-\omega_0^2 B)}{\gamma(1+A)} \mathbf{r}^{(2)} = \mathbf{v},$$

es decir (2.187) pues  $dA/dt^* = -\omega_0^2 B$  y hay que dividir por  $dt/dt^* = \gamma(1+A)$ . Podemos verificar que tanto  $\mathbf{q}$  como  $\mathbf{q}^{(1)}$  se anulan para el observador del centro de masa.

Si volvemos a derivar, obtenemos

$$\mathbf{q}^{(2)} = \frac{1}{1+A} (1 - 2A - 3A^2 + 3\omega_0^2 B^2) \mathbf{r}^{(2)} - 6B\gamma(1+A) \mathbf{r}^{(3)} + \frac{1}{\omega_0^2} \gamma^2 (1+A)^3 \mathbf{r}^{(4)} = 0,$$

que es otra forma de la ecuación dinámica de la partícula libre (2.190) y (2.194).

Como

$$(\mathbf{q} - \mathbf{r})^2 = \frac{1}{\omega_0^4} \gamma^4 (1+A)^6 (\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)}),$$

$$\mathbf{q}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(1)} = c^2 + \frac{1}{\omega_0^2} \gamma^2 (1+A)^3 (\mathbf{r}^{(3)} \cdot \mathbf{r}^{(1)}) = c^2 - \frac{1}{\omega_0^2} \gamma^2 (1+A)^3 (\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)})$$

por (2.182) con lo que

$$\frac{c^2 - \mathbf{q}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(1)}}{(\mathbf{q} - \mathbf{r})^2} = \frac{\omega_0^2}{\gamma^2 (1+A)^3},$$

que es el inverso del coeficiente de  $\mathbf{r}^{(2)}$  en la definición de  $\mathbf{q}$ . De esta forma, la ecuación de cuarto orden para la posición del centro de carga (2.194) se puede reescribir como un sistema acoplado de ecuaciones de segundo orden para las dos posiciones  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{r}$ ,

$$\frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{c^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{(\mathbf{q} - \mathbf{r})^2} (\mathbf{q} - \mathbf{r}), \quad (2.196)$$

con  $\mathbf{v} = \mathbf{q}^{(1)}$  y  $\mathbf{u} = \mathbf{r}^{(1)}$ , un movimiento libre para el centro de masa y una especie de movimiento central alrededor del centro de masa para el centro de carga.

Si consideramos la expresión general para el centro de masa en (2.171), como  $\mathbf{P} = H\mathbf{v}/c^2$ , se puede reescribir como

$$\mathbf{q} = \mathbf{r} + \left( \frac{c^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{(d\mathbf{u}/dt)^2} \right) \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{(d\mathbf{u}/dt)^2}{c^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}} (\mathbf{q} - \mathbf{r})$$

que si la comparamos con (2.196) obtenemos la relación

$$c^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{q} - \mathbf{r}) \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = |\mathbf{q} - \mathbf{r}| \left| \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right|, \quad \circ \quad \left| \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right| = \frac{c^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{q} - \mathbf{r}|} = \frac{c^2}{R},$$

ya que la aceleración es siempre normal y donde  $R$  es el radio de curvatura de la trayectoria del centro de carga. Por lo tanto, la separación entre el centro de masa y el centro de carga y la curvatura de la trayectoria satisface en cada instante:

$$|\mathbf{q} - \mathbf{r}| = R \left( 1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \right).$$

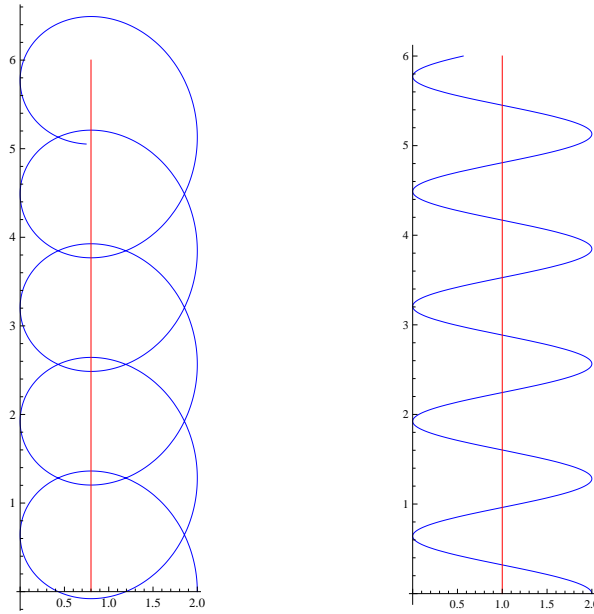


Figura 2.9: **Proyección en el plano  $XOY$  del movimiento del centro de carga (azul) y centro de masa (rojo) de un electrón libre, que se ha lanzado con  $v/c = 0.2$**  La trayectoria de la izquierda, el electron es lanzado en el plano del zitterbewegung, el espín es perpendicular a este plano y la separación entre CC y CM no es constante. La trayectoria de la derecha corresponde a lanzar al electrón en una dirección perpendicular al plano del zitterbewegung, con el espín en la dirección del movimiento. Aquí, la separación entre ambos puntos es constante. Ambos movimientos tienen un período espacial de valor  $d = v\gamma(v)T_0 = 1.28255$ , en estas unidades.

Esta separación no es constante. Si partimos de un electrón en reposo en el observador del centro de masa y lo lanzamos perpendicularmente al plano del zitterbewegung, entonces  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = v^2$  y en este caso la trayectoria es una hélice de curvatura y torsión constante y la separación es constante,  $R_0$ , que está relacionada con el radio de curvatura de la trayectoria  $R$  por

$$R = R_0\gamma(v)^2.$$

Corresponde con la trayectoria de la derecha de la figura 2.9. Si en otra situación  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$  no es constante, entonces la separación oscila. Por ejemplo, si lanzamos al electrón con una velocidad  $\mathbf{v}$  contenida en el plano del zitterbewegung, la trayectoria del centro de carga es plana y en unidades de  $R_0 = 1$ , y  $v/c = 0.2$ , obtenemos la descripción de la izquierda de la figura 2.9. Vemos que la separación oscila entre  $|\mathbf{q} - \mathbf{r}| = 0.8R_0$  y  $|\mathbf{q} - \mathbf{r}| = 1.2R_0$ . De hecho, en estas unidades, el período del movimiento interno es  $T_0 = 2\pi R_0/c = 2\pi$ , para el observador del centro de masa. Para el observador del laboratorio, este período es  $T = \gamma(v)T_0$ , y durante este tiempo el centro de masa recorre una distancia  $d = v\gamma(v)T_0 = 1.28255$  en estas unidades. Vemos que es esta separación el período espacial de la figura mencionada en ambas trayectorias.

Para el caso del electrón no relativista, en el caso de bajas velocidades,  $v/c \rightarrow 0$ ,  $|\mathbf{q} - \mathbf{r}| = R_0$ , y obtenemos las ecuaciones del caso Galileano

$$\frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \omega_0^2(\mathbf{q} - \mathbf{r}). \quad (2.197)$$

un movimiento libre para el centro de masa y un movimiento armónico isótropo alrededor de  $\mathbf{q}$  para el centro de carga, de pulsación constante  $\omega_0 = c/R_0$ .

En la figura 2.10 se representa el movimiento del CC y del CM en el plano  $XOY$  para cuatro velocidades diferentes, en las que se aprecia que la separación relativa entre estos centros

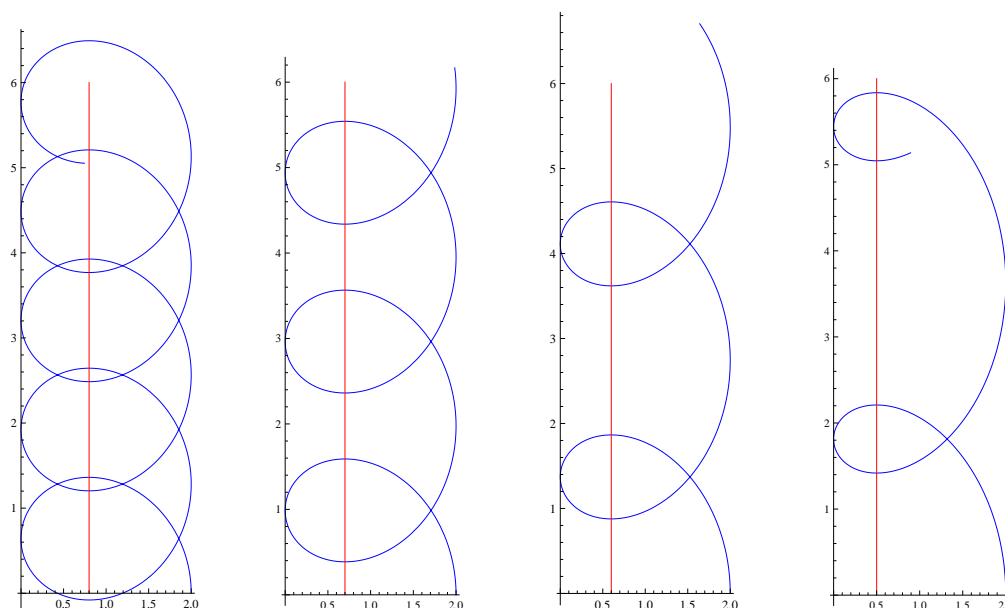


Figura 2.10: **Proyección en el plano XOY, del movimiento del CC y del CM, con velocidades respectivas  $v/c=0.2,0.3,0.4$  y  $0.5$ . Obsérvese que la separación relativa del CM oscila entre  $(1 - v/c)R_0$  y  $(1 + v/c)R_0$ , para esta orientación del espín.**

oscila en el intervalo entre  $(1 - v/c)R_0$  y  $(1 + v/c)R_0$ . Las longitudes de onda (lo que recorre el CM durante una vuelta del CC) de esos movimientos son, respectivamente 1.28255, 1.97597, 2.74221 y 3.6276. En la figura 2.11 los mismos movimientos pero con una velocidad del CM perpendicular al plano del zitterbewegung. En este caso la separación entre centros es constante.

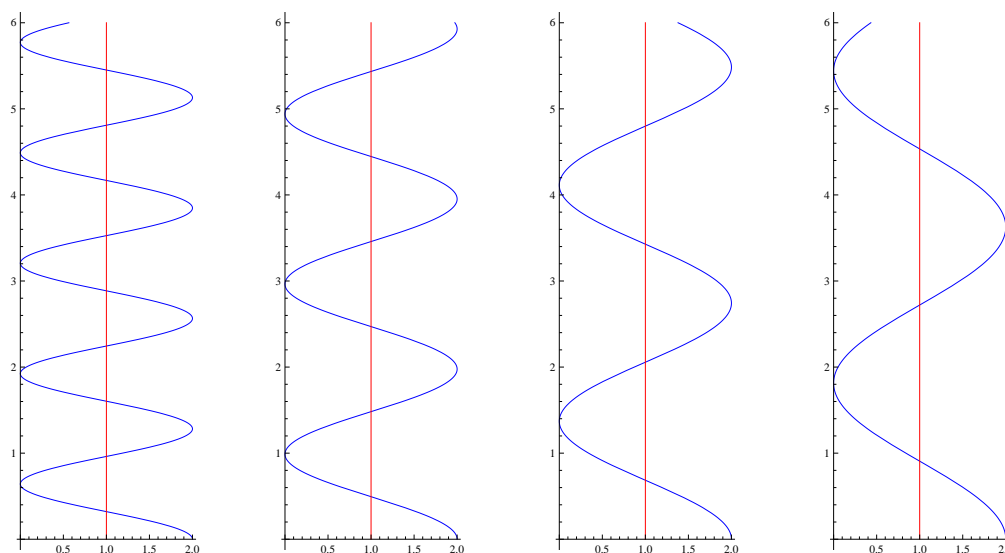


Figura 2.11: **Proyección en el plano XOZ, del movimiento del CC y del CM, con velocidades respectivas  $v/c=0.2,0.3,0.4$  y  $0.5$ . Obsérvese que la separación relativa entre el CC y el CM es constante, pero lo que recorre el CM en cada vuelta del CC es lo mismo que en el caso de la figura anterior.**

En la figura 2.12 se ha hecho un dibujo en perspectiva, habiendo lanzado al electrón con una velocidad  $v$  formando un ángulo de  $30^\circ$  con respecto al plano del zitterbewegung.



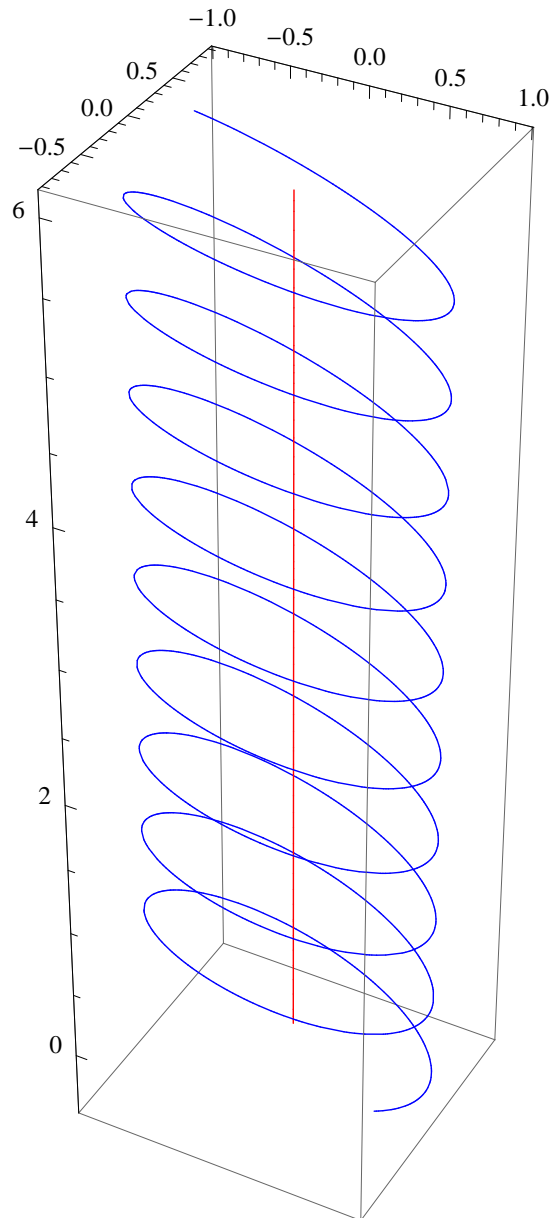


Figura 2.12: Movimiento del CC y del CM en la que la velocidad del CM  $v/c=0.1$  y posee una orientación de  $30^\circ$ , con respecto al plano del zitterbewegung. La separación  $|q-r|$  no es constante, pero este vector  $q-r$  es siempre ortogonal al vector velocidad  $u$  del centro de carga.

### 2.6.3. Interacción con un campo externo

En la situación más general, la Lagrangiana que describe al electrón en interacción es de la forma

$$\tilde{L} = \tilde{L}_0(\mathbf{u}, \dot{t}, \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\omega}) + \tilde{L}_I(t, \mathbf{r}, \dot{t}, \dot{\mathbf{r}}), \quad (2.198)$$

donde como hemos visto, la Lagrangiana libre  $\tilde{L}_0 \equiv \tilde{L}_m$  que da cuenta de las propiedades mecánicas del electrón, su masa  $m$  y su espín  $S_{CM}$ , es independiente de  $t$  y  $\mathbf{r}$  y la dependencia de la orientación  $\boldsymbol{\rho}$  y  $\dot{\boldsymbol{\rho}}$  lo es a través de su dependencia de  $\boldsymbol{\omega}$ . Para la Lagrangiana de interacción  $\tilde{L}_I$ , no puede haber dependencia de  $\dot{\mathbf{u}}$  y de  $\boldsymbol{\omega}$ , porque de acuerdo con el principio atómico ni  $m$  ni  $S_{CM}$  se pueden modificar por una interacción con lo que las funciones que dan lugar al espín  $\mathbf{U} = \partial\tilde{L}/\partial\dot{\mathbf{u}}$ , y  $\mathbf{W} = \partial\tilde{L}/\partial\boldsymbol{\omega}$ , deben provenir solamente de la parte mecánica  $\tilde{L}_m$ . Es en la parte  $\tilde{L}_I$  donde están contenidas las propiedades interactivas de la partícula. En la descripción temporal  $L_0 = L_0(\mathbf{u}, \mathbf{a}, \boldsymbol{\Omega})$  donde  $\mathbf{a}$  es la aceleración del punto  $\mathbf{r}$ ,  $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}/\dot{t}$  y  $L_I = -e\phi(t, \mathbf{r}) + e\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}$ , que solamente depende de la carga de la partícula  $e$  y de los potenciales externos. Las ecuaciones dinámicas de los tres grados de libertad  $\mathbf{r}$  son

$$-\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_m}{\partial \mathbf{u}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial L_m}{\partial \mathbf{a}} \right) + \frac{\partial L_I}{\partial \mathbf{r}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_I}{\partial \mathbf{u}} \right) = 0.$$

La parte relacionada con  $L_m$  se reduce a  $-d\mathbf{P}_m/dt$ , siendo  $\mathbf{P}_m$  el momento lineal mecánico, mientras que la relacionada con  $L_I$  suministra la fuerza de Lorentz sobre la carga localizada en el punto  $\mathbf{r}$ . Pasando al otro miembro la derivada del momento lineal se llega a

$$\frac{d\mathbf{P}_m}{dt} = \mathbf{F}, \quad (2.199)$$

en tanto que la definición habitual del centro de masa permanece inalterada

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{c^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{(\mathbf{q} - \mathbf{r})^2} (\mathbf{q} - \mathbf{r}). \quad (2.200)$$

Esta ecuación también procede de la definición del espín con respecto al centro de carga (2.172)

$$\mathbf{S} = -\frac{H}{c^2} (\mathbf{r} - \mathbf{q}) \times \mathbf{u},$$

y en la definición de  $\mathbf{S} = \mathbf{u} \times \mathbf{U} + \mathbf{W}$  aparecen solamente las funciones  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{W}$  las cuales son propiedades mecánicas que no son modificadas por la interacción ya que  $\tilde{L}_I$  no depende ni de  $\dot{\mathbf{u}}$  ni de  $\boldsymbol{\omega}$ . Si resulta que el espín  $\mathbf{S}$  no es modificado por la interacción, esto implica que en su definición anterior, la  $H$  que figura se refiere al momento temporal mecánico  $H_m$ , que tampoco es modificado por la interacción ya que su definición procede de la  $\tilde{L}_m$ , de ahí que la definición del centro de masa

$$\mathbf{q} - \mathbf{r} = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{S}}{H_m},$$

que es la que conduce a la ecuación (2.200) permanezca inalterada cuando hay una interacción.

Pero el momento lineal mecánico se escribe en términos de la velocidad del centro de masa como  $\mathbf{P}_m = m\gamma(v)\mathbf{v}$ , de manera que las ecuaciones de la partícula libre (2.196) ha quedado reemplazada en presencia de un campo externo por (2.199) y (2.200). Vamos a modificar (2.199),

$$\frac{d\mathbf{P}_m}{dt} = m\gamma(v)\frac{d\mathbf{v}}{dt} + m\gamma(v)^3 \left( \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \frac{\mathbf{v}}{c^2} = \mathbf{F},$$

y si hacemos el producto escalar con  $\mathbf{v}$ , resulta

$$m\gamma(v)^3 \left( \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

por lo que despejando la derivada de orden superior  $d\mathbf{v}/dt$  en el primer miembro, obtenemos las ecuaciones diferenciales que describen la evolución del centro de masa y del centro de carga de un electrón relativista con espín en presencia de un campo electromagnético externo, en cualquier sistema de referencia inercial:

$$\frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2} = \frac{e}{m\gamma(v)} \left[ \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} ([\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}] \cdot \mathbf{v}) \right], \quad (2.201)$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{c^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{(\mathbf{q} - \mathbf{r})^2} (\mathbf{q} - \mathbf{r}). \quad (2.202)$$

donde

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{q}}{dt}, \quad \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

con la ligadura  $|\mathbf{u}| = c$ . Podemos comparar estas ecuaciones relativistas con las no relativistas de la partícula Galileana (2.84) y (2.85). Para los otros tres grados de libertad se sigue manteniendo la misma ecuación dinámica (2.52)

$$\frac{\partial L_m}{\partial \boldsymbol{\rho}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_m}{\partial (d\boldsymbol{\rho}/dt)} \right) = 0, \quad \frac{d\mathbf{W}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{W}. \quad (2.203)$$

ya que la dependencia de estas variables lo es a través de  $\boldsymbol{\Omega}$  siendo  $L_I$  independiente de ella.

De la ecuación (2.202), haciendo el producto escalar de ambos miembros por  $(\mathbf{q} - \mathbf{r})$  resulta:

$$(\mathbf{q} - \mathbf{r}) \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = c^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}.$$

Por otra parte

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{r} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{q} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} - c^2 - \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0,$$

por lo que la función  $(\mathbf{q} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}$  es una integral primera del sistema. Si volvemos a hacer el producto escalar por  $\mathbf{u}$  en ambos miembros de (2.202), vemos que esta integral primera es nula pues  $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{u}/dt = 0$ . El vector velocidad  $\mathbf{u}$  es siempre ortogonal al vector  $\mathbf{q} - \mathbf{r}$ .

#### 2.6.4. Condiciones de contorno

Las ecuaciones del centro de carga  $\mathbf{r}$  de la partícula con espín (2.194) son ecuaciones diferenciales ordinarias de cuarto orden, por lo que para particularizar una solución tenemos dos posibilidades. Desde el punto de vista variacional tendríamos que dar los valores de las variables cinemáticas  $\mathbf{r}(t_1)$  y  $\mathbf{u}(t_1)$  en el instante inicial  $t_1$  y otros tantos valores  $\mathbf{r}(t_2)$  y  $\mathbf{u}(t_2)$  en el instante final  $t_2$ . Desde el punto de vista de singularizar una solución con condiciones de contorno solamente en el instante inicial, tendríamos que suministrar los valores  $\mathbf{r}(t_1)$ ,  $\mathbf{u}(t_1)$ ,  $\mathbf{a}(t_1)$  y  $\mathbf{w}(t_1)$ , de la posición, velocidad, aceleración y sacudida, respectivamente, en el instante inicial  $t_1$ , es decir los valores de las variables  $r_i$  y hasta su tercera derivada en ese instante. Aparentemente son 12 valores iniciales, pero son menos pues  $u(t_1) = c$  y  $\mathbf{u}(t_1) \cdot \mathbf{a}(t_1) = 0$  y estas dos ligaduras nos reducen a 10 el número de parámetros iniciales independientes.

Sin embargo, de acuerdo con (2.201) y (2.202), las ecuaciones de cuarto orden para  $\mathbf{r}$  se han desacoplado en un sistema de ecuaciones de segundo orden para las posiciones  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{r}$  de los centros de masa y centro de carga, respectivamente. Por lo tanto, si queremos obtener la solución en términos de las condiciones de contorno en el instante inicial, tendríamos que suministrar los valores  $\mathbf{r}(t_1)$ ,  $\mathbf{u}(t_1)$ ,  $\mathbf{q}(t_1)$  y  $\mathbf{v}(t_1)$ , de las posiciones y velocidades de ambos puntos, evaluadas en  $t_1$ . Esto tendría la ventaja de que utilizaríamos como condición de contorno la velocidad del centro de masa del electrón, pues mediante un proceso de aceleración inicial en la preparación del experimento podríamos estimar el valor de su momento lineal. También daríamos la posición

inicial de su centro de masa  $\mathbf{q}$  y entonces los valores de  $\mathbf{r}$  y de  $\mathbf{u}$  los expresaríamos en función de la orientación inicial del espín, que se podría controlar con un campo magnético externo.

Supongamos que para el observador del centro de masa el electrón se encuentra con el espín a lo largo del eje  $OZ$  como aparece en la figura y su centro de masa en el origen. Inicialmente el centro de carga se encuentra en el punto de coordenadas  $(R_0, 0, 0)$ , sobre el eje  $OX$ . Para este observador, en el instante inicial la posición, velocidad, aceleración y sacudida valen:

$$\mathbf{r}(0) = R_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}(0) = c\epsilon \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}(0) = c\omega_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}(0) = c\omega^2\epsilon \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon = \pm 1,$$

con  $\epsilon = +1$  para la partícula y  $\epsilon = -1$  para la antipartícula.

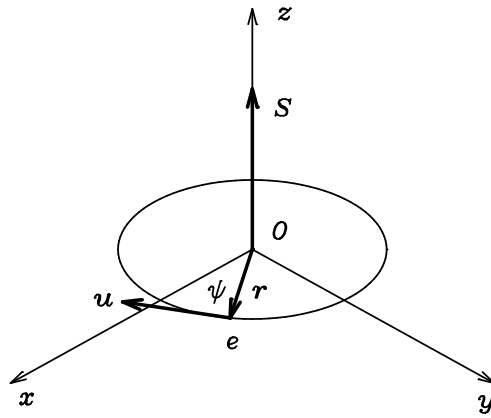


Figura 2.13: El electrón en el sistema de referencia del CM con el espín orientado en la dirección del eje  $OZ$ . La posición del CC en el plano  $XOY$  queda fijada por la fase  $\psi$ .

Si inicialmente localizamos el centro de carga con un desfase  $\psi$  y orientamos el espín según el ángulo cenital  $\theta$  y acimutal  $\phi$ , como

$$R_{OZ}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_{OY}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad R_{OZ}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

las variables iniciales rotadas son  $\mathbf{r}_0 = R_{OZ}(\phi)R_{OY}(\theta)R_{OZ}(\psi)\mathbf{r}(0)$ , y lo mismo para el resto, lo que nos lleva a

$$\mathbf{r}_0 = R_0 \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi \\ \cos \theta \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi \\ -\sin \theta \cos \psi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_0 = c\epsilon \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \sin \psi + \sin \phi \cos \psi \\ \cos \theta \sin \phi \sin \psi - \cos \phi \cos \psi \\ -\sin \theta \sin \psi \end{pmatrix}, \quad (2.204)$$

$$\mathbf{a}_0 = -c\omega_0 \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi \\ \cos \theta \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi \\ -\sin \theta \cos \psi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_0 = -c\omega_0^2\epsilon \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \sin \psi + \sin \phi \cos \psi \\ \cos \theta \sin \phi \sin \psi - \cos \phi \cos \psi \\ -\sin \theta \sin \psi \end{pmatrix}.$$

La relación de estos valores con los que mide un observador inercial  $O'$  que ve moverse a  $O$  con una velocidad  $\mathbf{v}$  viene dada por

$$t'_0 = \gamma(t_0 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0}{c^2}), \quad \mathbf{r}'_0 = \mathbf{r}_0 + \gamma \mathbf{v} t_0 + \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0) \mathbf{v}}{c^2}.$$

Si el instante inicial para proceder a la integración es el  $t'_0 = 0$  en este referencial, eso corresponde a  $t_0 = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0 / c^2$ , para el observador del centro de masa, por lo que la posición inicial del centro de carga en el observador del laboratorio, en el instante  $t'_0 = 0$ , es

$$\mathbf{r}'_0 = \mathbf{r}_0 - \frac{\gamma}{1 + \gamma} \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0) \mathbf{v}}{c^2}.$$

Para el resto de variables resulta ser

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'_0 &= \frac{\mathbf{u}_0 + \gamma \mathbf{v} + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_0) \mathbf{v}}{\gamma(1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_0 / c^2)}, \\ \mathbf{a}'_0 &= \frac{(1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_0 / c^2) \mathbf{a}_0 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_0 / c^2) \mathbf{u}_0 - \frac{\gamma}{(1+\gamma)c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_0) \mathbf{v}}{\gamma^2(1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_0 / c^2)^3}, \\ \mathbf{w}'_0 &= \frac{(1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_0 / c^2) \mathbf{w}_0 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_0 / c^2) \mathbf{u}_0 - \frac{\gamma}{(1+\gamma)c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_0) \mathbf{v}}{\gamma^3(1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_0 / c^2)^4} \\ &\quad - \frac{3(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_0 / c^2) \left[ (1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_0 / c^2) \mathbf{a}_0 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_0 / c^2) \mathbf{u}_0 - \frac{\gamma}{(1+\gamma)c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_0) \mathbf{v} \right]}{\gamma^3(1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_0 / c^2)^5}. \end{aligned}$$

Estas condiciones de contorno contienen información de la velocidad del centro de masa  $\mathbf{v}$  del electrón. Interpretadas como condiciones de contorno en el instante inicial  $t'_0 = 0$  del sistema de ecuaciones (2.201) y (2.202) resulta que conocemos  $\mathbf{r}'_0$ ,  $\mathbf{u}'_0$ ,  $\mathbf{v}'_0 = \mathbf{v}$  y nos faltaría por conocer  $\mathbf{q}'_0$ , la posición inicial del centro de masa.

Si consideramos la definición de la posición del centro de masa (2.171) con  $H = \gamma m c^2$ , y  $\mathbf{P} = \gamma m \mathbf{v}$ , nos queda que

$$\mathbf{q} = \mathbf{r} + \left( \frac{c^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{(d\mathbf{u}/dt)^2} \right) \frac{d\mathbf{u}}{dt},$$

con lo que la condición inicial para el centro de masa en el sistema de referencia del laboratorio sería

$$\mathbf{q}'_0 = \mathbf{r}'_0 + \frac{c^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'_0}{\mathbf{a}'_0{}^2} \mathbf{a}'_0,$$

en términos de la posición, velocidad y aceleración del centro de carga. Conviene recordar que en la expresión de la velocidad del centro de masa está la dependencia de la tercera derivada.

En resumen, para caracterizar las condiciones de contorno en el instante inicial  $t'_0 = 0$ , en el sistema de referencia del laboratorio debemos fijar los valores

$$\mathbf{r}'_0 = \mathbf{r}_0 - \frac{\gamma}{1 + \gamma} \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0) \mathbf{v}}{c^2}, \quad \mathbf{u}'_0 = \frac{\mathbf{u}_0 + \gamma \mathbf{v} + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_0) \mathbf{v}}{\gamma(1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_0 / c^2)}, \quad (2.205)$$

$$\mathbf{q}'_0 = \mathbf{r}'_0 + \frac{c^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'_0}{\mathbf{a}'_0{}^2} \mathbf{a}'_0, \quad \mathbf{v}'_0 = \mathbf{v}, \quad (2.206)$$

con

$$\mathbf{a}'_0 = \frac{(1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_0 / c^2) \mathbf{a}_0 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_0 / c^2) \mathbf{u}_0 - \frac{\gamma}{(1+\gamma)c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_0) \mathbf{v}}{\gamma^2(1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_0 / c^2)^3},$$

y donde las magnitudes  $\mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{u}_0$  y  $\mathbf{a}_0$ , son las magnitudes que aparecen para el observador del centro de masa (2.204). No necesitamos incluir las correspondientes a la sacudida  $\mathbf{w}_0$  porque están ya contenidas en la definición de la velocidad del centro de masa  $\mathbf{v}$ .

### 2.6.5. Unidades naturales

Tenemos una unidad natural de velocidad que es  $c$  y por otra parte tenemos un factor de escala espacial que es el radio  $R_0$  del zitterbewegung para el observador del centro de masa. Si definimos las magnitudes adimensionales  $\mathbf{r} = R_0 \tilde{\mathbf{r}}$ ,  $t = \omega_0 \tilde{t}$ , con  $\omega_0 = c/R_0$ , resulta que

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = R_0 \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tilde{t}} \omega_0 = c \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tilde{t}},$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = c \frac{d^2\tilde{\mathbf{r}}}{d\tilde{t}^2} \omega_0 = \frac{c^2}{R_0} \frac{d^2\tilde{\mathbf{r}}}{d\tilde{t}^2}.$$

por lo tanto la ecuación diferencial (2.202) en unidades naturales queda

$$\frac{d^2\tilde{\mathbf{r}}}{d\tilde{t}^2} = \frac{1 - \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}}{(\tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{r}})^2} (\tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{r}}),$$

donde ahora  $0 \leq \tilde{v} < 1$  y  $\tilde{u} = 1$ . Para la ecuación (2.201) en unidades naturales, llegamos a la expresión

$$\frac{c^2}{R_0} \frac{d^2\tilde{\mathbf{q}}}{d\tilde{t}^2} = \frac{e}{m\gamma} [\mathbf{E} + \tilde{\mathbf{u}} \times \mathbf{B}c - \tilde{\mathbf{v}} (\mathbf{E} + \tilde{\mathbf{u}} \times \mathbf{B}c) \cdot \tilde{\mathbf{v}}]$$

que utilizando la expresión de  $R_0 = \hbar/2mc$ , nos queda:

$$\frac{d^2\tilde{\mathbf{q}}}{d\tilde{t}^2} = \frac{e\hbar}{2m^2c^3\gamma} [\mathbf{E} + \tilde{\mathbf{u}} \times \mathbf{B}c - \tilde{\mathbf{v}} (\mathbf{E} + \tilde{\mathbf{u}} \times \mathbf{B}c) \cdot \tilde{\mathbf{v}}]$$

donde los campos externos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  están definidos en cada instante del laboratorio en la posición del centro de carga  $\mathbf{r}$ .

### 2.6.6. Propiedades invariantes

Si aceptamos el principio atómico las propiedades mecánicas intrínsecas del electrón no son modificadas por una interacción. Si  $H_m$  y  $\mathbf{P}_m$  representan la energía (momento temporal) y momento lineal mecánicos, respectivamente, (de ahí el subíndice  $m$ ) satisfacen para la partícula libre la propiedad

$$H_m^2 - c^2 \mathbf{P}_m^2 = m^2 c^4. \quad (2.207)$$

Además sabemos que  $\mathbf{P}_m = H_m \mathbf{v}/c^2$ , siendo  $\mathbf{v}$  la velocidad del centro de masa. Esto implica que podemos escribirlos como  $H_m = \gamma(v)mc^2$ ,  $\mathbf{P}_m = \gamma(v)m\mathbf{v}$ .

Para la partícula libre también satisfacen la ecuación (2.168) que define el Hamiltoniano de Dirac, que involucra al espín con respecto al centro de carga:

$$H_m = \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}_m + \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \cdot \left( \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{u} \right) \quad (2.208)$$

Sin embargo de la Lagrangiana de la partícula en interacción (2.198) el momento temporal y lineal totales se definen como

$$H = -T - \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{U}}{dt} = H_m + e\phi(t, \mathbf{r}), \quad \mathbf{P} = \mathbf{R} - \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{P}_m + e\mathbf{A}(t, \mathbf{r}).$$

Por lo tanto para la partícula en interacción, en presencia de los potenciales externos, se satisfacen las expresiones equivalentes a las (2.207) y (2.208).

$$(H - e\phi(t, \mathbf{r}))^2 - c^2 (\mathbf{P} - e\mathbf{A}(t, \mathbf{r}))^2 = m^2 c^4, \quad (2.209)$$

$$H - e\phi(t, \mathbf{r}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{P} - e\mathbf{A}(t, \mathbf{r})) + \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \cdot \left( \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{u} \right) \quad (2.210)$$

en términos de los momentos totales  $H$  y  $\mathbf{P}$  y de los potenciales  $\phi$  y  $\mathbf{A}$ . En el caso cuántico, (2.209) y (2.210) nos van a dar las ecuaciones de Klein-Gordon en interacción y la ecuación de Dirac en interacción, respectivamente, que satisface la función de onda del electrón.

Conocida la ecuación dinámica del momento  $\mathbf{P}_m$  dada en (2.199), si derivamos con respecto al tiempo en (2.207) se tiene

$$2H_m \frac{dH_m}{dt} - 2c^2 \mathbf{P}_m \cdot \frac{d\mathbf{P}_m}{dt} = 0, \quad \frac{dH_m}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}(t, \mathbf{r}),$$

es decir  $dH_m = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{q}$ , la variación de la energía mecánica es el trabajo de la fuerza externa, definida en el centro de carga  $\mathbf{r}$ , a lo largo de la trayectoria del centro de masa  $\mathbf{q}$ .

## 2.7. Partículas y antipartículas

La Lagrangiana más general de una partícula elemental en interacción se escribe

$$\tilde{L} = \tilde{L}_0 + \tilde{L}_I,$$

donde  $\tilde{L}_0$  representa la Lagrangiana libre y  $\tilde{L}_I$  la parte que da cuenta de la interacción.

Las propiedades mecánicas invariantes de la partícula, que no son modificadas por la interacción, proceden de la Lagrangiana libre  $\tilde{L}_0$ . Estas propiedades están relacionadas con el momento temporal  $H_m$  y lineal  $\mathbf{P}_m$  y el espín con respecto al centro de carga  $\mathbf{S} = \mathbf{u} \times \mathbf{U} + \mathbf{W} = \mathbf{Z} + \mathbf{W}$ . Como la parte de la interacción  $\tilde{L}_I$ , no puede modificar la definición de las dos funciones  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{W}$ , la estructura del espín permanece inalterada, de acuerdo con el Principio Atómico. En el contexto relativista y para la partícula cuyo centro de carga se mueve a la velocidad  $c$ , entre estos observables existe la relación, invariante entre observadores,

$$H_m - \mathbf{P}_m \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \cdot \left( \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{u} \right).$$

Para los observables mecánicos  $H_m$  y  $\mathbf{P}_m$ , definidos a partir de la parte  $\tilde{L}_0$ , se tiene también que para cualquier observador se verifica

$$(H_m/c)^2 - \mathbf{P}_m^2 = m^2 c^2,$$

donde  $m$  es un observable positivo que se interpreta como la masa de la partícula. Entre estos dos observables mecánicos hay la relación,

$$\mathbf{P}_m = H_m \mathbf{v} / c^2$$

donde  $\mathbf{v}$  representa la velocidad del centro de masa de la partícula. Esto trae consigo que

$$H_m = \pm \gamma(v) m c^2, \quad \mathbf{P}_m = \pm \gamma(v) m \mathbf{v}.$$

El formalismo relativista predice que hay dos clases de sistemas materiales de la misma masa positiva  $m$ , pero en los que  $H_m$  puede ser positivo o negativo y que el momento lineal mecánico  $\mathbf{P}_m$ , tenga la dirección de la velocidad del centro de masa o en sentido contrario, respectivamente. Al primero se le da el nombre de partícula, reservando el nombre de antipartícula para el segundo. La diferencia entre ambos es que si la Lagrangiana libre del primero es  $\tilde{L}_0$ , entonces la Lagrangiana libre del segundo es  $-\tilde{L}_0$ .

En cuanto a la estructura interna del movimiento de las variables cinemáticas, implica que para la partícula, fijada la dirección del espín  $\mathbf{S}$ , el movimiento del centro de carga es antiorbital

para la partícula y orbital para la antipartícula. Es claro que las propiedades mecánicas inmodificables  $H_m$ ,  $\mathbf{P}_m$  y  $\mathbf{S}$ , provenientes de la Lagrangiana mecánica libre  $\tilde{L}_0$ , cambian de signo cuando proceden de  $-\tilde{L}_0$ , pues todas las funciones  $T$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{W}$  también cambian de signo.

Para la parte  $\tilde{L}_I$  toma la forma general

$$\tilde{L}_I = -e\phi(t, \mathbf{r})\dot{t} + e\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}},$$

donde la constante  $e$  representa la carga de la partícula y cuyo signo está indeterminado y

$$\tilde{L}_I^* = -e^*\phi(t, \mathbf{r})\dot{t} + e^*\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}},$$

para la antipartícula, siendo  $e^*$  la carga de la antipartícula y  $\phi$  y  $\mathbf{A}$  los potenciales externos.

Para la partícula, de  $\tilde{L}_p = \tilde{L}_0 + \tilde{L}_I$ , se llega a que

$$\frac{d\mathbf{P}_m}{dt} = e(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{P}_m = \gamma(v)m\mathbf{v}, \quad \frac{d(\gamma(v)m\mathbf{v})}{dt} = e(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}),$$

mientras que para la antipartícula, de  $\tilde{L}_a = -\tilde{L}_0 + \tilde{L}_I^*$ , se llega a

$$\frac{d\mathbf{P}_m}{dt} = e^*(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{P}_m = -\gamma(v)m\mathbf{v}, \quad \frac{d(\gamma(v)m\mathbf{v})}{dt} = -e^*(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}),$$

donde  $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$  y  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Si frente a un mismo campo electromagnético externo, la aceleración del centro de masa de la partícula es opuesta a la de la antipartícula, entonces  $-e^* = -e$ , ambos objetos tendrían la misma carga, y esta última ecuación dinámica se reescribiría,

$$\frac{d}{dt}(\gamma(v)m\mathbf{v}) = -e(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}).$$

Podríamos definir el momento lineal siempre en el sentido de la velocidad, con lo cual  $H_m$  sería siempre un observable definido positivo, lo que nos daría lugar a dos posibles tipos de partículas que a igualdad de masa solamente difieren en el signo de la carga, y que vendrían descritas por las dos Lagrangianas

$$\tilde{L}_p = \tilde{L}_0 - e\phi(t, \mathbf{r})\dot{t} + e\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}},$$

$$\tilde{L}_a = \tilde{L}_0 + e\phi(t, \mathbf{r})\dot{t} - e\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}},$$

que corresponde simplemente a un cambio de  $e$  por  $-e$ , y donde la parte común  $\tilde{L}_0$  es la que conduce a una  $H_m > 0$  y  $\mathbf{P}_m = H_m\mathbf{v}/c^2$ . En cualquier caso, el signo de la carga de la partícula no está definido.

Como las ecuaciones dinámicas que se obtienen de  $\tilde{L}_a$  y de  $-\tilde{L}_a$  son las mismas, conducen a dos posibles interpretaciones equivalentes de las diferencias entre partícula y antipartícula. Una es que ambos objetos elementales tienen la misma masa y carga eléctrica, pero sus propiedades mecánicas  $H_m$  y  $\mathbf{P}_m$  son opuestas. La interpretación del convenio actual es que poseen cargas opuestas, lo que nos lleva a adoptar la definición de que la energía es positiva y que el momento lineal tiene la dirección de la velocidad del centro de masa para ambas. La exigencia de la positividad de la energía puede tener que ver con la dirección de la flecha del tiempo. Ver el análisis que se hace en la sección 6.10.3 sobre transformaciones activas y pasivas del grupo cinemático.

Este tratamiento es válido para el establecimiento de las ecuaciones dinámicas del centro de masa de cada partícula. Para la parte del movimiento interno tendríamos para ambas la ecuación

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{c^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{(\mathbf{q} - \mathbf{r})^2}(\mathbf{q} - \mathbf{r}),$$



que no es otra que la definición de la posición del centro de masa

$$\mathbf{q} = \mathbf{r} + \frac{c^2}{H_m} \left( \frac{H_m - \mathbf{P}_m \cdot \mathbf{u}}{(d\mathbf{u}/dt)^2} \right) \frac{d\mathbf{u}}{dt}.$$

La expresión del espín  $\mathbf{S}$  en términos de estas variables sería para la partícula

$$\mathbf{S}_p = \left( \frac{H_m - \mathbf{P}_m \cdot \mathbf{u}}{(d\mathbf{u}/dt)^2} \right) \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{u}, \quad \text{o bien} \quad \mathbf{S}_p = -\gamma(v)m(\mathbf{r} - \mathbf{q}) \times \mathbf{u}$$

en tanto que para la antipartícula

$$\mathbf{S}_a = \left( \frac{H_m - \mathbf{P}_m \cdot \mathbf{u}}{(d\mathbf{u}/dt)^2} \right) \mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \quad \text{o bien} \quad \mathbf{S}_a = \gamma(v)m(\mathbf{r} - \mathbf{q}) \times \mathbf{u},$$

con  $H_m = \gamma(v)mc^2$  y  $\mathbf{P}_m = \gamma(v)m\mathbf{v}$ . Esto nos distingue en la estructura interna en el hecho de que el espín  $\mathbf{S}$ , tiene la dirección de la velocidad angular para la antipartícula y en sentido opuesto para la partícula.

Experimentalmente sabemos que el par electrón-positrón, si su momento angular total es cero, se desintegra en la emisión de dos fotones, con espines opuestos, de energía total  $2mc^2$ . En el proceso se conserva la energía, el momento lineal y el angular y la carga eléctrica. Si el estado inicial es de espín 1, entonces la desintegración lo es con emisión de tres o más fotones. La interpretación, para partículas masivas, de que la antipartícula es un objeto de carga opuesta, es consistente con este resultado experimental.

En el caso de los fotones, al no tener carga podríamos suponer que son su propia antipartícula. Esta es una interpretación que se suele hacer habitualmente. Pero eso mismo podríamos hacer con los neutrinos, que al no tener carga eléctrica serían también sus propias antipartículas. Sin embargo, los antineutrinos poseen número leptónico opuesto y son diferentes que los neutrinos. La conservación del número leptónico requiere que sean distintos. Sin embargo, desde el punto de vista mecánico,  $\mathbf{S}$  y  $\omega$  tienen la misma dirección para el fotón y sentido contrario para el antifotón. Su distinción física se podría determinar viendo cómo interaccionan con una red cristalina. Si la óptica de los antifotones es la misma que la de los fotones no habría diferencia entre ellos, pero es posible que al interaccionar con el medio cristalino, aunque no poseen carga, su desviación podría tener que ver con la diferente orientación relativa del momento angular con la velocidad angular.

Como los fotones no tienen carga, esta interpretación de que el momento lineal tiene la dirección de la velocidad y la carga es opuesta, nos lleva a que fotones y antifotones son la misma partícula. En cambio, en la primera de las interpretaciones no habría ambigüedad, ya que las propiedades mecánicas  $H$  y  $\mathbf{p}$  serían opuestas. Hoy en día sabemos que tanto en electrodinámica como en cromodinámica, los mecanismos de interacción entre la materia (fermiones de espín 1/2) es el intercambio de bosones virtuales de espín 1 (fotones, gluones, bosones masivos  $W^\pm$ ,  $Z^0$ ). En el caso electromagnético, si solamente existiera el intercambio de fotones no se produciría el fenómeno de la atracción.

Supongamos, como se describe en la figura 2.14, que un electrón y un positrón, ambos de energía mecánica  $H_m$  positiva y momento lineal en la dirección de la velocidad de su centro de masa, interaccionan intercambiando un fotón, que de forma virtual es emitido por el electrón en 1 y absorbido por el positrón en 2. Debido al intercambio de momento lineal y energía, el electrón adquiere un momento lineal  $\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{k}$ , mientras que el positrón termina con un momento lineal  $\mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_2 + \mathbf{k}$ , y las dos partículas se repelen. El proceso hubiera sido el mismo si quien hubiera emitido el fotón virtual fuera el positrón.

Como sabemos que partículas de carga opuesta se atraen, el mecanismo debería haber sido el de la figura 2.15, con un intercambio de un antifotón, emitido desde 1 por el electrón, con

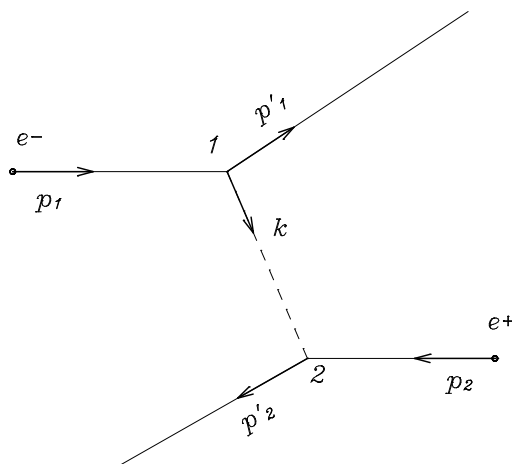


Figura 2.14: Interacción de un electrón y un positrón intercambiando un fotón. Ambas partículas se separan.

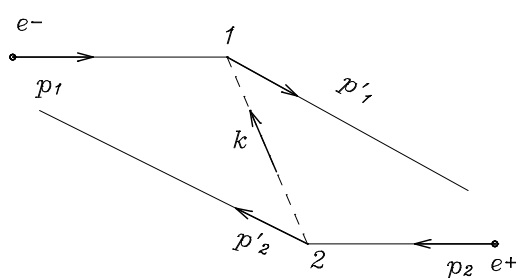


Figura 2.15: Interacción de un electrón y un positrón intercambiando un antifotón. Ambas partículas se atraen.

momento lineal  $\mathbf{k}$ , en sentido contrario a la velocidad, siendo absorbido en 2 por el positrón. Ahora también  $\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{k}$ , y el resultado es que el electrón se acerca al positrón. Lo mismo le sucede a éste. También se podría interpretar este proceso al revés, siendo el positrón quien emitiera el antifotón virtual.

En un átomo, la existencia de estados ligados de electrones con respecto a un núcleo positivamente cargado, implica un proceso de atracción electromagnética. Si este proceso se interpreta como el intercambio de bosones virtuales entre el núcleo y los electrones, estos bosones tienen que ser necesariamente antifotones.

### 2.7.1. Detección de antimateria cósmica

Uno de los proyectos para detectar antimateria en el universo y verificar la existencia de galaxias de antimateria consistiría en detectar átomos de antimateria en los rayos cósmicos. Antiprotones y positrones ya se detectan, pero pueden haber sido producidos en el sol o en estrellas de nuestra galaxia.

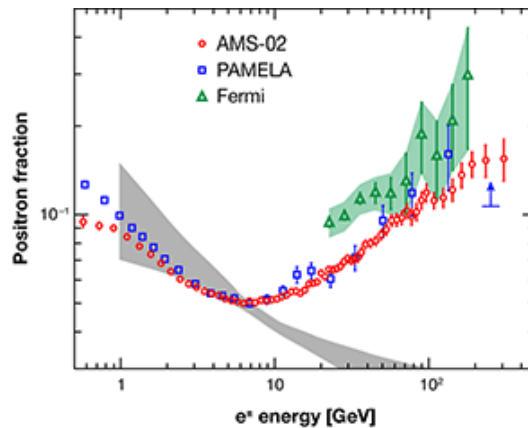


Figura 2.16: Medida de la relación positrón/electrón hecha por el detector de la AMS02. La banda de color gris es la predicción de esta relación, hecha por astrofísicos y basada en modelos de interacción y fenómenos de transporte en la Galaxia. La relación medida (datos de color rojo), incrementa a partir de los 10 GeV.

La estructura compuesta más simple formada por antimateria sería el núcleo de antihelio formado por dos antiprotones y dos antineutrones, es decir una partícula antialfa. Esto llevó a desarrollar un espectrómetro para medir estas partículas. Se le denomina Alpha Magnetic Spectrometer del cual la versión AMS02 fue instalada en la ISS (International Space Station) en mayo de 2011, a una altura media de 350 Km. Hasta 2013 había detectado del orden de  $25 \times 10^9$  medidas de electrones y positrones en el rango de 0.5 a 350 GeV, de los cuales  $4 \times 10^5$  eran positrones, observando un aumento de la relación positrones/electrones en el rango de 10 a 250 GeV, no habiendo una diferencia significativa a lo largo del tiempo ni en la dirección de observación, pero confirmando *an unexplained excess of high-energy positrons in Earth-bound cosmic rays*, en palabras de Samuel Ting, director del proyecto <sup>15</sup>. En diciembre de 2016 informa que ha detectado una pequeña fracción de antihelio-3 entre unos  $10^9$  núcleos de helio detectados durante un año.

<sup>15</sup>S. Coutu, *Physics* **6**, 40 (2013); AMS Collaboration *Phys. Rev. Lett.* **110**, 141102 (2013)

## 2.8. Apéndice: Grupo de Rotaciones $SO(3)$

Vamos a describir geoméricamente una rotación de valor  $\alpha$  alrededor de un eje arbitrario, descrito por el vector unitario  $\mathbf{u}$ . Interpretamos que para  $\alpha > 0$  el giro se realiza el sentido horario cuando miramos en la dirección del vector unitario  $\mathbf{u}$ . Si  $\alpha < 0$ , el sentido de giro es el antihorario. Por lo tanto, según la figura 2.17, un punto cualquiera caracterizado por el vector  $\mathbf{r}$ , pasará a la posición dada por el vector  $\mathbf{r}'$ ,

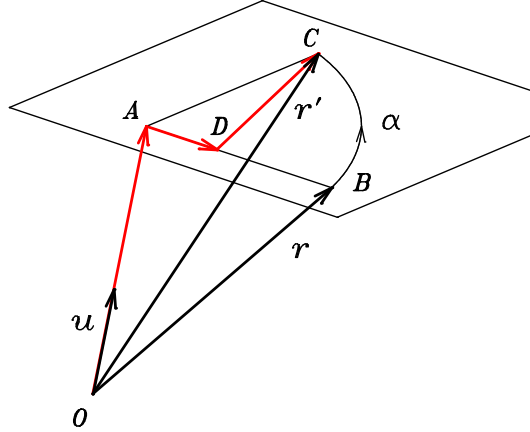


Figura 2.17: Rotación activa de valor  $\alpha$  del vector  $\mathbf{r}$ , alrededor del eje  $OA$

Vectorialmente,  $\mathbf{r}' = \mathbf{OA} + \mathbf{AD} + \mathbf{DC}$ , siendo  $\mathbf{DC}$  perpendicular al vector  $\mathbf{AB}$ .

$$\mathbf{OA} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}$$

$$\mathbf{AD} = \mathbf{AB} \cos \alpha = (\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}) \cos \alpha$$

$$\mathbf{DC} = |\mathbf{AC}| \sin \alpha \mathbf{n}$$

siendo  $\mathbf{n}$  un vector unitario perpendicular a  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{r}$  y por lo tanto

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{u} \times \mathbf{r}|}$$

pero  $|\mathbf{u} \times \mathbf{r}| = |\mathbf{AC}| = |\mathbf{AB}|$ ,  $|\mathbf{AD}| = |\mathbf{AC}| \cos \alpha$ ,  $|\mathbf{DC}| = |\mathbf{AC}| \sin \alpha$ , con lo que

$$\mathbf{DC} = \mathbf{u} \times \mathbf{r} \sin \alpha$$

De esta manera el vector  $\mathbf{r}'$  se expresa como:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \cos \alpha + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}(1 - \cos \alpha) + \mathbf{u} \times \mathbf{r} \sin \alpha, \quad (2.211)$$

que expresado por componentes:

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i \cos \alpha + (x_j u_j) u_i (1 - \cos \alpha) + \varepsilon_{ijk} u_j x_k \sin \alpha = \\ &= (\delta_{ik} \cos \alpha + u_i u_k (1 - \cos \alpha) + \varepsilon_{ijk} u_j \sin \alpha) x_k = \mathcal{R}(\alpha, \mathbf{u})_{ik} x_k. \end{aligned}$$

Si definimos el vector  $\boldsymbol{\alpha} = \alpha \mathbf{u}$ , entonces toda rotación queda parametrizada por un vector de  $\mathbb{R}^3$ ,

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha})_{ik} = \delta_{ik} \cos \alpha + \frac{\alpha_i \alpha_k}{\alpha^2} (1 - \cos \alpha) + \varepsilon_{ijk} \frac{\alpha_j}{\alpha} \sin \alpha \quad (2.212)$$

donde el primer índice  $i$  es un índice de fila y el segundo  $k$  de columna de la matriz que caracteriza a esta rotación. Si fijamos el vector  $\mathbf{u}$ , entonces una rotación en el sentido positivo alrededor de un eje de valor  $\alpha$  produce el mismo efecto que una rotación de valor  $2\pi - \alpha$  tomada en sentido contrario. Entonces, a la hora de singularizar cada rotación por un vector  $\boldsymbol{\alpha}$ , la variedad que caracteriza al grupo se reduce al conjunto de puntos contenidos dentro y sobre la superficie de una esfera de radio  $\pi$ , (ver figura 2.18) pero donde los puntos opuestos de la superficie de la esfera, que representan rotaciones de valor  $\pi$ , corresponden a una misma rotación y por lo tanto están identificados.

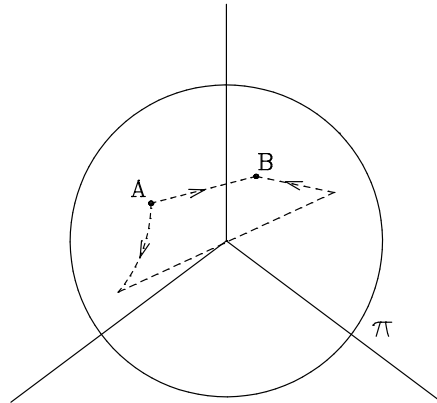


Figura 2.18: Variedad doblemente conexa del grupo  $SO(3)$

Esta particularidad hace que si tratamos de unir dos puntos de la variedad mediante una curva de puntos de la variedad, hay dos tipos de curvas que nos unen dichos puntos. Estos tipos de curvas no pueden reducirse, por deformación, el uno al otro, ya que o pasan por la superficie de la esfera y saltan a su punto opuesto, o bien unen directamente ambos puntos. La variedad es un conjunto cerrado y acotado, es decir compacto. Y como la conexión mediante arcos de dos puntos cualesquiera tiene dos posibilidades, pasando por el borde o sin pasar, resulta que el grupo de rotaciones es también doblemente conexo. El  $\det(\mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha})) = 1$ , con lo que el grupo de rotaciones se identifica con  $SO(3)$ , el grupo de matrices  $3 \times 3$  ortogonales de determinante unidad (Special Orthogonal group).

Otras parametrizaciones alternativas se obtienen definiendo el vector  $\boldsymbol{\phi} = \sin(\alpha/2)\mathbf{u}$  y la matriz de rotación se representa por:

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{\phi})_{ik} = (1 - 2\phi^2) \delta_{ik} + 2\phi_i \phi_k + 2\sqrt{1 - \phi^2} \varepsilon_{ijk} \phi_j \quad (2.213)$$

y la variedad es una esfera de radio unidad con identificación de puntos opuestos sobre la superficie.

Si definimos el vector  $\boldsymbol{\rho} = \tan(\alpha/2)\mathbf{u}$  en esta parametrización una rotación se expresa mediante:

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{\rho})_{ik} = \frac{1}{1 + \rho^2} [(1 - \rho^2) \delta_{ik} + 2\rho_i \rho_k + 2\varepsilon_{ijk} \rho_j] \quad (2.214)$$

y la variedad es el espacio  $\mathbb{R}^3$  compacto, donde la compactificación se ha obtenido añadiendo los puntos del infinito en cada dirección, y que además cada par de puntos opuestos se han identificado. Denotaremos esta variedad por  $\mathbb{R}_c^3$ .

**Ejercicio:** Dada la matriz ortogonal siguiente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

determinar qué tipo de transformación de coordenadas genera.

**Solución:** Como el determinante es  $-1$  resulta ser una rotación seguida de una inversión con respecto al origen. La traza es cero, luego la rotación es de  $0 = 1 + 2 \cos \alpha$ ,  $\alpha = 2\pi/3$ , alrededor de un eje de cosenos directores proporcionales a  $\mathbf{u} \sim (1, -1, 1)$ .

**Ejercicio:** Calcular, utilizando dos parametrizaciones distintas del grupo de rotaciones, la matriz que representa una rotación, en el sentido pasivo, de valor  $\alpha = 30^\circ$  alrededor de un eje cuyos cosenos directores son proporcionales a los números  $(-1, 2, 2)$ .

### 2.8.1. Parametrización normal o canónica del grupo $SO(3)$

A partir de la relación  $\mathcal{R}^T \mathcal{R} = 1$ , obtenemos nueve ecuaciones entre las nueve componentes de la matriz de rotación  $\mathcal{R}$ . Sin embargo sólo son en realidad seis ecuaciones independientes, ya que considerada cada matriz como tres vectores fila o columna, dichas relaciones lo que establecen es que dichos vectores son ortogonales dos a dos y de norma unidad. El que el determinante sea  $+1$  representa que tomados consecutivamente, dichos vectores forman un triedro ortonormal directo(antihorario), siendo un triedro inverso(horario) en el caso de que el determinante valga  $-1$ . Quedan por lo tanto tres parámetros libres de ahí que la variedad que caracteriza al grupo sea de dimensión 3. La parte conectada continuamente con la unidad  $SO(3)$  como grupo de Lie, tendrá un álgebra de Lie de dimensión 3. Sea  $\mathcal{R} = \mathbb{I} + \epsilon M$  una rotación próxima a la unidad, con  $\epsilon$  infinitesimal y  $M$  una matriz a determinar. Como  $\mathcal{R}^T = \mathcal{R}^{-1} = \mathbb{I} + \epsilon M^T = \mathbb{I} - \epsilon M$ , resulta que  $M^T = -M$  por lo que  $M$  es una matriz antisimétrica arbitraria  $3 \times 3$ , que se denomina generador de la rotación.

El álgebra de Lie de los generadores de  $SO(3)$ , que se suele representar por  $so(3)$ , es el espacio vectorial real de las matrices reales antisimétricas  $3 \times 3$ . Una base de dicho espacio viene dada por las tres matrices linealmente independientes:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con lo que comprobamos que generan un espacio vectorial de dimensión 3. Un álgebra de Lie, además de ser espacio vectorial posee una ley de composición interna, que es distributiva respecto de la suma vectorial, pero que no es en general conmutativa ni asociativa. Basta para caracterizarla, el conocer dicha ley para los vectores de la base. Para matrices la ley  $[ \cdot, \cdot ]$  se reduce a su conmutador. Los tres  $J_i$  cumplen las reglas de conmutación:

$$[J_i, J_k] = \varepsilon_{ikl} J_l, \quad i, k, l = 1, 2, 3, \quad (2.215)$$

es decir la tabla que define la operación  $[ \cdot, \cdot ]$  del álgebra de Lie  $so(3)$  es la

$so(3)$	$J_1$	$J_2$	$J_3$
$J_1$	0	$J_3$	$-J_2$
$J_2$	$-J_3$	0	$J_1$
$J_3$	$J_2$	$-J_1$	0

Sea  $M = \sum \alpha_i J_i$  una combinación lineal arbitraria de los elementos de la base  $J_i$ , con tres números reales arbitrarios  $\alpha_i$ . Esa suma la vamos a escribir formalmente como  $\sum \alpha_i J_i = \alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{J}$ , siendo  $\alpha_i = \alpha u_i$  en términos de las tres componentes de un vector unidad  $\mathbf{u}$  y donde mediante

el ‘producto escalar’  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{J} \equiv U$  lo que queremos expresar es el sumatorio  $\sum u_i J_i$  en forma compacta. Calculemos la matriz

$$\begin{aligned} \exp(M) &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \mathbb{I} + \frac{M}{n} \right)^n \equiv \exp(\alpha U) = \exp \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\alpha}{1!} \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\alpha^2}{2!} \begin{pmatrix} -(u_2^2 + u_3^2) & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_1 u_2 & -(u_1^2 + u_3^2) & u_2 u_3 \\ u_1 u_3 & u_2 u_3 & -(u_1^2 + u_2^2) \end{pmatrix} + \\ &\quad + \frac{\alpha^3}{3!} \begin{pmatrix} 0 & u_3 & -u_2 \\ -u_3 & 0 & u_1 \\ u_2 & -u_1 & 0 \end{pmatrix} + \dots \end{aligned}$$

de tal manera que habiendo llamado

$$U = \mathbf{u} \cdot \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U^2 = \begin{pmatrix} -(u_2^2 + u_3^2) & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_1 u_2 & -(u_1^2 + u_3^2) & u_2 u_3 \\ u_1 u_3 & u_2 u_3 & -(u_1^2 + u_2^2) \end{pmatrix},$$

entonces  $U$  verifica  $U^3 = -U$ ,  $U^4 = -U^2$  y así sucesivamente para todas sus potencias, con lo que el desarrollo anterior se expresa en términos únicamente de las matrices  $\mathbb{I}$ ,  $U$  y  $U^2$ , en la forma

$$\exp(\alpha U) \equiv \exp(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{J}) = \mathbb{I} + U \left( \frac{\alpha}{1!} - \frac{\alpha^3}{3!} + \dots \right) + U^2 \left( \frac{\alpha^2}{2!} - \frac{\alpha^4}{4!} + \dots \right),$$

es decir la expresión obtenida anteriormente (2.212).

Si consideramos que dos de los parámetros  $\alpha_i$  son nulos y analizamos el subgrupo uniparamétrico que genera el parámetro no nulo, por ejemplo  $\alpha_1$ , entonces

$$\begin{aligned} \exp(\alpha J_1) \exp(\beta J_1) &= (\mathbb{I} + \sin \alpha J_1 + (1 - \cos \alpha) J_1^2) (\mathbb{I} + \sin \beta J_1 + (1 - \cos \beta) J_1^2) = \\ &\mathbb{I} + \sin(\alpha + \beta) J_1 + (1 - \cos(\alpha + \beta)) J_1^2 = \exp((\alpha + \beta) J_1), \end{aligned}$$

con lo que en esta parametrización la ley de composición de cada subgrupo uniparamétrico es la suma de los parámetros de los elementos del grupo que intervienen en la operación. Al parámetro que define la aplicación exponencial se le denomina **parámetro normal o canónico**.

La parametrización normal del grupo de rotaciones, corresponde por lo tanto a aquella en la que la variedad es la esfera de radio  $\pi$ , con lo que en la parametrización normal una rotación se representa por:

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha})_{ik} = (\exp(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{J}))^i_k = \delta_{ik} \cos \alpha + \frac{\alpha_i \alpha_k}{\alpha^2} (1 - \cos \alpha) + \varepsilon_{ijk} \frac{\alpha_j}{\alpha} \sin \alpha,$$

que es la expresión (2.212).

De forma desarrollada  $\mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha})$  resulta ser:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha + u_1^2 (1 - \cos \alpha) & -u_3 \sin \alpha + u_1 u_2 (1 - \cos \alpha) & u_2 \sin \alpha + u_1 u_3 (1 - \cos \alpha) \\ u_3 \sin \alpha + u_2 u_1 (1 - \cos \alpha) & \cos \alpha + u_2^2 (1 - \cos \alpha) & -u_1 \sin \alpha + u_2 u_3 (1 - \cos \alpha) \\ -u_2 \sin \alpha + u_3 u_1 (1 - \cos \alpha) & u_1 \sin \alpha + u_3 u_2 (1 - \cos \alpha) & \cos \alpha + u_3^2 (1 - \cos \alpha) \end{pmatrix}$$

Podemos ver que  $\mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha})^{-1} = \mathcal{R}^T(\boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{R}(-\boldsymbol{\alpha})$  y que la suma de los elementos diagonales vale  $1 + 2 \cos \alpha$ , en tanto que los cosenos directores del vector unitario  $\mathbf{u}$  que define el eje de giro son proporcionales a los números  $(\mathcal{R}_{32} - \mathcal{R}_{23}, \mathcal{R}_{13} - \mathcal{R}_{31}, \mathcal{R}_{21} - \mathcal{R}_{12})$ , salvo en el caso de que la rotación sea de valor  $\alpha = \pi$ , que al ser  $\mathcal{R}$  simétrica, se obtendrán a partir de los elementos

diagonales que valen, respectivamente  $-1+2u_1^2$ ,  $-1+2u_2^2$  y  $-1+2u_3^2$  y las dos posibles soluciones para cada  $u_i$  deben ser compatibles con el resto de los elementos  $\mathcal{R}_{ij}$ .

$$1 + 2 \cos \alpha = \mathcal{R}_{ii}, \quad u_i = \frac{1}{2 \sin \alpha} \epsilon_{ijk} \mathcal{R}_{kj}, \quad \alpha \neq 0, \pi.$$

Si  $\alpha = 0$ , los  $\mathcal{R}_{kj}$ ,  $k \neq j$  son nulos y la anterior relación es indeterminada, como corresponde al eje de una rotación nula.

Si calculamos los valores propios de toda matriz ortogonal que representa una rotación, vemos que se reducen al valor real 1 con vectores propios en el subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$  de dimensión 1 en la dirección del eje de giro, y otros dos valores propios en general complejos conjugados, de la forma  $e^{i\alpha}$  y  $e^{-i\alpha}$ , sin vectores propios reales, que en el caso particular  $\alpha = \pi$  se reducen a  $-1$  que es doble y los correspondientes vectores propios constituyen el espacio vectorial bidimensional ortogonal al eje de giro.

**Ejercicio:** Las dos matrices siguientes representan sendas rotaciones. Determinarlas.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{10}}{5} & \frac{-\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{5} & \frac{1+2\sqrt{2}}{5} & \frac{\sqrt{2}-2}{5} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{\sqrt{2}-2}{5} & \frac{8+\sqrt{2}}{10} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{-4+\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}-1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}-4}{6} & \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}+1}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}+1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

**Solucion:**  $\alpha_A = \pi/4$ ,  $\mathbf{n}_A \sim (0, -1, 2)$ .  $\alpha_B = 2\pi/3$ ,  $\mathbf{n}_B \sim (-2, 2, 1)$ .

El tratamiento que hemos hecho de las rotaciones se denomina representación activa, en el sentido de que expresamos cómo cambian las coordenadas de un punto sometido a una rotación, respecto de unos ejes coordenados que permanecen fijos en el espacio. La interpretación pasiva consiste en representar las coordenadas de un mismo punto del espacio referido a dos sistemas de coordenadas, uno de los cuales ha sido girado respecto del otro. Pero al girar un sistema de coordenadas mediante  $\alpha$  las nuevas coordenadas del punto corresponde a una rotación activa en la que hubiéramos girado al punto con la rotación inversa  $-\alpha$ . De ahí que basta sustituir  $\alpha$  por  $-\alpha$  para obtener la expresión de un cambio de coordenadas cuando cambiamos de sistema de referencia. En este caso, las reglas de conmutación aparecen en la interpretación pasiva como:

$$[J_i, J_k] = -\epsilon_{ikl} J_l, \quad i, k, l = 1, 2, 3$$

### 2.8.2. Ley de composición de las rotaciones

Si cada rotación viene dada por un vector  $\alpha \in SO(3)$  entonces es posible obtener el vector resultante de la composición de dos rotaciones arbitrarias. Sea  $\mathcal{R}(\gamma) = \mathcal{R}(\alpha)\mathcal{R}(\beta)$ . Si los vectores  $\alpha = \alpha\mathbf{u}$ ,  $\beta = \beta\mathbf{v}$  y  $\gamma = \gamma\mathbf{w}$ , entonces haciendo el producto matricial e identificando término a término obtenemos:

$$\mathbf{w} \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{\mathbf{u} \tan \alpha/2 + \mathbf{v} \tan \beta/2 + \tan \alpha/2 \tan \beta/2 (\mathbf{u} \times \mathbf{v})}{1 - \tan \alpha/2 \tan \beta/2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})} \quad (2.216)$$

Si en vez de utilizar la parametrización normal definimos los vectores

$$\boldsymbol{\rho} = \tan \frac{\alpha}{2} \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\mu} = \tan \frac{\beta}{2} \mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\nu} = \tan \frac{\gamma}{2} \mathbf{w}$$

entonces  $\mathcal{R}(\nu) = \mathcal{R}(\rho)\mathcal{R}(\mu)$  resulta:

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\mu}}{1 - \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\mu}} \quad (2.217)$$



Podemos ver de la anterior relación, que si  $\alpha = \beta = \pi$ ,  $\tan(\alpha/2) = \tan(\beta/2) = \infty$  y por lo tanto en este límite:

$$\mathbf{w} \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}$$

con lo que la rotación resultante es alrededor de un eje ortogonal a los dos anteriores en el sentido del producto vectorial del segundo al primero, que si están separados un ángulo  $\phi$  se tiene que  $\tan(\gamma/2) = \sin \phi / \cos \phi = \tan \phi$ , y el valor del ángulo es  $\gamma = 2\phi$ , doble del que forman  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ . Recíprocamente, toda rotación puede por lo tanto escribirse como producto de dos rotaciones de valor  $\pi$ , alrededor de dos ejes ortogonales al primero y separados por un ángulo de valor mitad al de la rotación a efectuar.

Si tenemos una pequeña tapa cilíndrica boca abajo y la damos la vuelta, esto es la giramos  $\pi$  radianes alrededor de uno de sus diámetros quedando boca arriba, y a continuación la volvemos a girar otros  $\pi$  radianes alrededor de otro diámetro, vuelve a quedar boca abajo, y sus puntos han girado un ángulo doble del que forman estos dos ejes, y en el sentido en que se han tomado estos ejes.

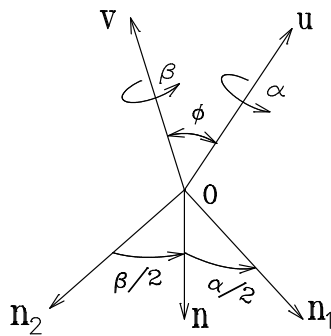


Figura 2.19: Composición de rotaciones mediante giros de valor  $\pi$

Esto nos da pie para representar geoméricamente la composición de dos rotaciones <sup>16</sup> a base de descomponer cada una de ellas en dos de valor  $\pi$ . Sean en la figura 2.19,  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  los dos vectores unitarios alrededor de los cuales vamos a girar sendos ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ . Si por  $O$  trazamos los planos perpendiculares a ambos vectores, éstos se cortan según la recta caracterizada por el vector unitario  $\mathbf{n}$ . En el plano perpendicular a  $\mathbf{u}$ , y en el sentido antihorario, colocamos el vector unitario  $\mathbf{n}_1$ , separado del  $\mathbf{n}$  un ángulo  $\alpha/2$ . Asimismo, en el plano perpendicular a  $\mathbf{v}$ , y en sentido contrario al anterior, definimos el vector unitario  $\mathbf{n}_2$  separado  $\beta/2$  del  $\mathbf{n}$ . Por lo tanto:

$$\mathcal{R}(\beta, \mathbf{v})\mathcal{R}(\alpha, \mathbf{u}) = \mathcal{R}(\pi, \mathbf{n}_2)\mathcal{R}(\pi, \mathbf{n})\mathcal{R}(\pi, \mathbf{n})\mathcal{R}(\pi, \mathbf{n}_1) = \mathcal{R}(\pi, \mathbf{n}_2)\mathcal{R}(\pi, \mathbf{n}_1), \quad (2.218)$$

por lo que la rotación compuesta lo es alrededor de un eje perpendicular a  $\mathbf{n}_1$  y  $\mathbf{n}_2$  en el sentido  $\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_1$  y de valor un ángulo igual al doble del que forman estos vectores.

El análisis anterior se presta a otra interpretación gráfica de la ley de composición de dos rotaciones. Supongamos que tenemos dada una esfera de radio unidad. Como una rotación viene

<sup>16</sup>J.M. Aguirregabiria, A. Hernández, M. Rivas, Composition law of the rotation group, *Eur. J. Phys.*, **13**, 139-141 (1992).

caracterizada por el ángulo  $\alpha$  y el vector unitario  $\mathbf{u}$  que define el eje de rotación, vamos a tratar de representar ambos elementos sobre esta esfera. El vector  $\mathbf{u}$  lo podemos definir por un punto sobre ella que representa a su extremo o bien mediante un plano, ortogonal a  $\mathbf{u}$  que pasando por el centro corta a la esfera según un círculo máximo. Adoptaremos este segundo punto de vista. En cuanto al ángulo  $\alpha$ , asociado a este eje, definiremos sobre el círculo máximo anterior un segmento orientado de longitud  $\alpha/2$ .

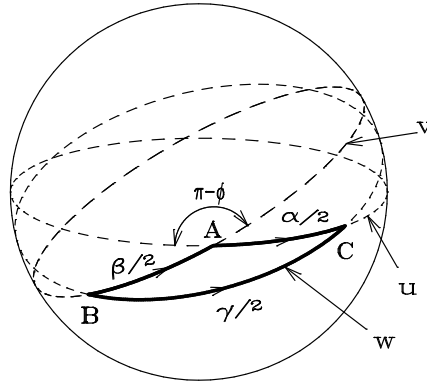


Figura 2.20: **Composición de rotaciones sobre la esfera unidad**

La ley de composición esquematizada en la figura anterior nos lleva en la figura 2.20, a definir dos círculos máximos asociados respectivamente a  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  que se cortan en el punto  $A$ , el cual representaría el extremo del vector unitario  $\mathbf{n}$ . Llevando sobre ellos en el sentido indicado sendos segmentos circulares de valores  $\alpha/2$  y  $\beta/2$  respectivamente se nos definen los puntos  $B$  y  $C$  que se corresponden con los extremos de los dos vectores unitarios  $\mathbf{n}_2$  y  $\mathbf{n}_1$ . Como la rotación resultante es ortogonal a éstos, entonces su eje queda definido por el círculo máximo que pasa por  $B$  y  $C$ . Como la rotación compuesta lo es de valor doble a la separación angular entre  $\mathbf{n}_1$  y  $\mathbf{n}_2$ , entonces el segmento circular  $BC$  resulta ser de valor  $\gamma/2$  y por lo tanto caracteriza a la rotación compuesta.

Como la separación angular entre ambos planos es  $\pi - \phi$ , siendo  $\phi$  el ángulo que forman  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , sabemos por trigonometría esférica que en el triángulo esférico  $ABC$  se cumple:

$$\begin{aligned} \cos \gamma/2 &= \cos \alpha/2 \cos \beta/2 + \sin \alpha/2 \sin \beta/2 \cos(\pi - \phi) = \\ &= \cos \alpha/2 \cos \beta/2 - \sin \alpha/2 \sin \beta/2 \cos \phi \end{aligned}$$

relación que podemos obtener directamente a partir de la composición de las dos matrices que representan dichas rotaciones.

### 2.8.3. Cinemática de la rotación

La descripción de un objeto con orientación, como por ejemplo un sólido rígido o una partícula elemental se va a hacer describiendo la evolución de los tres vectores unidad  $\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3$ , de los ejes ortogonales ligados al punto que evoluciona. En el caso del sólido rígido pueden ser las tres direcciones principales de inercia alrededor del centro de masa y en el caso de una partícula elemental el sistema cartesiano instantáneo ligado al centro de carga.

Si esos tres vectores los escribimos como vectores columna, uno a continuación del otro, formarán una matriz ortogonal de determinante unidad, esto es, una matriz de rotación, y por lo

tanto, solamente tres parámetros  $\alpha_i, i = 1, 2, 3$ , la caracterizarán, como variables esenciales para su descripción, que serán los tres grados de libertad asociados a la evolución de la orientación.

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha}) = ((\mathbf{e}_1), (\mathbf{e}_2), (\mathbf{e}_3))$$

Si inicialmente en  $t = 0$ , escogemos los ejes del laboratorio en coincidencia con los tres ejes del cuerpo, entonces en el instante  $t$ , la matriz  $\mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha}(t))$  representa la rotación activa que debo someter a los ejes del laboratorio para llevarlos a coincidencia con los ejes del cuerpo.

Si ahora consideramos otro observador inercial Galileano  $O'$  que está relacionado con  $O$  mediante una transformación Galileana, esto es que nuestras medidas de acontecimientos espacio temporales están relacionadas mediante

$$t' = t + b, \quad \mathbf{r}' = \mathcal{R}(\boldsymbol{\mu})\mathbf{r} + \mathbf{v}t + \mathbf{a},$$

significa que la información sobre cualquier otra magnitud de tipo vectorial la relacionamos con la matriz Jacobiana del cambio de coordenadas espaciales, esto es  $\mathcal{R}_{ij}(\boldsymbol{\mu})$ , siendo  $\boldsymbol{\mu}$  los tres parámetros que caracterizan a nuestra orientación relativa. En particular, los tres vectores unidad ligados al cuerpo transformarán con

$$\mathbf{e}'_i = \mathcal{R}(\boldsymbol{\mu})\mathbf{e}_i,$$

y si en ambos miembros los agrupamos formando la correspondiente matriz ortogonal, resulta para todo instante  $t$ :

$$((\mathbf{e}'_1), (\mathbf{e}'_2), (\mathbf{e}'_3)) \equiv \mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha}'(t')) = (\mathcal{R}(\boldsymbol{\mu})(\mathbf{e}_1), \mathcal{R}(\boldsymbol{\mu})(\mathbf{e}_2), \mathcal{R}(\boldsymbol{\mu})(\mathbf{e}_3)) = \mathcal{R}(\boldsymbol{\mu})\mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha}(t)) \quad (2.219)$$

Para el observador  $O$ ,  $\mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha}(t))$  es la orientación del cuerpo en el instante  $t$  y  $\mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha}(t + dt))$  su orientación en el instante  $t + dt$ . Ésta se podrá poner como la rotación  $\mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha}(t))$  seguida de una rotación infinitesimal  $\mathbb{I} + \Omega dt$ , esto es

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha}(t + dt)) = (\mathbb{I} + \Omega dt)\mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha}(t)) = \mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha}(t)) + \Omega\mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha}(t))dt = \mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha}(t)) + \dot{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\alpha}(t))dt,$$

por lo que la matriz  $\Omega$ , resulta ser

$$\Omega(t)\mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha}(t)) = \dot{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\alpha}(t)), \quad \rightarrow \quad \Omega(t) = \dot{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\alpha}(t))\mathcal{R}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}(t)) = \dot{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\alpha}(t))\mathcal{R}^T(\boldsymbol{\alpha}(t))$$

y  $\Omega$  es una matriz antisimétrica cuyas tres componentes esenciales definen el vector velocidad angular instantánea  $\boldsymbol{\omega}(t)$ ,  $\omega_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Omega_{jk}$ .

En efecto, para toda matriz de rotación  $\mathcal{R}\mathcal{R}^T = \mathbb{I}$ , para todo instante  $t$ ,  $\mathcal{R}(t)\mathcal{R}^T(t) = \mathbb{I}$ , luego derivando con respecto al tiempo

$$\dot{\mathcal{R}}\mathcal{R}^T + \mathcal{R}\dot{\mathcal{R}}^T = 0, \quad \Omega + \Omega^T = 0.$$

Además, la relación  $\dot{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\alpha}(t)) = \Omega(t)\mathcal{R}(\boldsymbol{\alpha}(t))$ , si lo analizamos por columnas equivale a

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \Omega\mathbf{e}_i \equiv \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i.$$

La cinemática se corresponde con una rotación instantánea alrededor de un eje en la dirección de  $\boldsymbol{\omega}$ .

Si expresamos las rotaciones en términos del vector  $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{u}$ , que representa el ángulo total girado por el sistema, entonces la velocidad angular se expresa:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{u} \frac{d\alpha}{dt} + \sin \alpha \frac{d\mathbf{u}}{dt} + (1 - \cos \alpha)\mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt}. \quad (2.220)$$

**Ejercicio.** Demostrar que si utilizamos como parametrización de la orientación el vector  $\boldsymbol{\rho} = \tan(\alpha/2)\mathbf{n}$ , siendo  $\mathbf{n}$  el vector unidad a lo largo del eje de giro y  $\alpha$  el ángulo girado resulta que

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{2}{1+\rho^2}(\dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\rho} \times \dot{\boldsymbol{\rho}}), \quad \mathbf{w} = R^T(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\omega} = \frac{2}{1+\rho^2}(\dot{\boldsymbol{\rho}} - \boldsymbol{\rho} \times \dot{\boldsymbol{\rho}}).$$

siendo  $\mathbf{w}$  el vector velocidad angular referido a los ejes del cuerpo.

Si en (2.219) derivamos ambos miembros con respecto a  $t'$ , sabiendo que  $\partial t/\partial t' = 1$ , resulta

$$\dot{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\alpha}'(t')) = \mathcal{R}(\boldsymbol{\mu})\dot{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\alpha}(t))$$

y tomando la traspuesta de (2.219)

$$\mathcal{R}^T(\boldsymbol{\alpha}'(t')) = \mathcal{R}^T(\boldsymbol{\alpha}(t))\mathcal{R}^T(\boldsymbol{\mu})$$

por lo que entre observadores las matrices  $\Omega$  transforman

$$\Omega'(t') = \dot{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\alpha}'(t'))\mathcal{R}^T(\boldsymbol{\alpha}'(t')) = \mathcal{R}(\boldsymbol{\mu})\dot{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\alpha}(t))\mathcal{R}^T(\boldsymbol{\alpha}(t))\mathcal{R}^T(\boldsymbol{\mu}) = \mathcal{R}(\boldsymbol{\mu})\Omega(t)\mathcal{R}^T(\boldsymbol{\mu})$$

que corresponde a la forma de transformar de un tensor con dos índices, y que para sus componentes esenciales se reduce a

$$\boldsymbol{\omega}'(t') = \mathcal{R}(\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\omega}(t).$$

De la expresión (2.214) obtenemos que en la representación de las rotaciones en términos del parámetro  $\boldsymbol{\rho}$ , los ejes ligados al cuerpo  $\mathbf{e}_k$  poseen por componentes

$$(\mathbf{e}_k)_i = \frac{1}{1+\rho^2}[(1-\rho^2)\delta_{ik} + 2\rho_i\rho_k + 2\varepsilon_{ijk}\rho_j]. \quad (2.221)$$

#### 2.8.4. Dinámica de la rotación

Si quiero hacer una descripción Lagrangiana de un cuerpo con orientación  $\boldsymbol{\alpha}$ , como el grupo de rotaciones no posee extensiones centrales, y las ecuaciones de la dinámica deben ser independientes de los observadores inerciales, es decir deben ser invariantes bajo los cambios de sistemas de referencia Galileanos, entonces la Lagrangiana debe ser una función invariante  $L(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}})$ , de las variables que utilizemos para describir su orientación  $\boldsymbol{\alpha}$  y de sus derivadas temporales  $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ , lo que nos lleva a que su expresión general es una función arbitraria de las componentes de la velocidad angular  $\omega_i$ ,  $L(\omega_i)$ . De esta forma, las ecuaciones de Euler-Lagrange que se deducen de ella son

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial \omega_j} \frac{\partial \omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \omega_j} \frac{\partial \omega_j}{\partial \dot{\alpha}_i} \right) = 0,$$

Si llamamos  $W_j = \partial L/\partial \omega_j$ , se propone al lector (es relativamente más sencillo en la parametrización  $\boldsymbol{\rho}$ ) que demuestre que las anteriores ecuaciones conducen a

$$\frac{d\mathbf{W}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{W}, \quad W_i = \frac{\partial L}{\partial \omega_i}.$$

Las componentes del momento angular con respecto a los ejes del cuerpo son constantes del movimiento. En efecto, llamemos  $T_i = \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_i$ . Su derivada temporal

$$\frac{dT_i}{dt} = \frac{d\mathbf{W}}{dt} \cdot \mathbf{e}_i + \mathbf{W} \cdot \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{W}) \cdot \mathbf{e}_i + \mathbf{W} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i) = 0.$$

En el caso de una partícula elemental, si fuese un sólido rígido y su espín es una constante del movimiento, entonces necesariamente  $\mathbf{W} \sim \boldsymbol{\omega}$  y la expresión de la Lagrangiana debe ser una función arbitraria de la  $\boldsymbol{\omega}^2$ . Un caso simple corresponde a

$$L = \frac{1}{2}I\boldsymbol{\omega}^2$$

que corresponde a un objeto con simetría de inercia esférica, es decir con los tres momentos principales de inercia iguales y cuyo momento angular  $\mathbf{S} = \mathbf{W} = I\boldsymbol{\omega}$ . Como observación, un objeto con los tres momentos principales de inercia iguales, no es necesariamente de forma esférica, como sucede, por ejemplo, con un cubo. En el caso de que los momentos principales fueran diferentes

$$L = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2),$$

las ecuaciones de Euler-Lagrange se escriben, con  $S_i = I_i\omega_i$ , (sin sumar sobre  $i$ )

$$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3, \quad I_2 \frac{d\omega_2}{dt} = (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1, \quad I_3 \frac{d\omega_3}{dt} = (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2.$$

La componente  $\omega_1$  será una constante del movimiento si  $I_3 = I_2$ , y el mismo tipo de criterio para las demás.

## 2.9. Apéndice: Grupo de Galileo $\mathcal{G}$

El grupo de Galileo es el grupo de transformaciones del espacio-tiempo caracterizadas por los diez parámetros  $g \equiv (b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha})$ . La acción de  $g$  sobre un punto del espacio-tiempo  $x \equiv (t, \mathbf{r})$  viene dada por  $x' = gx$ , y la vamos a considerar hecha de la siguiente forma:

$$x' = \exp(bH) \exp(\mathbf{a} \cdot \mathbf{P}) \exp(\mathbf{v} \cdot \mathbf{K}) \exp(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{J}) x$$

como la acción de una rotación, seguida de una transformación Galileana pura y finalmente una traslación espacial y temporal. De esta forma, todos los parámetros que definen cada subgrupo uniparamétrico son parámetros normales, y se puede utilizar la aplicación exponencial. Explícitamente,

$$t' = t + b, \quad (2.222)$$

$$\mathbf{r}' = R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{r} + \mathbf{v}t + \mathbf{a}, \quad (2.223)$$

y la ley de composición del grupo  $g'' = g'g$  es:

$$b'' = b' + b, \quad (2.224)$$

$$\mathbf{a}'' = R(\boldsymbol{\alpha}')\mathbf{a} + \mathbf{v}'b + \mathbf{a}', \quad (2.225)$$

$$\mathbf{v}'' = R(\boldsymbol{\alpha}')\mathbf{v} + \mathbf{v}', \quad (2.226)$$

$$R(\boldsymbol{\alpha}'') = R(\boldsymbol{\alpha}')R(\boldsymbol{\alpha}). \quad (2.227)$$

Para las rotaciones vamos a usar dos parametrizaciones diferentes. Una es la normal o canónica en términos del vector  $\boldsymbol{\alpha} = \alpha \mathbf{n}$ , donde  $\mathbf{n}$  es un vector unidad a lo largo del eje de rotación, y el ángulo girado  $\alpha \in [0, \pi]$  en radianes, se interpreta como positivo si tiene la orientación de las agujas de un reloj, cuando miramos en la dirección que marca el vector  $\mathbf{n}$ . Otra parametrización, que tiene ventajas algebraicas, es expresar cada rotación por el vector  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{n} \tan(\alpha/2)$ , con  $\alpha$  y  $\mathbf{n}$  como en el caso anterior.

La matriz de rotación  $R(\boldsymbol{\alpha}) = \exp(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{J})$  se expresa en términos de los parámetros normales  $\alpha_i$  y de la representación matricial de los generadores  $J_i$ , que aparecen como

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y satisfacen las reglas de conmutación  $[J_i, J_k] = \epsilon_{ikl} J_l$ , de tal manera que si definimos el vector  $\boldsymbol{\alpha} = \alpha \mathbf{n}$ , se puede poner, en la representación activa,

$$R(\boldsymbol{\alpha})_{ij} = \delta_{ij} \cos \alpha + n_i n_j (1 - \cos \alpha) - \epsilon_{ijk} n_k \sin \alpha, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (2.228)$$

En la parametrización  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{n} \tan(\alpha/2)$ , la matriz de rotación es

$$R(\boldsymbol{\mu})_{ij} = \frac{1}{1 + \mu^2} \left( (1 - \mu^2) \delta_{ij} + 2\mu_i \mu_j - 2\epsilon_{ijk} \mu_k \right), \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (2.229)$$

En esta parametrización es especialmente sencilla la ley de composición de rotaciones, y la rotación compuesta  $R(\boldsymbol{\mu}'') = R(\boldsymbol{\mu}')R(\boldsymbol{\mu})$  es equivalente a

$$\boldsymbol{\mu}'' = \frac{\boldsymbol{\mu}' + \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}' \times \boldsymbol{\mu}}{1 - \boldsymbol{\mu}' \cdot \boldsymbol{\mu}}. \quad (\text{activa}) \quad (2.230)$$

Esto se puede ver de forma sencilla usando el homomorfismo entre el grupo de rotaciones y el grupo unitario  $SU(2)$ . Los generadores matriciales de  $SU(2)$  son  $\mathbf{J} = -i\boldsymbol{\sigma}/2$  en términos de las

matrices de Pauli  $\boldsymbol{\sigma}$ , y en la representación activa verifican las mismas reglas de conmutación  $[J_i, J_k] = \epsilon_{ikl} J_l$ . En la parametrización normal una matriz de  $SU(2)$ , se puede poner en la forma  $\exp(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{J}) = \exp(-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}/2)$ ,

$$R(\boldsymbol{\alpha}) = \cos(\alpha/2)\mathbb{I} - i(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \sin(\alpha/2).$$

Si definimos  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{n} \tan(\alpha/2)$ , en esta parametrización la matriz anterior queda

$$R(\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{\sqrt{1 + \boldsymbol{\mu}^2}} (\mathbb{I} - i\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad (2.231)$$

donde  $\mathbb{I}$  es la matriz unidad  $2 \times 2$ , y a partir de esta representación, multiplicando matrices, podemos encontrar la ley de composición (2.230)<sup>17</sup>.

Si la rotación es de valor  $\pi$ , entonces las ecuaciones (2.228) o (2.229) conducen a

$$R(\mathbf{n}, \pi)_{ij} = -\delta_{ij} + 2n_i n_j.$$

Si las dos rotaciones  $R(\boldsymbol{\mu})$  y  $R(\boldsymbol{\mu}')$  que aparecen en (2.230) fueran de valor  $\pi$ , aunque  $\tan(\pi/2) = \infty$ , esta expresión no es singular sino que posee como límite:

$$\mathbf{n}'' \tan(\alpha''/2) = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{n}'}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'}$$

El valor absoluto de esta relación implica que  $\tan(\alpha''/2) = \tan \theta$ , es decir,  $\alpha'' = 2\theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo entre los dos vectores unidad  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{n}'$ . Obtenemos el resultado conocido de que cualquier rotación de valor  $\alpha$  alrededor de un eje caracterizado por el vector unidad  $\mathbf{n}$  puede obtenerse por la composición de dos rotaciones de valor  $\pi$  alrededor de dos ejes perpendiculares a  $\mathbf{n}$  y separados por un ángulo  $\alpha/2$ .

Como toda transformación Galileana la vamos a considerar un cambio de sistema de referencia, es necesario que para las rotaciones utilicemos la representación pasiva, tanto para la modificación de las variables  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{u}$  como de las variables de orientación  $\boldsymbol{\rho}$ . La diferencia entre la representación activa y la pasiva corresponde a un simple cambio de signo en el parámetro, o bien cambiar los generadores por sus opuestos. De esta forma, las reglas de conmutación de los generadores son las opuestas y la ley de composición de las rotaciones en la representación pasiva queda:

$$\boldsymbol{\mu}'' = \frac{\boldsymbol{\mu}' + \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}' \times \boldsymbol{\mu}}{1 - \boldsymbol{\mu}' \cdot \boldsymbol{\mu}}. \quad (\text{pasiva}) \quad (2.232)$$

Vamos a usar como notación para las variables de orientación las primeras letras griegas,  $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \dots$  cuando utilicemos la parametrización normal, mientras que en la parametrización  $\tan(\alpha/2)$  usaremos letras griegas intermedias  $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\rho}, \dots$ . En esta notación, las ecuaciones de transformación (2.224-2.227) deben ser reemplazadas por

$$b'' = b' + b, \quad (2.233)$$

$$\mathbf{a}'' = R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{a} + \mathbf{v}'b + \mathbf{a}', \quad (2.234)$$

$$\mathbf{v}'' = R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{v} + \mathbf{v}', \quad (2.235)$$

$$\boldsymbol{\mu}'' = \frac{\boldsymbol{\mu}' + \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}' \times \boldsymbol{\mu}}{1 - \boldsymbol{\mu}' \cdot \boldsymbol{\mu}}. \quad (2.236)$$

El elemento neutro del grupo de Galileo es el  $(0, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$  y el inverso de todo elemento es

$$(b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha})^{-1} = (-b, -R(-\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{a} - b\mathbf{v}), -R(-\boldsymbol{\alpha})\mathbf{v}, -\boldsymbol{\alpha}).$$

<sup>17</sup> D. Hestenes, *Space-time algebra*, Gordon and Breach, NY (1966).

Los generadores del grupo en la realización (2.222, 2.223) son los operadores diferenciales

$$H = \partial/\partial t, \quad P_i = \partial/\partial r_i, \quad K_i = t\partial/\partial r_i, \quad J_k = \epsilon_{kli}r_l\partial/\partial r_i \quad (2.237)$$

y las reglas de conmutación del álgebra de Lie del grupo de Galileo en la representación pasiva son

$$[\mathbf{J}, \mathbf{J}] = -\mathbf{J}, \quad [\mathbf{J}, \mathbf{P}] = -\mathbf{P}, \quad [\mathbf{J}, \mathbf{K}] = -\mathbf{K}, \quad [\mathbf{J}, H] = 0, \quad (2.238)$$

$$[H, \mathbf{P}] = 0, \quad [H, \mathbf{K}] = \mathbf{P}, \quad [\mathbf{P}, \mathbf{P}] = 0, \quad [\mathbf{K}, \mathbf{K}] = 0, \quad [\mathbf{K}, \mathbf{P}] = 0. \quad (2.239)$$

Salvo que se indique de forma expresa, vamos a utilizar en estas notas, una notación abreviada para los conmutadores de los diferentes operadores, considerados como escalares y trivectores, que los representaremos en caracteres en negrita:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{C}, \quad \implies \quad [A_i, B_j] = \epsilon_{ijk}C_k,$$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = C, \quad \implies \quad [A_i, B_j] = \delta_{ij}C,$$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{C}, \quad \implies \quad [A_i, B] = C_i,$$

$$[\mathbf{B}, \mathbf{A}] = \mathbf{C}, \quad \implies \quad [B, A_i] = C_i,$$

donde  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$  es la delta de Kronecker y  $\epsilon_{ijk}$  es el tensor completamente antisimétrico, de tal forma que los índices latinos casen a ambos lados de los conmutadores.

La acción del grupo (2.222)-(2.223) representa la relación que existe entre las medidas de las coordenadas  $(t, \mathbf{r})$  de un cierto acontecimiento espacio-temporal medido por un observador inercial  $O$  y las correspondientes coordenadas  $(t', \mathbf{r}')$  del mismo acontecimiento medidas por otro observador inercial  $O'$ . Los diez parámetros del grupo tienen el siguiente significado: Si consideramos el acontecimiento de coordenadas  $(0, \mathbf{0})$  medidas por  $O$ , por ejemplo la emisión de un haz de fotones desde su origen cuando su reloj marca  $t = 0$ , para  $O'$  valen  $(b, \mathbf{a})$ , donde  $b$  es el parámetro que representa la traslación temporal y  $\mathbf{a}$  la traslación espacial. El parámetro  $\mathbf{v}$ , con dimensiones de velocidad, representa la velocidad del origen del sistema cartesiano de  $O$  medido por  $O'$ , y finalmente los parámetros  $\boldsymbol{\alpha}$ , o  $R(\boldsymbol{\alpha})$ , representan la orientación del sistema cartesiano de  $O$  medido por  $O'$ . Los diez parámetros  $(b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha})$  representan la descripción del sistema cartesiano de  $O$ , medido por  $O'$ .

El grupo de Galileo posee exponentes no triviales dados por <sup>18</sup>

$$\xi(g, g') = m \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 b' + \mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{a}' \right). \quad (2.240)$$

Están caracterizados por el parámetro no nulo  $m$ .

La extensión central del grupo de Galileo <sup>19</sup> es un grupo de 11 parámetros con un generador adicional  $I$  que conmuta con todos los otros diez

$$[I, H] = [I, \mathbf{P}] = [I, \mathbf{K}] = [I, \mathbf{J}] = 0, \quad (2.241)$$

y el resto de las reglas de conmutación son las mismas del propio grupo de Galileo (2.238, 2.239), salvo la última que queda

$$[K_i, P_j] = -m\delta_{ij}I, \quad \text{o} \quad [\mathbf{K}, \mathbf{P}] = -mI, \quad (2.242)$$

habiendo usado nuestra notación abreviada, y en términos del parámetro no nulo  $m$ . Si definimos los siguientes operadores, funciones polinómicas de los generadores del álgebra de Lie,

$$\mathbf{W} = I\mathbf{J} - \frac{1}{m}\mathbf{K} \times \mathbf{P}, \quad U = IH - \frac{1}{2m}\mathbf{P}^2, \quad (2.243)$$

<sup>18</sup> V. Bargmann, On unitary ray representations of continuous groups, *Ann. Math.* **5**, 1 (1954).

<sup>19</sup> J.M. Levy-Leblond, *Galilei Group and Galilean Invariance*, in E.M. Loeb, *Group Theory and its applications*, Acad. Press, NY (1971), vol. 2, p. 221.



vemos que  $U$  conmuta con todos los generadores del grupo de Galileo extendido, y el  $\mathbf{W}$  satisface las reglas de conmutación:

$$[\mathbf{W}, \mathbf{W}] = -I\mathbf{W}, \quad [\mathbf{J}, \mathbf{W}] = -\mathbf{W}, \quad [\mathbf{W}, \mathbf{P}] = [\mathbf{W}, \mathbf{K}] = [\mathbf{W}, H] = 0.$$

De esta forma,  $\mathbf{W}^2$  también conmuta con todos los generadores. Resulta que el grupo de Galileo extendido posee tres operadores de Casimir funcionalmente independientes. En aquellas representaciones en las que el operador  $I$  resulte ser un múltiplo del operador unidad, por ejemplo en las representaciones irreducibles, esos tres invariantes se interpretan como la masa,  $M = mI$ , la energía interna  $H_0 = H - P^2/2m$ , y el valor absoluto del espín.

$$S^2 = \left( \mathbf{J} - \frac{1}{m} \mathbf{K} \times \mathbf{P} \right)^2. \quad (2.244)$$

El operador espín  $\mathbf{S}$  en aquellas representaciones en las que  $I = \mathbb{I}$ , satisface las reglas de conmutación:

$$[\mathbf{S}, \mathbf{S}] = -\mathbf{S}, \quad [\mathbf{J}, \mathbf{S}] = -\mathbf{S}, \quad [\mathbf{S}, \mathbf{P}] = [\mathbf{S}, H] = [\mathbf{S}, \mathbf{K}] = 0,$$

es decir, es un operador momento angular, transforma como un vector bajo rotaciones y es invariante bajo traslaciones y transformaciones de Galileo puras, respectivamente. Queda reducido al operador momento angular total  $\mathbf{J}$  en aquellos sistemas de referencia en los que  $\mathbf{P} = \mathbf{K} = 0$ , es decir, para los observadores del centro de masa.

## 2.10. Apéndice: Grupo de Poincaré $\mathcal{P}$

El grupo de Poincaré es el grupo de transformaciones del espacio-tiempo de Minkowski, que dejan invariante a la separación espacio-temporal entre dos acontecimientos próximos  $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2$ . Consideremos un punto del espacio tiempo de componentes contravariantes  $x^\mu \equiv (ct, \mathbf{r})$ , y  $x' = gx$  se expresa como  $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$ , en términos de una matriz constante  $4 \times 4$ ,  $\Lambda$  y de un tetravector constante de traslación  $a^\mu \equiv (cb, \mathbf{a})$ . Las componentes covariantes del tensor métrico del espacio de Minkowski son  $\eta_{\mu\nu} \equiv \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Entonces  $dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu$  y  $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\sigma\rho} dx^\sigma dx^\rho$  implica que la matriz constante  $\Lambda$ , debe satisfacer

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\rho = \eta_{\sigma\rho}. \quad (2.245)$$

Las relaciones (2.245) representan diez condiciones entre las 16 componentes de la matriz  $\Lambda$ , de tal manera que de las 16 componentes solamente seis son parámetros esenciales. En estas notas, tres de esos parámetros representan la velocidad relativa  $\mathbf{v}$  entre observadores inerciales y las otras tres la orientación relativa  $\boldsymbol{\alpha}$  de sus ejes espaciales cartesianos, que lo expresaremos en cualquiera de las parametrizaciones del grupo de rotaciones, como en el caso Galileano.

Entonces, todo elemento del grupo de Poincaré  $\mathcal{P}$ , se representará, como en el caso Galileano, por los diez parámetros  $g \equiv (b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha})$  y la acción del grupo sobre un punto del espacio-tiempo  $x \equiv (t, \mathbf{r})$  se va a interpretar de la misma manera, es decir,  $x' = gx$ :

$$x' = \exp(bH) \exp(\mathbf{a} \cdot \mathbf{P}) \exp(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{K}) \exp(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{J})x, \quad (2.246)$$

como la acción de una rotación  $\exp(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{J})$ , seguida de un boost Lorentziano  $\exp(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{K})$ , o transformación de Lorentz pura, y finalmente una traslación espacial  $\exp(\mathbf{a} \cdot \mathbf{P})$  y temporal  $\exp(bH)$ . Viene explícitamente dado por:

$$t' = \gamma t + \gamma(\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{r})/c^2 + b, \quad (2.247)$$

$$\mathbf{r}' = R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{r} + \gamma\mathbf{v}t + \gamma^2(\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{r})\mathbf{v}/(1 + \gamma)c^2 + \mathbf{a}. \quad (2.248)$$

El parámetro  $\boldsymbol{\beta}$  en (2.246) es el parámetro normal de las transformaciones de Lorentz puras (boosts), el cual se expresa en términos de la velocidad relativa entre observadores  $\mathbf{v}$  como  $\boldsymbol{\beta}/\beta \tanh \beta = \mathbf{v}/c$ , como veremos. Las dimensiones y dominios de los parámetros  $b$ ,  $\mathbf{a}$  y  $\boldsymbol{\alpha}$  son las mismas que en el caso del grupo de Galileo, y para las rotaciones utilizaremos también el parámetro  $\boldsymbol{\mu}$ . El parámetro  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ , posee por límite superior  $v < c$ , tiene también dimensiones de velocidad. El significado físico de estos diez parámetros, es exactamente el mismo que en el caso Galileano. El parámetro  $\mathbf{v}$  es la velocidad del observador  $O$ , medida por  $O'$ , y  $R(\boldsymbol{\alpha})$  o bien  $R(\boldsymbol{\mu})$  representa la orientación del sistema cartesiano de  $O$  relativa a  $O'$ , una vez que  $O'$  ha sido lanzado con velocidad  $\mathbf{v}$ . El factor  $\gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ .

La ley de composición del grupo de Poincaré se obtiene a partir de la composición  $x'' = \Lambda'x' + a' = \Lambda'(\Lambda x + a) + a'$  que identificando con  $x'' = \Lambda''x + a''$  se reduce a  $\Lambda'' = \Lambda'\Lambda$  y  $a'' = \Lambda'a + a'$ , es decir, la ley de composición de las transformaciones de Lorentz, que la veremos en la sección siguiente, 2.10.1, y una transformación Poincaré  $(\Lambda', a')$  del tetravector  $a^\mu$ . En esta parametrización  $g'' = g'g$ , resulta ser: <sup>20</sup>

$$b'' = \gamma'b + \gamma'(\mathbf{v}' \cdot R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{a})/c^2 + b', \quad (2.249)$$

$$\mathbf{a}'' = R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{a} + \gamma'\mathbf{v}'b + \frac{\gamma'^2}{(1 + \gamma')c^2}(\mathbf{v}' \cdot R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{a})\mathbf{v}' + \mathbf{a}', \quad (2.250)$$

$$\mathbf{v}'' = \frac{R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{v} + \gamma'\mathbf{v}' + \frac{\gamma'^2}{(1 + \gamma')c^2}(\mathbf{v}' \cdot R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{v})\mathbf{v}'}{\gamma'(1 + \mathbf{v}' \cdot R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{v}/c^2)}, \quad (2.251)$$

<sup>20</sup> M.Rivas, M.Valle and J.M.Aguirregabiria, Composition law and contractions of the Poincaré group, *Eur. J. Phys.* **6**, 128 (1986).

$$\boldsymbol{\mu}'' = \frac{\boldsymbol{\mu}' + \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}' \times \boldsymbol{\mu} + \mathbf{F}(\mathbf{v}', \boldsymbol{\mu}', \mathbf{v}, \boldsymbol{\mu})}{1 - \boldsymbol{\mu}' \cdot \boldsymbol{\mu} + G(\mathbf{v}', \boldsymbol{\mu}', \mathbf{v}, \boldsymbol{\mu})}, \quad (2.252)$$

donde  $\mathbf{F}(\mathbf{v}', \boldsymbol{\mu}', \mathbf{v}, \boldsymbol{\mu})$  y  $G(\mathbf{v}', \boldsymbol{\mu}', \mathbf{v}, \boldsymbol{\mu})$  son las funciones reales:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{v}', \boldsymbol{\mu}', \mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) &= \frac{\gamma\gamma'}{(1+\gamma)(1+\gamma')c^2} [\mathbf{v} \times \mathbf{v}' + \mathbf{v}(\mathbf{v}' \cdot \boldsymbol{\mu}') + \mathbf{v}'(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\mu}) \\ &+ \mathbf{v} \times (\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\mu}') + (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu}) \times \mathbf{v}' + (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\mu})(\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\mu}') \\ &+ (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu})(\mathbf{v}' \cdot \boldsymbol{\mu}') + (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu}) \times (\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\mu}')], \end{aligned} \quad (2.253)$$

$$\begin{aligned} G(\mathbf{v}', \boldsymbol{\mu}', \mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) &= \frac{\gamma\gamma'}{(1+\gamma)(1+\gamma')c^2} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\mu}') + \mathbf{v}' \cdot (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu}) \\ &- (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\mu})(\mathbf{v}' \cdot \boldsymbol{\mu}') + (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu}) \cdot (\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\mu}')]. \end{aligned} \quad (2.254)$$

El elemento unidad del grupo es  $(0, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$  y el inverso de cualquier elemento  $(b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\mu})$  es

$$(-\gamma b + \gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}/c^2, -R(-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{a} - \gamma \mathbf{v} b + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)c^2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})\mathbf{v}), -R(-\boldsymbol{\mu})\mathbf{v}, -\boldsymbol{\mu}).$$

Los generadores del grupo en la realización (2.247, 2.248), y en términos de los parámetros normales  $(b, \mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$ , son

$$H = \partial/\partial t, \quad P_i = \partial/\partial r_i, \quad K_i = ct\partial/\partial r_i + (r_i/c)\partial/\partial t, \quad J_k = \varepsilon_{kli}r_l\partial/\partial r_i.$$

Por lo tanto,  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{J}$  son adimensionales y las reglas de conmutación resultan

$$[\mathbf{J}, \mathbf{J}] = -\mathbf{J}, \quad [\mathbf{J}, \mathbf{P}] = -\mathbf{P}, \quad [\mathbf{J}, \mathbf{K}] = -\mathbf{K}, \quad [\mathbf{J}, H] = 0, \quad [H, \mathbf{P}] = 0, \quad (2.255)$$

$$[H, \mathbf{K}] = c\mathbf{P}, \quad [\mathbf{P}, \mathbf{P}] = 0, \quad [\mathbf{K}, \mathbf{K}] = \mathbf{J}, \quad [\mathbf{K}, \mathbf{P}] = -H/c. \quad (2.256)$$

Si, como es habitual, llamamos  $x^0 = ct$ ,  $p^0 = H/c$ ,  $p^i = P_i$ ,  $K_i = J_{0i} = -J_{i0}$  y  $J_k = -\frac{1}{2}\varepsilon_{klr}J_{lr}$ ,  $x_\mu = \eta_{\mu\nu}x^\nu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$  y  $\partial_\nu \equiv \partial/\partial x^\nu$ ,  $\partial_\sigma x_\nu = \eta_{\nu\sigma}$ , entonces,

$$p_\mu = \partial_\mu, \quad J_{\mu\nu} = -J_{\nu\mu} = x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu.$$

En notación covariante las reglas de conmutación aparecen como:

$$\begin{aligned} [p_\mu, p_\nu] &= 0, \\ [J_{\mu\nu}, p_\sigma] &= -\eta_{\mu\sigma}p_\nu + \eta_{\nu\sigma}p_\mu, \\ [J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] &= -\eta_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}J_{\mu\rho} + \eta_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}J_{\nu\rho}. \end{aligned}$$

El grupo de Poincaré tiene dos operadores de Casimir funcionalmente independientes. Uno se interpreta como el cuadrado de la masa del sistema,

$$p^\mu p_\mu = (H/c)^2 - \mathbf{P}^2 = m^2 c^2, \quad (2.257)$$

y el otro es el cuadrado del tetravector de Pauli-Lubanski,  $w^\mu$ , definido mediante

$$w^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} p_\nu J_{\sigma\lambda} \equiv (\mathbf{P} \cdot \mathbf{J}, H\mathbf{J}/c - \mathbf{K} \times \mathbf{P}) \equiv (\mathbf{P} \cdot \mathbf{S}_{CM}, H\mathbf{S}_{CM}/c), \quad (2.258)$$

en términos de generadores que para la partícula libre serán constantes del movimiento, y el cual es por construcción ortogonal a  $p_\mu$ , es decir,  $w^\mu p_\mu = 0$ .

Se relaciona con el espín con respecto al centro de masa  $\mathbf{S}_{CM}$ , a través de la relación:

$$\mathbf{S}_{CM} = \mathbf{J} - \mathbf{q} \times \mathbf{P}, \quad H\mathbf{S}_{CM}/c = H\mathbf{J}/c - \mathbf{K} \times \mathbf{P}, \quad (2.259)$$

habiendo reescrito  $\mathbf{K} = H\mathbf{q}/c - \mathbf{P}t$ , de manera que su componente temporal  $w^0 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S}_{CM}$ , representará la helicidad de la partícula, y la parte espacial es el vector (6.44). De esta forma, el otro operador de Casimir es

$$w^\mu w_\mu = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{J})^2 - (H\mathbf{J}/c - \mathbf{K} \times \mathbf{P})^2 = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{S}_{CM})^2 - H^2 \mathbf{S}_{CM}^2 / c^2 = -m^2 c^2 S_{CM}^2, \quad (2.260)$$

el cual depende del valor  $S_{CM}^2$ , el valor absoluto al cuadrado del espín con respecto al centro de masa, y de la masa de la partícula. Vemos que en el caso relativista, los dos parámetros  $m$  y  $S_{CM}$  son las propiedades intrínsecas de toda partícula elemental. En el caso cuántico, las representaciones deben ser irreducibles, y  $S_{CM}^2 = s(s+1)\hbar^2$ , para todo  $s = 0, 1/2, 1, \dots$ , dependiendo del valor cuántico del espín de la partícula, pero en el caso clásico, el valor  $S_{CM}^2$  puede tomar cualquier valor.

Los operadores  $w^\mu$  satisfacen las reglas de conmutación:

$$[w^\mu, w^\nu] = \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} w_\sigma p_\rho, \quad (2.261)$$

habiendo tomado el tensor  $\epsilon^{0123} = +1$ , y

$$[p^\mu, w^\nu] = 0, \quad [J_{\mu\nu}, w_\sigma] = -\eta_{\mu\sigma} w_\nu + \eta_{\nu\sigma} w_\mu. \quad (2.262)$$

El grupo de Poincaré no posee exponentes, de tal manera que las funciones gauge sobre sus espacios homogéneos son nulas. Las Lagrangianas de los sistemas mecánicos cuyos espacios cinemáticos sean espacios homogéneos de  $\mathcal{P}$ , pueden tomarse estrictamente invariantes.

### 2.10.1. Grupo de Lorentz $\mathcal{L}$

El grupo de Lorentz  $\mathcal{L}$  es el subgrupo de  $\mathcal{P}$  de transformaciones de la forma:  $(0, \mathbf{0}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\mu})$ , y toda transformación de Lorentz  $\Lambda(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu})$  se va a interpretar siempre en la forma  $\Lambda(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) = L(\mathbf{v})R(\boldsymbol{\mu})$ , como se ha mencionado anteriormente, donde  $L(\mathbf{v})$  es un boost o transformación de Lorentz pura y  $R(\boldsymbol{\mu})$  una rotación espacial. Las expresiones (2.251, 2.252) vienen de  $\Lambda(\mathbf{v}'', \boldsymbol{\mu}'') = \Lambda(\mathbf{v}', \boldsymbol{\mu}')\Lambda(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu})$ . La expresión (2.251) es la composición relativista de velocidades, ya que

$$\begin{aligned} L(\mathbf{v}'')R(\boldsymbol{\mu}'') &= L(\mathbf{v}')R(\boldsymbol{\mu}')L(\mathbf{v})R(\boldsymbol{\mu}) \\ &= L(\mathbf{v}') \{ R(\boldsymbol{\mu}')L(\mathbf{v})R(-\boldsymbol{\mu}') \} R(\boldsymbol{\mu}')R(\boldsymbol{\mu}), \end{aligned}$$

pero el conjugado de un boost de velocidad  $\mathbf{v}$  mediante una rotación  $R(\boldsymbol{\mu}')L(\mathbf{v})R(-\boldsymbol{\mu}') = L(R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{v})$  es otro boost de velocidad rotada  $R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{v}$

$$L(\mathbf{v}'')R(\boldsymbol{\mu}'') = L(\mathbf{v}')L(R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{v})R(\boldsymbol{\mu}')R(\boldsymbol{\mu}).$$

El producto  $L(\mathbf{v}')L(R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{v}) = L(\mathbf{v}'')R(\boldsymbol{\mu}'')$  donde  $\mathbf{v}''$  es la composición relativista de las velocidades  $\mathbf{v}'$  y  $R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{v}$ , y  $R(\boldsymbol{\mu}'')$  es la rotación de Thomas-Wigner asociada a los boosts  $L(\mathbf{v}')$  y  $L(R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{v})$ .

Por lo tanto, la expresión (2.251) es equivalente a

$$L(\mathbf{v}'') = L(\mathbf{v}')L(R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{v})R(-\boldsymbol{\mu}''), \quad (2.263)$$

y (2.252) es

$$R(\boldsymbol{\mu}'') = R(\boldsymbol{\mu}'')R(\boldsymbol{\mu}')R(\boldsymbol{\mu}) \equiv R(\boldsymbol{\phi})R(\boldsymbol{\mu}). \quad (2.264)$$

La matriz de rotación de Thomas-Wigner,  $R(\boldsymbol{\mu}'')$  es:

$$\begin{aligned} R(\boldsymbol{\mu}'')_{ij} &= \delta_{ij} + \frac{1}{1 + \gamma''} \left( \frac{\gamma'^2}{c^2} \left( \frac{1 - \gamma'}{1 + \gamma'} \right) v'_i v'_j + \frac{\gamma^2}{c^2} \left( \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \right) R'_{ik} v_k R'_{jl} v_l \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma' \gamma}{c^2} (v'_i R'_{jk} v_k - v'_j R'_{ik} v_k) + \frac{2\gamma'^2 \gamma^2 (v'_k R'_{kl} v_l)}{(1 + \gamma')(1 + \gamma)c^2} v'_i R'_{jk} v_k \right), \end{aligned}$$

y el factor

$$\gamma'' = \gamma' \gamma \left( 1 + \frac{\mathbf{v}' \cdot R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{v}}{c^2} \right).$$

La matriz  $R(\boldsymbol{\mu}'')$  se escribe en términos del parámetro vectorial  $\boldsymbol{\mu}''$ , el cual es función de  $\mathbf{v}'$ ,  $\boldsymbol{\mu}'$  y  $\mathbf{v}$ , dada por

$$\boldsymbol{\mu}'' = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{v}', \mathbf{0}, R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{v}, \mathbf{0})}{1 + G(\mathbf{v}', \mathbf{0}, R(\boldsymbol{\mu}')\mathbf{v}, \mathbf{0})}, \quad (2.265)$$

y el parámetro  $\boldsymbol{\phi}$ , tal que  $R(\boldsymbol{\phi}) = R(\boldsymbol{\mu}'')R(\boldsymbol{\mu}')$  es

$$\boldsymbol{\phi} = \frac{\boldsymbol{\mu}'' + \mathbf{F}(\mathbf{v}', \boldsymbol{\mu}', \mathbf{v}, \mathbf{0})}{1 + G(\mathbf{v}', \boldsymbol{\mu}', \mathbf{v}, \mathbf{0})}. \quad (2.266)$$

Si cualquiera de las dos velocidades  $\mathbf{v}$  o  $\mathbf{v}'$  se anulara,  $R(\boldsymbol{\mu}'')_{ij} = \delta_{ij}$ .

La ley de composición del grupo de Lorentz se obtiene del homomorfismo entre el grupo de Lorentz  $\mathcal{L}$  y el grupo  $SL(2, \mathbb{C})$  de matrices  $2 \times 2$  complejas, de determinante +1. El álgebra de Lie del grupo, posee por generadores  $\mathbf{J} = -i\boldsymbol{\sigma}/2$  and  $\mathbf{K} = \boldsymbol{\sigma}/2$ , donde  $\sigma_i$  son las matrices de Pauli, que satisfacen:

$$[\mathbf{J}, \mathbf{J}] = -\mathbf{J}, \quad [\mathbf{J}, \mathbf{K}] = -\mathbf{K}, \quad [\mathbf{K}, \mathbf{K}] = \mathbf{J}.$$

Una rotación de ángulo  $\alpha$  alrededor de un eje caracterizado por el vector unidad  $\mathbf{n}$  está dada por la matriz unitaria  $2 \times 2$ ,  $\exp(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{J})$ ,

$$R(\boldsymbol{\alpha}) = \cos(\alpha/2)\sigma_0 - i\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin(\alpha/2). \quad (2.267)$$

En términos del vector  $\boldsymbol{\mu} = \tan(\alpha/2)\mathbf{n}$ ,

$$R(\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{\sqrt{1 + \boldsymbol{\mu}^2}}(\sigma_0 - i\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad (2.268)$$

donde  $\sigma_0$  es la matriz unidad  $2 \times 2$ .

Una transformación de Lorentz pura de parámetros normales  $\beta_i$ , se representa por la matriz hermitica  $\exp(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{K})$ . Esta matriz es:

$$L(\boldsymbol{\beta}) = \cosh(\beta/2)\sigma_0 + \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\beta}}{\beta} \sinh(\beta/2). \quad (2.269)$$

En términos del parámetro velocidad, teniendo en cuenta las relaciones entre ambos  $\cosh \beta = \gamma(v)$ ,  $\sinh \beta = \gamma v/c$  y las relaciones trigonométricas  $\cosh(\beta/2) = \sqrt{(\cosh \beta + 1)/2}$  y  $\tanh(\beta/2) = \sinh \beta / (1 + \cosh \beta)$ , la matriz se puede reescribir como

$$L(\mathbf{v}) = \sqrt{\frac{1 + \gamma}{2}} \left( \sigma_0 + \frac{\gamma}{1 + \gamma} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}}{c} \right). \quad (2.270)$$

Así, todo elemento de  $SL(2, \mathbb{C})$  queda parametrizado por seis números reales  $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu})$ , y lo interpretamos en la forma

$$A(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) = L(\mathbf{v})R(\boldsymbol{\mu}). \quad (2.271)$$

Toda matriz compleja  $2 \times 2$  de determinante unidad,  $A \in SL(2, \mathbb{C})$  puede ser escrita en términos de un tetravector complejo  $a^\mu$  y de las cuatro matrices de Pauli  $\sigma_\mu$ . Si ponemos  $A = a^\mu \sigma_\mu$ , como  $\det A = 1$  nos lleva a  $a^\mu a_\mu = 1$  o  $(a^0)^2 - \mathbf{a}^2 = 1$ . La forma general de (2.271) es

$$A(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) = \sqrt{\frac{1 + \gamma}{2(1 + \boldsymbol{\mu}^2)}} \left[ \sigma_0 \left( 1 - i \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{u}}{1 + \gamma} \right) + \boldsymbol{\sigma} \cdot \left( \frac{\mathbf{u} + \mathbf{u} \times \boldsymbol{\mu}}{1 + \gamma} - i\boldsymbol{\mu} \right) \right], \quad (2.272)$$

done el vector adimensional  $\mathbf{u} = \gamma(v)\mathbf{v}/c$ .

Recíprocamente, como  $\text{Tr}(\sigma_\mu \sigma_\nu) = 2\delta_{\mu\nu}$ , obtenemos  $a^\mu = (1/2)\text{Tr}(A\sigma_\mu)$ . Si expresamos (2.272) en la forma  $A(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) = a^\mu \sigma_\mu$  podemos determinar  $\boldsymbol{\mu}$  y  $\mathbf{v}$ , y por lo tanto  $\mathbf{u}$ , a partir de las componentes del tetravector complejo  $a^\mu$  como:

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{\text{Im}(\mathbf{a})}{\text{Re}(a^0)}, \quad (2.273)$$

$$\mathbf{u} = 2 [\text{Re}(a^0)\text{Re}(\mathbf{a}) + \text{Im}(a^0)\text{Im}(\mathbf{a}) + \text{Re}(\mathbf{a}) \times \text{Im}(\mathbf{a})], \quad (2.274)$$

done  $\text{Re}(a^\mu)$  y  $\text{Im}(a^\mu)$  son la parte real e imaginaria de las correspondientes componentes del tetravector  $a^\mu$ . Cuando  $\text{Re}(a^0) = 0$  la expresión (2.273) está definida y representa una rotación de valor  $\pi$  alrededor de un eje en la dirección del vector  $\text{Im}(\mathbf{a})$ .

Si representamos toda transformación de Lorentz en términos de un boost seguido de una rotación, es decir en la forma contraria,  $\Lambda(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) = R(\boldsymbol{\mu})L(\mathbf{v})$ , entonces la expresión general de  $A$  es la misma que en (2.272) pero con un cambio de signo en el producto vectorial  $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\mu}$ . Por lo tanto, la descomposición es también única. La rotación  $R(\boldsymbol{\mu})$  es la misma que antes pero el boost viene expresado en términos de las variables  $a^\mu$  por

$$\mathbf{u} = 2 [\text{Re}(a^0)\text{Re}(\mathbf{a}) + \text{Im}(a^0)\text{Im}(\mathbf{a}) + \text{Im}(\mathbf{a}) \times \text{Re}(\mathbf{a})].$$

Obsérvese la diferencia en el tercer término el cual es el opuesto cuando se compara con (2.274).

En la representación matricial  $4 \times 4$  del grupo de Lorentz sobre el espacio-tiempo de Minkowski, un boost se expresa como  $L(\boldsymbol{\beta}) = \exp(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{K})$  en términos de los parámetros normales y adimensionales  $\beta_i$  y de los generadores de los boosts  $K_i$ , dados por las matrices  $4 \times 4$ ,

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si llamamos  $B = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{K} \equiv \sum_i \beta_i K_i$ , tenemos

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} \beta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1\beta_1 & \beta_1\beta_2 & \beta_1\beta_3 \\ 0 & \beta_2\beta_1 & \beta_2\beta_2 & \beta_2\beta_3 \\ 0 & \beta_3\beta_1 & \beta_3\beta_2 & \beta_3\beta_3 \end{pmatrix},$$

con  $\beta^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2$  y  $B^3 = \beta^2 B$ , de tal manera que las demás potencias de  $B$  se pueden expresar en términos de éstas, obtenemos que la expresión final de  $L(\boldsymbol{\beta}) = \exp(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{K})$  es

$$\exp(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{K}) = \exp(B) = \mathbb{I} + \frac{1}{1!}B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \dots = \mathbb{I} + \frac{1}{1!}B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}\beta^2 B + \frac{1}{4!}\beta^2 B^2 + \dots$$

que sumando componente a componente, converge a

$$\begin{pmatrix} C & (\beta_1/\beta)S & (\beta_2/\beta)S & (\beta_3/\beta)S \\ (\beta_1/\beta)S & 1 + \frac{\beta_1\beta_1}{\beta^2}(C-1) & \frac{\beta_1\beta_2}{\beta^2}(C-1) & \frac{\beta_1\beta_3}{\beta^2}(C-1) \\ (\beta_2/\beta)S & \frac{\beta_2\beta_1}{\beta^2}(C-1) & 1 + \frac{\beta_2\beta_2}{\beta^2}(C-1) & \frac{\beta_2\beta_3}{\beta^2}(C-1) \\ (\beta_3/\beta)S & \frac{\beta_3\beta_1}{\beta^2}(C-1) & \frac{\beta_3\beta_2}{\beta^2}(C-1) & 1 + \frac{\beta_3\beta_3}{\beta^2}(C-1) \end{pmatrix}$$

donde se ha abreviado  $S = \sinh \beta$  y  $C = \cosh \beta$ .

¿Cuál es el significado físico de los parámetros normales  $\beta_i$ ? Supongamos dos observadores  $O$  y  $O'$  que relacionan sus medidas espacio-temporales  $x$  y  $x'$  mediante  $x'^\mu = L(\boldsymbol{\beta})^\mu{}_\nu x^\nu$ . El observador  $O$  emite en el instante  $t$  y en el instante posterior  $t + dt$  dos señales luminosas desde el origen de su sistema cartesiano de referencia. Estas dos señales medidas por  $O'$  tienen lugar en los puntos  $\mathbf{r}'$  y  $\mathbf{r}' + d\mathbf{r}'$  y en los instantes  $t'$  y  $t' + dt'$ , respectivamente. Están dadas por

$$cdt' = L^0{}_0 cdt, \quad dx'^i = L^i{}_0 cdt$$

ya que para  $O$ ,  $dx^i = 0$ . El cociente  $dx'^i/dt'$  es precisamente la velocidad de la fuente emisora  $v^i$ , es decir la velocidad del origen del sistema de referencia de  $O$  medido por  $O'$ . Esta velocidad es  $v^i = cL^i{}_0/L^0{}_0 = c(\beta_i/\beta)S/C$ , de tal manera que la relación entre los parámetros normales y las componentes de la velocidad relativa entre observadores es

$$\frac{\mathbf{v}}{c} = \frac{\boldsymbol{\beta}}{\beta} \tanh \beta, \quad \tanh^2 \beta = \frac{\sinh^2 \beta}{\cosh^2 \beta} = \frac{\cosh^2 \beta - 1}{\cosh^2 \beta}, \quad \frac{1}{\cosh^2 \beta} = 1 - \tanh^2 \beta$$

por lo que  $\tanh \beta = v/c$ . La función  $\cosh \beta \equiv \gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  y cuando la transformación la expresamos en términos del parámetro velocidad toma la forma de la matriz simétrica

$$L(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v_x/c & \gamma v_y/c & \gamma v_z/c \\ \gamma v_x/c & 1 + \frac{v_x^2}{c^2} \frac{\gamma^2}{\gamma+1} & \frac{v_x v_y}{c^2} \frac{\gamma^2}{\gamma+1} & \frac{v_x v_z}{c^2} \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \\ \gamma v_y/c & \frac{v_y v_x}{c^2} \frac{\gamma^2}{\gamma+1} & 1 + \frac{v_y^2}{c^2} \frac{\gamma^2}{\gamma+1} & \frac{v_y v_z}{c^2} \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \\ \gamma v_z/c & \frac{v_z v_x}{c^2} \frac{\gamma^2}{\gamma+1} & \frac{v_z v_y}{c^2} \frac{\gamma^2}{\gamma+1} & 1 + \frac{v_z^2}{c^2} \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \end{pmatrix}. \quad (2.275)$$

La transformación inversa es  $L^{-1}(\mathbf{v}) = L(-\mathbf{v})$ . Una matriz de rotación en la forma  $4 \times 4$  aparece escrita por bloques como

$$R(\boldsymbol{\mu}) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \tilde{R}(\boldsymbol{\mu}) \end{pmatrix}, \quad (2.276)$$

donde  $\tilde{R}(\boldsymbol{\mu})$  es la matriz ortogonal  $3 \times 3$  dada en (2.228). Podemos dar también una representación matricial de este tipo a los boosts Lorentzianos (2.275) en la forma

$$L(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \mathbf{v}^T / c \\ \gamma \mathbf{v} / c & \mathbb{I}_3 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)c^2} \mathbf{v} \mathbf{v}^T \end{pmatrix}, \quad (2.277)$$

donde  $\mathbf{v}^T$  es el vector fila transpuesto del vector columna tridimensional  $\mathbf{v}$ , y  $\mathbb{I}_3$  la matriz unidad  $3 \times 3$ . De esta forma, la componente de la matriz  $3 \times 3$ ,  $(\mathbf{v} \mathbf{v}^T)_{ij} = v_i v_j$ . Es fácil ver en esta representación que la transformación conjugada

$$R(\boldsymbol{\mu}) L(\mathbf{v}) R(\boldsymbol{\mu})^{-1} = L(R(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{v}).$$

En efecto

$$R(\boldsymbol{\mu}) L(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \mathbf{v}^T / c \\ \gamma R(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{v} / c & R(\boldsymbol{\mu}) + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)c^2} (R(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{v}) \mathbf{v}^T \end{pmatrix},$$

y al actuar por la derecha con  $R(\boldsymbol{\mu})^{-1} = R(\boldsymbol{\mu})^T$ , nos queda

$$\begin{pmatrix} \gamma & (R(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{v})^T / c \\ \gamma R(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{v} / c & \mathbb{I}_3 + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)c^2} (R(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{v}) (R(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{v})^T \end{pmatrix} = L(R(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{v}).$$

Cuando la transformación general de Lorentz se expresa en la forma  $\Lambda(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) = L(\mathbf{v}) R(\boldsymbol{\mu})$ , entonces por construcción, la primera columna de  $\Lambda(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu})$  es precisamente la primera columna de (2.275) donde están definidos los parámetros de velocidad  $\mathbf{v}$ . Por lo tanto, a partir de una transformación de Lorentz general  $\Lambda(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu})$ , su primera columna nos suministra los valores de los parámetros  $\mathbf{v}$  y se puede construir la transformación  $L(\mathbf{v})$ . Para calcular la rotación que está contenida en ella, basta hacer  $L(-\mathbf{v}) \Lambda(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) = R(\boldsymbol{\mu})$ . Si se expresase en sentido contrario  $\Lambda(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) = R(\boldsymbol{\mu}) L(\mathbf{v})$ , entonces es la primera fila de  $\Lambda$  la que coincide con la primera fila de (2.275). En este caso cualquier transformación general de Lorentz  $\Lambda(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu})$ , se puede siempre escribir de forma única mediante las dos expresiones  $\Lambda(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) = L(\mathbf{v}) R(\boldsymbol{\mu}) = R(\boldsymbol{\mu}) L(\mathbf{v}')$  donde la rotación es la misma en ambos términos (2.273) y  $L(\mathbf{v}') = R(-\boldsymbol{\mu}) L(\mathbf{v}) R(\boldsymbol{\mu}) = L(R(-\boldsymbol{\mu}) \mathbf{v})$ , es decir, la velocidad  $\mathbf{v}' = R(-\boldsymbol{\mu}) \mathbf{v}$  es la rotada de la  $\mathbf{v}$ .

La matriz  $\Lambda$  puede ser considerada como una tetrada, es decir, un conjunto de cuatro tetra-vectores ortonormales, uno de ellos de carácter temporal (de norma +1) y los otros tres de carácter espacial (de norma -1) asociados al observador inercial  $O$  por el observador  $O'$ . De hecho, si la transformación la consideramos compuesta en la forma  $\Lambda(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) = L(\mathbf{v}) R(\boldsymbol{\mu})$ , entonces la primera columna de  $\Lambda$  es precisamente la tetravelocidad del origen del sistema cartesiano de  $O$  y las otras tres columnas son los tres vectores unidad del sistema de referencia de  $O$ , rotados con la rotación  $R(\boldsymbol{\mu})$  y luego 'boosteados' con la matriz  $L(\mathbf{v})$ .





## Capítulo 3

# Cuantización de los modelos

La cuantización de los sistemas Lagrangianos generalizados conduce a que las funciones de onda que describen los estados cuánticos de cualquier sistema mecánico y en particular de las partículas elementales, deben ser funciones complejas, de cuadrado integrable,  $\Phi(x)$ , definidas sobre todo el espacio cinemático  $X$ .

Vamos a usar el método de Feynman de cuantización, para encontrar cómo es la función de onda de una partícula elemental y ver cómo transforma bajo el grupo cinemático. Una vez que hayamos encontrado cómo es el espacio de Hilbert de los estados puros, encontraremos cómo se representan los generadores de las transformaciones cinemáticas, como operadores autoadjuntos. El resto del análisis se realiza por los medios habituales de la mecánica cuántica, es decir, clasificando los estados mediante la correspondiente elección del adecuado conjunto completo de observables que conmutan. Haremos especial énfasis en la estructura del operador de espín, que aparece como un operador diferencial que deriva a la función de onda con respecto a las variables cinemáticas compactas. Su estructura cuántica nos recuerda a su estructura clásica, por lo que podremos plantear una especie de ‘receta’ de correspondencia, entre los observables clásicos y cuánticos.

La estructura del espín depende de las variables cinemáticas y de cómo éstas transforman bajo rotaciones. Puesto que estas variables son la velocidad  $\mathbf{u}$  y la orientación  $\boldsymbol{\alpha}$ , tanto en el caso relativista como en el no relativista, la estructura del operador espín es la misma en ambos formalismos. En realidad, el operador espín depende solamente de la parte compacta de la variable velocidad  $\mathbf{u}$ , que es su dirección, dada por los dos ángulos cenital  $\theta$  y acimutal  $\phi$ , y sobre las tres variables que caracterizan a la orientación del sistema cartesiano local asociado al punto, por lo que serán operadores diferenciales con respecto a estas cinco variables angulares.

La aparición de espines semienteros depende de que el operador espín contenga operadores de derivación con respecto a las variables de orientación. La razón es que cuando los operadores de momento angular actúan sobre una variedad de dimensión dos, como es la superficie de la esfera unidad, no obtenemos todas las representaciones del grupo de rotaciones sino solamente las correspondientes a los valores enteros. En este caso los vectores propios se reducen a los armónicos esféricos. Es necesario que el grupo de rotaciones actúe sobre sí mismo, como variedad tridimensional, para obtener todas las representaciones finitas, incluidas las de espín semientero.

Los modelos clásicos que poseen entre sus variables cinemáticas la velocidad  $\mathbf{u}$  y la orientación  $\boldsymbol{\alpha}$ , tienen la peculiaridad de que su centro de masa y su centro de carga son puntos diferentes. Las propiedades magnéticas están relacionadas con la corriente, es decir con el movimiento de la carga y por lo tanto con la parte del momento angular debido al *zitterbewegung*. Es la existencia de otro momento angular no ligado con el momento magnético, el que nos va a producir el concepto de relación giromagnética.

La ecuación de Dirac la vamos a obtener al cuantizar el sistema clásico relativista, en el que la carga se mueve en círculos a la velocidad de la luz alrededor de su centro de masa. En

este caso, los operadores que caracterizan a su orientación, completamente reproducen todo el álgebra de observables internos, todo el álgebra de Dirac.

### 3.1. Cuantización Feynman de los sistemas Lagrangianos

Consideremos un sistema Lagrangiano generalizado, del tipo de los descritos en los capítulos anteriores, cuya evolución tiene lugar entre los puntos  $x_1$  y  $x_2$  de su espacio cinemático.

La formulación variacional requiere que conozcamos con precisión estos valores extremos, y la solución particular de las ecuaciones de Euler-Lagrange que pasa por ellos nos singulariza la evolución del sistema. Pero si de forma experimental es imposible obtener la descripción precisa de estos estados, dado que medir significa interaccionar y cuando medimos alguna propiedad de un sistema algunas otras aumentan su incertidumbre, esto da lugar a que en realidad no conocemos con precisión  $x_1$ , sino un conjunto de posibles estados iniciales, alrededor de  $x_1$ , con una cierta probabilidad. Lo mismo con respecto a  $x_2$ , por lo que intentar encontrar el camino que describe el sistema es equivalente a discernir de entre todos los caminos que unen los puntos de la región inicial  $\mathcal{R}_1$  con la región final  $\mathcal{R}_2$ . Lo que tenemos es una especie de tubo o camino *grueso* que une ambas regiones dentro del cual es imposible discernir un camino específico. La formulación variacional debe ser abandonada por una teoría que nos prediga con qué probabilidad, si el sistema se encuentra inicialmente en  $\mathcal{R}_1$ , llegará a  $\mathcal{R}_2$ .

Para cuantizar este tipo de sistemas Lagrangianos generalizados, seguiremos el método de cuantización de Feynman, de integrales sobre todos los caminos <sup>1</sup>. El principio de cuantización de Feynman consiste en que frente a la idea clásica de que dados los puntos extremos  $x_1$  y  $x_2$ , la trayectoria clásica entre ellos es el camino que hace extremal a la acción, como desde el punto de vista cuántico no es posible medir qué camino sigue realmente el sistema, entonces todas las trayectorias  $x(\tau)$  entre ambos puntos, son posibles. Además van a ser todas ellas igualmente probables. Se trata por lo tanto de definir una probabilidad  $P[x(\tau)]$ , para cada posible camino. El principio variacional ya no funciona y es sustituido por un principio de cuantización que admite que todas las trayectorias son equiprobables.

Esta probabilidad se va a definir como el valor absoluto al cuadrado de un número complejo  $\phi[x(\tau)]$  asociado a cada camino, llamado **amplitud de probabilidad**. De esta forma

$$P[x(\tau)] = |\phi[x(\tau)]|^2, \quad \forall x(\tau), \quad 0 \leq P[x(\tau)] \leq 1.$$

Si todos los caminos son igualmente probables, entonces estos complejos  $\phi[x(\tau)]$ , son todos del mismo valor absoluto distinguiéndose unos de otros solamente en su fase. La virtud de Feynman es cómo define esa fase. Esta fase va a ser el valor de la acción del sistema entre los puntos  $x_1$  y  $x_2$ , en unidades de  $\hbar$ , a lo largo del correspondiente camino  $x(\tau)$ , es decir,

$$\phi[x(\tau)] = N \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{L}(x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau \right\} = N \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} A_{[x]}(x_1, x_2) \right\}, \quad (3.1)$$

siendo  $N$  un factor constante de normalización, el mismo para todos los caminos. La fase es la acción a lo largo de ese camino,  $A_{[x]}(x_1, x_2)$ , dividida por  $\hbar$ . La amplitud de probabilidad  $\phi[x(\tau)]$  es un funcional sobre todos los caminos posibles, y por eso, la representamos con paréntesis cuadrados, pero que una vez realizada la integral (3.1) en vez de ser un número complejo es una función compleja de las variables extremas  $x_1$  y  $x_2$ .

En este método estadístico de Feynman, la existencia de alternativas o caminos independientes no produce la suma de las correspondientes probabilidades. Este tipo de estadística la vamos a denominar **estadística interfiriente**. La probabilidad de un proceso completo en el que existen varias alternativas independientes, se determina calculando primero la amplitud de

<sup>1</sup> R.P. Feynman and A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, MacGraw Hill, NY (1965), p. 36.

probabilidad de todo el proceso sumando las amplitudes de probabilidad de las alternativas, y después tomando su valor absoluto al cuadrado. Esto produce el efecto de que el valor absoluto de una suma de números complejos puede ser menor que el valor absoluto de cualquiera de ellos, por lo que se puede dar la situación de que la suma de procesos alternativos puede producir una probabilidad nula para el proceso global. Se ha producido una *interferencia*. La mecánica cuántica, según Feynman, es una teoría estadística de tipo interfiriente.

La idea que subyace en el método de cuantización de Feynman es el proceso de interferencia de las dos rendijas. Formalmente tenemos un haz de luz monocromática que incide sobre dos rendijas, se difracta y acaba en una pantalla. A cada punto de la pantalla han llegado fotones provenientes de las dos rendijas y sin embargo hay puntos a los que no llega luz. En ellos se ha producido una interferencia.

Como onda electromagnética podemos pensar que a lo largo de cada trayectoria fotónica va un plano transversal que es el que contiene al campo eléctrico y magnético de la onda. Supongamos que es luz polarizada circular y que el campo eléctrico de intensidad constante va rotando con velocidad angular  $\omega$ . Al progresar la onda lo que va cambiando es la fase de este campo, pero no su intensidad. Podemos también imaginar que este plano transversal representa al plano complejo en el que el campo eléctrico es el número complejo  $\phi[x(\tau)]$ , de valor absoluto constante y cuya fase va incrementando a lo largo de la trayectoria. Si a un punto de la pantalla llegan dos fotones, cada uno pasando por una rendija diferente, el campo eléctrico en este punto será la suma de los campos eléctricos de las dos ondas y la energía que llega a ese punto es proporcional al cuadrado de la intensidad del campo. La probabilidad de llegada de luz a un punto es el módulo al cuadrado de la suma de las amplitudes  $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ , es decir  $|\phi[x_1(\tau)] + \phi[x_2(\tau)]|^2$ . Hay puntos a los que llegan fotones desde una rendija, pero al superponer el efecto de las dos rendijas, el campo eléctrico resultante puede ser cero. No se suman las probabilidades de llegada sino las amplitudes de probabilidad.

Si extendemos esta idea a un sistema arbitrario podemos imaginar que en cada punto de la evolución del sistema en su espacio cinemático en vez del plano transversal que contiene al campo electromagnético le asociamos un plano complejo en el que dibujamos la amplitud  $\phi[x(\tau)]$ , como en la figura 3.1,

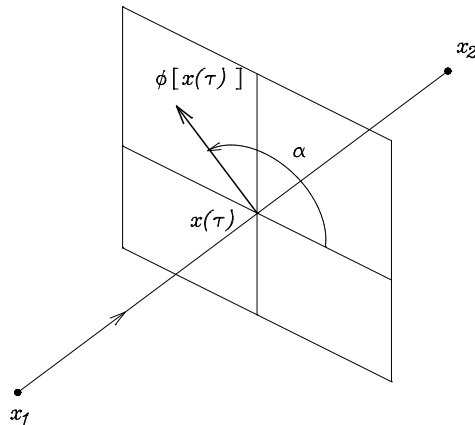


Figura 3.1: Trayectoria del sistema material en su espacio cinemático en la que se ha superpuesto un plano complejo en el punto  $x(\tau)$ , que contiene a su amplitud de probabilidad  $\phi[x(\tau)]$ . La fase  $\alpha$  de este complejo es la acción del sistema, en unidades de  $\hbar$ , a lo largo de esta trayectoria y hasta ese punto.

La amplitud de probabilidad total de que el sistema llegue al punto  $x_2$  saliendo de  $x_1$ , lo que se denomina el Kernel de Feynman  $K(x_1, x_2)$ , se obtendrá como la suma, o más bien la integración sobre todos los caminos posibles, de términos de la forma (3.1). Feynman lo escribe

como

$$K(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \phi[x(\tau)] \mathcal{D}(x(\tau)),$$

donde por  $\mathcal{D}(x(\tau))$  quiere indicar una medida sobre la clase de caminos que unen  $x_1$  con  $x_2$ .

El kernel de Feynman  $K(x_1, x_2)$ , será en general una función compleja definida sobre la variedad  $X \times X$ . Más propiamente es una **función generalizada o distribución**, debido a la forma especial de construirla sumando o integrando sobre una infinidad de caminos. Si pudiéramos a su vez sumar (o integrar) diferentes kérneles  $K(x_1, x)$ , todos ellos con el mismo punto final  $x$ , pero diferentes puntos iniciales  $x_1$ , lo que obtendríamos es la amplitud de probabilidad de que nuestro sistema mecánico estuviera en  $x$ , proveniente de algunos puntos iniciales, pero desconocidos, es decir, la interpretación habitual de la función de onda  $\Phi(x)$  de dicho sistema al ser cuantizado. Las diferentes funciones de onda o **estados**, se obtendrían de las diferentes formas de sumar los kérneles de Feynman sobre todas las posibilidades de sus puntos iniciales y de los correspondientes caminos de llegada.

Por este razonamiento, llegamos a la conclusión de que al cuantizar por el método de Feynman cualquier sistema Lagrangiano, los estados cuánticos del mismo quedan descritos por funciones complejas de las variables cinemáticas, y de cuadrado integrable. Solamente funciones de las variables cinemáticas y no de otras variables ni siquiera del espacio de configuración, del espacio de fase o del espacio de configuración ampliado. El espacio de Hilbert de los estados es el espacio  $\mathbb{L}^2(X)$ . Lo que el formalismo no fija es cómo es la medida sobre  $X$ , para realizar las integraciones.

Vemos que el método de Feynman realiza el papel de las variables cinemáticas para caracterizar el estado cuántico del sistema, frente a otras variedades, como por ejemplo la de los grados de libertad independientes. Consideramos que es ésta una de las razones del por qué las variables cinemáticas debían jugar también un papel crucial en la formulación clásica. Queda así justificado el que la definición de partícula clásica se haya hecho dotando de propiedades exclusivas al espacio cinemático, haciendo que sea un espacio homogéneo del grupo cinemático.

En mecánica cuántica estamos acostumbrados a que la función de onda  $\Phi(x)$ , en vez de ser una sola función compleja, sea una función multicomponente, es decir un conjunto de  $n$  funciones complejas de las variables  $t$  y  $\mathbf{r}$ ,  $\psi_i(t, \mathbf{r})$ ,  $i = 1, \dots, n$  formando una especie de vector columna, que puede ser considerado como un objeto de un espacio de Hilbert  $n$ -dimensional. En general, esta descomposición finita en componentes, transforma con una representación irreducible del grupo de rotaciones, con lo que cada una de las componentes  $\psi_i$  hace referencia a una posible orientación del espín. La cuantización a lo Feynman hace que nuestra función de onda  $\Phi(x)$ , sea solamente una función, pero del conjunto de variables cinemáticas, es decir de más variables que tiempo y posición. Una vez que definamos el conjunto completo de observables que conmutan, al encontrar una base del espacio de Hilbert de los estados, nos va a permitir buscar funciones en variables separadas, de tal manera que  $\Phi(x)$  se va a poder escribir en términos de una parte espacio temporal  $\phi(t, \mathbf{r})$ , dependiente de las variables  $t$  y  $\mathbf{r}$ , y de otra parte  $\chi$ , que va a depender del resto de las variables cinemáticas, invariantes por traslación. Diremos que la función de onda ha quedado descompuesta en su parte *espacio-temporal*  $\phi$  y en su parte *interna*  $\chi$ . Es esta descomposición la que va a dar lugar a la aparición de las diferentes componentes de la función de onda. En el caso de las partículas elementales, las variables adicionales van a ser la velocidad  $\mathbf{u}$  y la orientación  $\boldsymbol{\alpha}$ , y los operadores de espín van a derivar solamente con respecto a estas variables, por lo que pueden considerarse como *observables internos*.

### 3.1.1. Transformación de la función de onda

Para calcular cómo transforma la función de onda entre observadores inerciales, sean éstos  $O$  y  $O'$  de tal manera que las variables cinemáticas transforman con un elemento  $g \in G$ , del

grupo cinemático  $G$ , en la forma:

$$x'^i = f^i(x, g). \quad (3.2)$$

Si para el observador  $O$  la partícula sigue el camino  $\bar{x}(\tau)$ , entonces para  $O'$  sigue el camino  $\bar{x}'(\tau) = f(\bar{x}(\tau), g)$ . Como la Lagrangiana, si entre observadores transforman las variables cinemáticas  $x' = gx$ , transforma de acuerdo con,

$$\tilde{L}(x', \dot{x}') = \tilde{L}(x, \dot{x}) + \frac{d}{d\tau} \alpha(g; x),$$

la amplitud de probabilidad para el observador  $O'$  es

$$\begin{aligned} \phi'[\bar{x}'(\tau)] &= N \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{L}(\bar{x}'(\tau), \dot{\bar{x}}'(\tau)) d\tau \right\} \\ &= N \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{L}(\bar{x}(\tau), \dot{\bar{x}}(\tau)) d\tau \right\} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\alpha(g; \bar{x}(\tau))}{d\tau} d\tau \right\}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\phi'[\bar{x}'(\tau)] = \phi[\bar{x}(\tau)] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (\alpha(g; x_2) - \alpha(g; x_1)) \right\},$$

donde el último factor de fase es independiente del camino de integración  $\bar{x}(\tau)$ . Si ahora sumamos todas las amplitudes de probabilidad escritas en esta forma, para todos los posibles caminos, resulta que el kernel de Feynman transforma como:

$$K'(x'_1, x'_2) = K(x_1, x_2) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (\alpha(g; x_2) - \alpha(g; x_1)) \right\}. \quad (3.3)$$

Si la información relativa al punto inicial  $x_1$  se pierde, por ejemplo si hacemos la correspondiente suma sobre diferentes puntos iniciales, entonces la función de onda transforma como la parte relacionada con las variables del punto  $x_2$ , hasta tal vez una función arbitraria sobre  $G$ ,

$$\Phi'(x'(x)) = \Phi'(gx) = \Phi(x) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (\alpha(g; x) + \theta(g)) \right\}, \quad (3.4)$$

o en términos de las variables sin primar  $x$ ,

$$\Phi'(x) = \Phi(g^{-1}x) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (\alpha(g; g^{-1}x) + \theta(g)) \right\}, \quad (3.5)$$

donde  $\theta(g)$  es una función arbitraria definida sobre  $G$  pero independiente de  $x$ .

Como nuestra partícula se encuentra en alguna parte del espacio cinemático  $X$ , la probabilidad de encontrarla en alguna parte debe ser 1. Tenemos que definir la forma de sumar probabilidades en puntos  $x \in X$ . Si definimos una medida sobre  $X$ ,  $\mu(x)$ , tal que  $d\mu(x)$  es el elemento de volumen en el espacio  $X$  y  $|\Phi(x)|^2 d\mu(x)$  se interpreta como la probabilidad de encontrar a la partícula dentro del volumen  $d\mu(x)$  alrededor del punto  $x$ , entonces la probabilidad de encontrarla en alguna parte, en cualquier instante  $t$  y para cada observador inercial, debe ser uno, es decir

$$\int_X |\Phi(x)|^2 d\mu(x) = 1, \quad (3.6)$$

donde la integral está tomada a  $t = \text{constante}$ . Como a partir de (3.5)

$$|\Phi'(x')|^2 = |\Phi(x)|^2, \quad (3.7)$$

entonces para que la probabilidad se conserve entre observadores inerciales, es suficiente admitir que la medida  $\mu(x)$  es invariante bajo las transformaciones del grupo. En ese caso, la ecuación

(3.7) implica también la conservación local de la probabilidad entre observadores inerciales. Esto va a tener consecuencias fuertes en el formalismo, ya que va a poder definir otro tipo de transformaciones de simetría: la invariancia del formalismo bajo cambios arbitrarios de fase de la función de onda. Pero la fase es en general función de  $x$  y la podemos cambiar de forma arbitraria en cada punto. Admitir una medida invariante nos lleva a que el formalismo es también invariante bajo cambios de fase locales, es lo que se denomina la **invariancia gauge local**.

Conviene observar que el cambio arbitrario de fase  $\beta(x)$  que da lugar a esta nueva simetría, no es solo una fase definida sobre el espacio-tiempo, sino sobre todo el espacio cinemático. Frente a lo que se suele admitir en teoría cuántica de campos, tenemos la posibilidad de analizar simetrías más generales que actúan sobre una variedad más amplia que el espacio-tiempo.

### 3.1.2. Espacio de Hilbert de las amplitudes de probabilidad

La función compleja  $\Phi(x)$ , si se interpreta como la amplitud de probabilidad de encontrar a nuestra partícula en el punto  $x \in X$ , habiendo venido de alguna otra parte, satisface (3.6). Esto significa que  $\Phi(x)$  es una función compleja de cuadrado integrable definida sobre el espacio cinemático. Como las amplitudes de probabilidad se pueden sumar para definir nuevas amplitudes de probabilidad, convenientemente normalizadas, el conjunto de las posibles funciones  $\Phi(x)$  tiene estructura de espacio vectorial complejo, ya que la suma y/o posterior producto por números complejos, produce nuevas funciones complejas con el significado de describir amplitudes de probabilidad.

En consecuencia, el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , cuyos rayos unidad representan los estados puros del sistema es un espacio de funciones de cuadrado integrable  $\mathbb{L}^2(X, \mu)$  definidas sobre el espacio cinemático  $X$ . La medida  $\mu(x)$  es una medida invariante, de tal manera que el producto escalar en  $\mathcal{H}$  se define mediante

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int_X \Phi^*(x) \Psi(x) d\mu(x), \quad (3.8)$$

donde  $\Phi^*(x)$  representa la función compleja conjugada de la  $\Phi(x)$ . Hay una arbitrariedad en la elección de la medida invariante  $\mu(x)$ , pero a esta altura del formalismo esto se hará por argumentos físicos. En general la integración se hace a tiempo constante en cada sistema de referencia de tal manera que el resultado es independiente del tiempo y eso conduce a la conservación local de la probabilidad y a que la densidad de probabilidad satisfaga la ecuación de continuidad. De todas formas, el exigir que la medida sea invariante restringe fuertemente el tipo de medidas que pueden utilizarse.

El valor absoluto del anterior producto escalar (3.8),  $|\langle \Phi | \Psi \rangle|$ , representa la probabilidad de que habiendo preparado al sistema en el estado  $\Psi(x)$ , lo encontremos en el estado  $\Phi(x)$ , y recíprocamente, ya que  $|\langle \Phi | \Psi \rangle| = |\langle \Psi | \Phi \rangle|$ .

### 3.1.3. Representación de los Observables

El teorema de Wigner <sup>2,3</sup>, sobre simetrías de un sistema cuántico, implica que para toda simetría  $g \in G$  de un grupo continuo que transforma  $x' = gx$ , existe una aplicación uno a uno de los rayos unidad en los rayos unidad sobre  $\mathcal{H}$ , que viene inducida en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  por un operador unitario  $U(g)$  definido salvo una fase. Este operador transforma una función de onda definida en  $x$  en otra función de onda arbitraria del rayo unidad imagen definido en el punto  $x'$ .

El Principio de Relatividad Restringido es una simetría fuerte de los sistemas físicos. Define la equivalencia de un conjunto de observadores que están definidos por cómo relacionan entre

<sup>2</sup> E.P. Wigner, *Group theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra*, Acad. Press, NY (1959).

<sup>3</sup> V. Bargmann, Note on Wigner's theorem on symmetry operations, *J. Math. Phys.* **5**, 862 (1964).

sí las medidas de acontecimientos espacio-temporales. Esta relación viene caracterizada por el grupo cinemático  $G$ . Si interpretamos que  $\Phi(x)$  es la función de onda que describe al estado de la partícula para el observador  $O$  y que  $\Phi'(x)$  es cómo la describe  $O'$ , entonces, el teorema de Wigner implica

$$U(g)\Phi(x) = \Phi'(x) = \Phi(g^{-1}x) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \alpha(g; g^{-1}x) + \theta(g) \right\}. \quad (3.9)$$

Como la función  $\theta(g)$  da lugar a una fase constante, independiente de  $x$ , la podemos eliminar, y tomar como definición de la representación unitaria del grupo  $G$  sobre el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$

$$\Phi'(x) = U(g)\Phi(x) = \Phi(g^{-1}x) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \alpha(g; g^{-1}x) \right\}. \quad (3.10)$$

Las funciones gauge satisfacen (1.15), por lo que el término de fase se puede reemplazar por

$$\alpha(g; g^{-1}x) = -\alpha(g^{-1}; x) + \alpha(0; x) + \xi(g, g^{-1}) = -\alpha(g^{-1}; x) + \zeta(g), \quad (3.11)$$

ya que las funciones gauge pueden escogerse de tal manera que  $\alpha(0; x) = 0$ , y como la función  $\zeta(g) = \xi(g, g^{-1})$  da lugar a otra fase constante, la podemos suprimir. Definimos la transformación de la función de onda mediante:

$$\Phi'(x) = U(g)\Phi(x) = \Phi(g^{-1}x) \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \alpha(g^{-1}; x) \right\}. \quad (3.12)$$

Si el grupo  $G$  es el grupo cinemático, esta es la realización del Principio de Relatividad Restringido en el caso cuántico, es decir, la expresión del cambio de la función de onda entre observadores inerciales.

Si el operador unitario lo representamos en términos del generador infinitesimal autoadjunto del álgebra de Lie en la forma

$$U(g) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} g^\sigma X_\sigma \right\}, \quad (3.13)$$

entonces, para una transformación infinitesimal de parámetros  $\delta g^\sigma$ , la transformación inversa tiene por parámetros infinitesimales  $-\delta g^\sigma$ , por lo que a primer orden en  $\delta g^\sigma$

$$U(\delta g)\Phi(x) = \left( \mathbb{I} - \frac{i}{\hbar} \delta g^\sigma X_\sigma \right) \Phi(x) = \Phi(x) - \frac{i}{\hbar} \delta g^\sigma X_\sigma \Phi(x),$$

mientras que

$$\Phi(\delta g^{-1}x) \equiv \Phi(f(x, \delta g^{-1})) = \Phi(x) - \delta g^\sigma u_\sigma^i(x) \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x^i}, \quad u_\sigma^j(x) = \left. \frac{\partial f^j(x, g)}{\partial g^\sigma} \right|_{g=0},$$

y

$$\exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \alpha(\delta g^{-1}; x) \right\} = 1 - \frac{i}{\hbar} \alpha(\delta g^{-1}; x).$$

Como  $\alpha(0; x) = 0$ ,

$$\alpha(\delta g^{-1}; x) = \left. \frac{\partial \alpha(g; x)}{\partial g^\sigma} \right|_{g=0} (-\delta g^\sigma) = -\lambda_\sigma(x) \delta g^\sigma, \quad (3.14)$$

y sustituyendo en (3.12) los términos anteriores y después de identificar los términos de primer orden en  $\delta g^\sigma$ , resulta que los generadores  $X_\sigma$ , al actuar sobre las funciones de onda tienen la representación diferencial

$$X_\sigma = \frac{\hbar}{i} u_\sigma^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} - \lambda_\sigma(x), \quad (3.15)$$



Si nos restringimos a transformaciones del espacio de configuración ampliado  $(t, q_i)$  que pueden extenderse a la totalidad del espacio cinemático  $x \equiv (t, q_i, \dots, q_i^{(k-1)})$ , entonces, usando la misma notación que en (1.18)-(1.21), si la transformación infinitesimal de las variables cinemáticas la escribimos en la forma

$$t' = t + M_\sigma \delta g^\sigma, \quad q'_i = q_i + M_{i\sigma}^{(0)} \delta g^\sigma, \quad q_i^{(1)'} = q_i^{(1)} + M_{i\sigma}^{(1)} \delta g^\sigma, \quad \dots, \quad q_i^{(k-1)'} = q_i^{(k-1)} + M_{i\sigma}^{(k-1)} \delta g^\sigma,$$

entonces la forma desarrollada en términos de las variables cinemáticas de la primera parte de (3.15) es

$$w_\sigma^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} = M_\sigma \frac{\partial}{\partial t} + M_{i\sigma}^{(0)} \frac{\partial}{\partial q_i} + M_{i\sigma}^{(1)} \frac{\partial}{\partial q_i^{(1)}} + \dots + M_{i\sigma}^{(k-1)} \frac{\partial}{\partial q_i^{(k-1)}},$$

y los generadores  $X_\sigma$ , que por ser autoadjuntos representan observables, toman la forma:

$$X_\sigma = \frac{\hbar}{i} \left( M_\sigma \frac{\partial}{\partial t} + M_{i\sigma}^{(0)} \frac{\partial}{\partial q_i} + M_{i\sigma}^{(1)} \frac{\partial}{\partial q_i^{(1)}} + \dots + M_{i\sigma}^{(k-1)} \frac{\partial}{\partial q_i^{(k-1)}} \right) - \lambda_\sigma(x). \quad (3.16)$$

Cuando los comparamos con las constantes del movimiento Noetherianas (1.36) escritas en la forma

$$-N_\sigma = -H M_\sigma + p_{(1)}^i M_{i\sigma}^{(0)} + p_{(2)}^i M_{i\sigma}^{(1)} + \dots + p_{(k)}^i M_{i\sigma}^{(k-1)} - \lambda_\sigma(x), \quad (3.17)$$

vemos que podemos enunciar una especie de **receta de correspondencia**. Si nos restringimos a grupos continuos, las funciones  $\lambda_\sigma(x)$  de (1.36), se obtienen a partir de las funciones gauge Lagrangianas  $\alpha(g; x)$ , mediante (1.14), es decir, de la misma forma en que obtenemos las funciones  $\lambda_\sigma(x)$  en (3.14). Identificando el Hamiltoniano y los momentos generalizados en (3.17) con los correspondientes operadores diferenciales en (3.16) que aparecen multiplicando a las correspondientes funciones  $M_{i\sigma}^{(s)}$ , obtenemos: El Hamiltoniano generalizado  $H = p_{(s)}^i q_i^{(s)} - L$ , que multiplica en (3.17) a la función  $M_\sigma$ , se identifica con el operador  $i\hbar\partial/\partial t$  que multiplica a su vez a la función  $M_\sigma$  en (3.16). Análogamente, el momento generalizado  $p_{(s+1)}^i$ , que multiplica a la función  $M_{i\sigma}^{(s)}$ , se identifica con el operador diferencial  $-i\hbar\partial/\partial q_i^{(s)}$ , for  $s = 0, \dots, k-1$ , ya que las funciones  $\lambda_\sigma(x)$ , son las mismas. Al generador  $X_\sigma$  le daremos el mismo nombre que al observable  $N_\sigma$  y lo representaremos con la misma notación.

**Receta:** Conviene recordar que como variables  $p_{(s+1)}^i$  y  $q_i^{(s)}$  son canónico-conjugadas. Entonces, cada momento generalizado  $p_{(s+1)}^i$  queda reemplazado por  $(\hbar/i)$  multiplicado por el operador diferencial que deriva con respecto a la variable canónico-conjugada de ese momento  $q_i^{(s)}$ , y el Hamiltoniano generalizado  $H$ , por el operador diferencial  $i\hbar\partial/\partial t$ .

$$p_{(s+1)}^i \longrightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_i^{(s)}}, \quad H \longrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}.$$

En el caso de las partículas elementales, como las variables cinemáticas son  $t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}$ , como coordenadas generalizadas solo tenemos las  $\mathbf{r}, \mathbf{u}$  y  $\boldsymbol{\rho}$  y de momentos conjugados respectivos, los  $\mathbf{P}, \mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$ , éstos aparecerán representados por

$$\mathbf{P} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathbf{U} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}, \quad \mathbf{V} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}}, \quad H = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}. \quad (3.18)$$

En vez del momento  $\mathbf{V} = \partial\tilde{L}/\partial\boldsymbol{\rho}$ , hemos utilizado la función  $\mathbf{W} = \partial\tilde{L}/\partial\boldsymbol{\omega}$ , que da lugar a la parte rotativa del espín, la cual se expresará finalmente en términos de las derivadas con respecto a  $\boldsymbol{\rho}$ , en la forma en que se describe en el apéndice sobre espinores 3.5, al final de este capítulo.

$$\mathbf{W} = \frac{\hbar}{2i} \{ \nabla_\rho + \boldsymbol{\rho} \times \nabla_\rho + \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_\rho) \}, \quad (3.19)$$

donde hemos puesto  $\nabla_\rho \equiv \partial/\partial\rho$ . La representación de los momentos (3.18) de acuerdo con el principio atómico, es válida incluso cuando la partícula elemental esté sometida a una interacción.

Sabemos que  $V_i = \partial\tilde{L}/\partial\rho_i$  y  $W_j = \partial\tilde{L}/\partial\omega_j = \partial\tilde{L}/\partial\rho_i \partial\rho_i/\partial\omega_j = V_i \partial\rho_i/\partial\omega_j$ . Como en la representación activa

$$\omega_i = \frac{2}{1 + \rho^2}(\dot{\rho}_i + \epsilon_{ijk}\rho_j\dot{\rho}_k), \quad \dot{\rho}_i = \frac{1}{2}(\omega_i - \epsilon_{ikj}\rho_k\omega_j + \rho_i(\rho \cdot \omega)),$$

$$\frac{\partial\dot{\rho}_i}{\partial\omega_j} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - \epsilon_{ikj}\rho_k + \rho_i\rho_j), \quad W_j = V_i \frac{\partial\dot{\rho}_i}{\partial\omega_j} = \frac{\hbar}{2i} \left( \frac{\partial}{\partial\rho_j} + \epsilon_{jik}\rho_i \frac{\partial}{\partial\rho_k} + \rho_j\rho_i \frac{\partial}{\partial\rho_i} \right),$$

es decir (3.19).

La representación de Heisenberg es aquella representación en la que la dependencia temporal de la función de onda ha sido eliminada haciendo en cada instante una transformación unitaria dependiente del tiempo. Entonces, la nueva función de onda depende de las variables cinemáticas pero con el tiempo excluido, es decir depende solamente de las coordenadas generalizadas  $q_i^{(r)}$ ,  $r = 0, \dots, k - 1$ . Por lo tanto, cuando actúan sobre la función de onda en la representación de Heisenberg  $\psi(q_i, q_i^{(1)}, \dots, q_i^{(k-1)})$ , los observables  $q_i^{(r)}$  y  $p_{(s)}^j$  satisfacen las relaciones canónicas de conmutación

$$[q_i^{(r)}, p_{(s+1)}^j] = i\hbar\delta_i^j\delta_s^r.$$

Si las funciones  $\lambda_\sigma(x)$  en (3.15) fueran nulas, los generadores  $X_\sigma$  satisfacen las reglas de conmutación del álgebra de Lie del grupo  $G$ . Pero si algunas de las funciones  $\lambda_\sigma(x) \neq 0$ , entonces los generadores  $X_\sigma$  no satisfacen las reglas de conmutación del álgebra de Lie de  $G$ , sino de una extensión central de  $G$ . La representación del grupo no es una verdadera representación sino una representación proyectiva de  $G$ , como ha demostrado Bargmann <sup>4</sup>.

En efecto, a partir de (3.10) obtenemos

$$U(g_1)\Phi(x) = \Phi(g_1^{-1}x) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\alpha(g_1; g_1^{-1}x)\right\},$$

y si actuamos ahora por la izquierda con  $U(g_2)$ ,

$$U(g_2)U(g_1)\Phi(x) = U(g_2)\Phi(g_1^{-1}x) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\alpha(g_1; g_1^{-1}x)\right\}$$

$$= \Phi((g_2g_1)^{-1}x) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\alpha(g_2; g_2^{-1}x)\right\} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\alpha(g_1; (g_2g_1)^{-1}x)\right\}, \quad (3.20)$$

mientras que si actuamos sobre  $\Phi(x)$  con  $U(g_2g_1)$ ,

$$U(g_2g_1)\Phi(x) = \Phi((g_2g_1)^{-1}x) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\alpha(g_2g_1; (g_2g_1)^{-1}x)\right\}. \quad (3.21)$$

Si definimos  $(g_2g_1)^{-1}x = g_1^{-1}g_2^{-1}x = z$ , entonces  $g_1z = g_2^{-1}x$  y debido a que las funciones gauge satisfacen (1.15), podemos escribir

$$\alpha(g_2; g_1z) + \alpha(g_1; z) = \alpha(g_2g_1; z) + \xi(g_2, g_1), \quad (3.22)$$

que comparando (3.20) con (3.21), y teniendo presente (3.22), obtenemos

$$U(g_2)U(g_1)\Phi(x) = U(g_2g_1)\Phi(x) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\xi(g_2; g_1)\right\}. \quad (3.23)$$

Como la función  $\Phi(x)$  es arbitraria, obtenemos una representación proyectiva unitaria del grupo  $G$ , caracterizada por el exponente no trivial  $\xi(g, g')$ .

<sup>4</sup> V. Bargmann, On unitary ray representations of continuous groups, *Ann. Math.* **59**, 1 (1954).

Para las partículas elementales Galileanas y Poincaré el espacio cinemático es la variedad de dimensión diez, constituida por las variables  $(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha})$ , donde  $t$  es el tiempo,  $\mathbf{r}$  la posición de la carga,  $\mathbf{u}$  la velocidad de ésta y  $\boldsymbol{\alpha}$  la orientación de la partícula. Por lo tanto, en el formalismo cuántico, la función de onda más general que representa los estados de una partícula elemental es una función de cuadrado integrable  $\Phi(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha})$  de estas variables cinemáticas. Para las partículas puntuales el espacio cinemático es solamente el espacio-tiempo cuatridimensional, de tal manera que las funciones de onda son solamente funciones del tiempo y de la posición, pero para partículas con espín la función de onda debe depender de las variables cinemáticas adicionales, como velocidad y orientación. La estructura cuántica del espín, lo mismo que en el caso clásico, va a depender de estas nuevas variables.

## 3.2. Partículas no relativistas con espín

### 3.2.1. Partículas no relativistas con espín. Bosones

Vamos a aplicar este formalismo al caso interesante, pero sencillo, de partículas no relativistas con espín de tipo (anti)orbital. Esto corresponde al ejemplo clásico en el que el espacio cinemático es  $X = \mathcal{G}/SO(3)$  y por lo tanto las variables cinemáticas son tiempo, posición y velocidad. Un ejemplo particular es el descrito en el Capítulo 2, Sección 2.2 y dado por la Lagrangiana libre

$$L = \frac{m}{2} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 - \frac{m}{2\omega^2} \left( \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right)^2, \quad (3.24)$$

con  $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$ . Para la partícula libre, el centro de masa  $\mathbf{q} = \mathbf{r} - \mathbf{k}$  se mueve en línea recta mientras que el vector de posición relativa  $\mathbf{k}$  describe una trayectoria, en general elíptica, de pulsación  $\omega$  alrededor del centro de masa. El espín con respecto al centro de masa se expresa como  $\mathbf{S}_{CM} = -m\mathbf{k} \times d\mathbf{k}/dt$ , como un momento angular (anti)orbital del movimiento del centro de carga alrededor del centro de masa.

Las variables cinemáticas transforman bajo el grupo de Galileo  $\mathcal{G}$  de la forma:

$$t'(\tau) = t(\tau) + b, \quad (3.25)$$

$$\mathbf{r}'(\tau) = R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{r}(\tau) + \mathbf{v}t(\tau) + \mathbf{a}, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{u}'(\tau) = R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}(\tau) + \mathbf{v}. \quad (3.27)$$

las funciones de onda son funciones complejas sobre  $X$  y por lo tanto, funciones de las variables  $(t, \mathbf{r}, \mathbf{u})$ . Sobre este espacio cinemático, la función gauge es la misma que en (2.41), donde  $m$  define la masa de la partícula. Si tomamos en cuenta la receta de correspondencia desarrollada anteriormente, el Hamiltoniano es  $H \rightarrow i\hbar\partial/\partial t$ , y el momento generalizado  $\mathbf{p}_r \equiv \mathbf{P} \rightarrow -i\hbar\nabla$  y el otro momento generalizado  $\mathbf{p}_u \equiv \mathbf{U} \rightarrow -i\hbar\nabla_u$ . Los generadores de la representación proyectiva están dados por

$$H = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{P} = \frac{\hbar}{i}\nabla, \quad \mathbf{K} = m\mathbf{r} - t\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{\hbar}{i}\nabla_u, \quad (3.28)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \frac{\hbar}{i}\nabla + \mathbf{u} \times \frac{\hbar}{i}\nabla_u = \mathbf{L} + \mathbf{Z}, \quad (3.29)$$

donde  $\nabla$  es el operador gradiente con respecto a las variables generalizadas  $\mathbf{q}_1 \equiv \mathbf{r}$  y  $\nabla_u$  es el operador gradiente con respecto a las variables generalizadas  $\mathbf{q}_2 \equiv \mathbf{u}$ . Conviene resaltar que esta representación de los generadores es independiente de la Lagrangiana particular que hayamos considerado. Solo depende de las variables cinemáticas  $(t, \mathbf{r}, \mathbf{u})$ , y de la función gauge habitual, del grupo de Galileo.

El momento angular con respecto al centro de carga, relacionado con el **Zitterbewegung**,  $\mathbf{Z} = \mathbf{u} \times \mathbf{U}$  y veremos más adelante que cuantiza solamente con valores enteros.

Si definimos  $\mathbf{q} = \mathbf{r} - \mathbf{k} = (\mathbf{K} + \mathbf{P}t)/m$ , satisface las reglas de conmutación con  $\mathbf{P}$ ,

$$[q_i, P_j] = i\hbar \delta_{ij},$$

que resultan ser las reglas canónicas de conmutación entre el momento lineal y la posición de una partícula puntual. Por lo tanto, las reglas canónicas de conmutación entre el momento lineal total y la posición del centro de masa de una partícula con espín, están ya contenidas en las reglas de conmutación del álgebra de Lie extendida del grupo cinemático. Es por eso que el operador

$$\mathbf{q} = \mathbf{r} - \frac{\hbar}{im} \nabla_{\mathbf{u}}, \quad (3.30)$$

puede ser interpretado como el operador de posición del centro de masa. Una discusión general sobre otras definiciones del operador de posición del centro de masa, pueden encontrarse en el libro del autor.

En esta representación, un operador de Casimir es la energía interna  $H - \mathbf{P}^2/2m$ . Vemos que el espín con respecto al centro de masa se define como habitualmente

$$\mathbf{S}_{CM} = \mathbf{J} - \frac{1}{m} \mathbf{K} \times \mathbf{P} = \mathbf{u} \times \mathbf{U} + \mathbf{k} \times \mathbf{P} = \mathbf{u} \times \frac{\hbar}{i} \nabla_{\mathbf{u}} + \frac{\hbar}{im} \nabla_{\mathbf{u}} \times \frac{\hbar}{i} \nabla;$$

que aparece escrito en términos de dos operadores que no conmutan, y que satisface

$$[\mathbf{S}_{CM}, \mathbf{S}_{CM}] = i\hbar \mathbf{S}_{CM}, \quad [\mathbf{J}, \mathbf{S}_{CM}] = i\hbar \mathbf{S}_{CM}, \quad [\mathbf{S}_{CM}, \mathbf{P}] = [\mathbf{S}_{CM}, H] = [\mathbf{S}_{CM}, \mathbf{K}] = 0,$$

es decir, es un operador momento angular, transforma como un vector bajo rotaciones y es invariante bajo traslaciones espaciales y temporales y bajo boosts Galileanos, respectivamente. La segunda parte del operador espín es del orden de  $\hbar^2$  por lo que únicamente produce una corrección a la parte  $\mathbf{Z}$ .

Los operadores  $\mathbf{Z}$  satisfacen las reglas de conmutación

$$[\mathbf{Z}, \mathbf{Z}] = i\hbar \mathbf{Z}, \quad [\mathbf{J}, \mathbf{Z}] = i\hbar \mathbf{Z}, \quad [\mathbf{Z}, \mathbf{P}] = [\mathbf{Z}, H] = 0,$$

$$[\mathbf{Z}, \mathbf{K}] = -i\hbar \mathbf{U} = -\hbar^2 \nabla_{\mathbf{u}},$$

lo que indica que  $\mathbf{Z}$  es un operador momento angular, transforma como un vector bajo rotaciones, es invariante bajo traslaciones espaciales y temporales, pero no lo es bajo los boosts Galileanos. Es un operador de espín, que representa al momento angular con respecto al centro de carga, como se puede deducir de su dinámica.

Vemos pues que, el operador momento angular total  $\mathbf{J}$  se descompone en dos términos que conmutan  $\mathbf{r} \times \mathbf{P}$  y  $\mathbf{Z}$ . Ambos conmutan con  $H$ , pero el primero no es invariante bajo traslaciones. Como los operadores  $\mathbf{Z}$  son operadores de momento angular que únicamente derivan la función de onda con respecto a las variables de velocidad, y en consecuencia conmutan con los operadores  $H$  y  $\mathbf{P}$ , aunque no representan al operador momento angular con respecto del centro de masa, podemos usarlos para encontrar vectores propios comunes a los tres operadores que conmutan  $H - \mathbf{P}^2/2m$ ,  $Z^2$  y  $Z_3$ . Como resulta que los operadores  $\mathbf{Z}$  únicamente afectan a la función de onda en su dependencia en las variables  $\mathbf{u}$ , podemos escoger las funciones de onda con las variables separadas en la forma  $\Phi(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}) = \sum_i \psi_i(t, \mathbf{r}) \chi_i(\mathbf{u})$  de tal manera que

$$(H - \mathbf{P}^2/2m) \psi_i(t, \mathbf{r}) = E \psi_i(t, \mathbf{r}), \quad (3.31)$$

$$Z^2 \chi_i(\mathbf{u}) = z(z+1) \hbar^2 \chi_i(\mathbf{u}), \quad (3.32)$$

$$Z_3 \chi_i(\mathbf{u}) = m_z \hbar \chi_i(\mathbf{u}). \quad (3.33)$$

Cada parte espacio-temporal de la función de onda  $\psi_i(t, \mathbf{r})$ , satisface la ecuación de Schroedinger y está desacoplada de la parte del espín  $\chi(\mathbf{u})$ .

Debido a la estructura de  $Z^2$  en términos de las variables  $\mathbf{u}$ , que resulta ser la misma que la del momento angular orbital de una partícula puntual en términos de las variables de posición  $\mathbf{r}$ , la parte del espín de la función de onda es en realidad de la forma

$$\chi(\mathbf{u}) = f(u)Y_z^{m_z}(\theta, \phi), \quad (3.34)$$

donde  $f(u)$  es una función arbitraria del módulo de  $\mathbf{u}$  y  $Y_z^{m_z}(\theta, \phi)$  son los armónicos esféricos en la dirección  $\theta, \phi$  del vector  $\mathbf{u}$ .

Para el observador del centro de masa,  $\mathbf{S}_{CM} = \mathbf{Z}$  y ambos momentos angulares son el mismo. Pero para un observador arbitrario, los operadores  $\mathbf{Z}$  no conmutan con los generadores de los boosts  $\mathbf{K}$ , por lo que el valor absoluto de  $\mathbf{Z}^2$  no es invariante Galileano, mientras que  $\mathbf{S}_{CM}^2$  sí lo es. De todas formas, la descomposición de la función de onda en una función multicomponente que refleja la estructura de su espín es una propiedad intrínseca que se puede poner de manifiesto en cualquier sistema de referencia.

Cuando la partícula interactúa con un campo electromagnético externo, de acuerdo con el principio atómico su estructura mecánica interna no se modifica por lo que las ecuaciones (3.31-3.33) se deben satisfacer para las partes mecánicas  $H_m = H - e\phi$  y  $\mathbf{P}_m = \mathbf{P} - e\mathbf{A}$ , y para las componentes del espín  $\mathbf{Z}$  que quedan inalteradas, por lo que obtenemos la ecuación habitual del acoplamiento mínimo

$$\left( H - e\phi - \frac{(\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2}{2m} \right) \psi_i(t, \mathbf{r}) = E\psi_i(t, \mathbf{r}), \quad (3.35)$$

donde los generadores  $H$  y  $\mathbf{P}$  tienen la misma representación que en (3.28) por lo que cada parte espacio-temporal  $\psi_i$ , satisface la ecuación de Schroedinger modificada.

En este formalismo, cuando el espín es de naturaleza (anti)orbital, no conduce al cuantizar a espines semienteros. Estos modelos de partículas solamente sirven como modelos de bosones.

### 3.2.2. Partículas no relativistas con espín. Fermiones

Otro ejemplo de partícula no relativista con espín es aquél en el que las variables de orientación son variables cinemáticas y la partícula clásica posee velocidad angular. Un ejemplo de este tipo corresponde al modelo descrito por la Lagrangiana

$$L = \frac{m}{2} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 + \frac{I}{2} \boldsymbol{\omega}^2. \quad (3.36)$$

La partícula libre viaja con velocidad constante y rota con velocidad angular constante. El espín clásico es  $\mathbf{S} = I\boldsymbol{\omega}$ , y el centro de carga y el centro de masa son el mismo punto.

Para describir la orientación de una partícula hagámoslo definiendo tres ejes unidad ortogonales  $\mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  ligados al punto  $\mathbf{r}$ , como formando un sistema cartesiano comóvil, análogamente a como describimos la orientación de un sólido rígido. Si los tomamos inicialmente paralelos a los correspondientes ejes cartesianos del observador inercial, entonces sus nueve componentes nos definen una matriz ortogonal de rotación  $R_{ij}(\boldsymbol{\rho})$  que describe cómo rotar el sistema de referencia inercial para llevarlo a coincidencia con los ejes del cuerpo. Describe por lo tanto la evolución de esta triada, con la condición inicial  $R_{ij}(t = 0) = \delta_{ij}$ .

Las variables cinemáticas  $t$ ,  $\mathbf{r}$  y  $\boldsymbol{\rho}$  transforman bajo  $\mathcal{G}$  en la forma

$$t'(\tau) = t(\tau) + b, \quad (3.37)$$

$$\mathbf{r}'(\tau) = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{r}(\tau) + \mathbf{v}t(\tau) + \mathbf{a}, \quad (3.38)$$

$$\boldsymbol{\rho}'(\tau) = \frac{\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\rho}(\tau) + \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\rho}(\tau)}{1 - \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\rho}(\tau)}. \quad (3.39)$$

Sobre el correspondiente espacio de Hilbert, los generadores Galileanos están dados por:

$$H = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{P} = \frac{\hbar}{i} \nabla, \quad \mathbf{K} = m\mathbf{r} - t \frac{\hbar}{i} \nabla, \quad (3.40)$$

$$\mathbf{J} = \frac{\hbar}{i} \mathbf{r} \times \nabla + \frac{\hbar}{2i} \{ \nabla_\rho + \boldsymbol{\rho} \times \nabla_\rho + \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_\rho) \} = \mathbf{L} + \mathbf{W}, \quad (3.41)$$

donde  $\nabla_\rho$  representa al operador gradiente con respecto a las variables  $\boldsymbol{\rho}$  y en la parametrización  $\boldsymbol{\rho}$  del grupo de rotaciones.

La parte  $\mathbf{W}$  resulta del análisis general del grupo. Los generadores del grupo en esta parametrización  $X_i$  se obtienen a partir de (3.39) y de acuerdo con (1.48) y (1.50). Se obtiene como

$$X_i = \left( \frac{\partial \rho'^k}{\partial \mu^i} \right) \Big|_{\mu=0} \frac{\partial}{\partial \rho^k},$$

que escritos en notación vectorial

$$\mathbf{X} = \nabla_\rho + \boldsymbol{\rho} \times \nabla_\rho + \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_\rho)$$

Satisfacen las reglas de conmutación

$$[X_i, X_k] = -2\epsilon_{ikl} X_l$$

y por lo tanto los operadores  $W_k = \frac{\hbar}{2i} X_k$ , que en notación vectorial aparecen como

$$\mathbf{W} = \frac{\hbar}{2i} \{ \nabla_\rho + \boldsymbol{\rho} \times \nabla_\rho + \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_\rho) \}, \quad (3.42)$$

satisfacen las reglas de conmutación del momento angular

$$[\mathbf{W}, \mathbf{W}] = i\hbar \mathbf{W}. \quad (3.43)$$

De esta manera, como  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{W}$  conmutan entre sí, obtenemos que  $[\mathbf{J}, \mathbf{J}] = i\hbar \mathbf{J}$ .

En este ejemplo, el centro de masa y el centro de carga son el mismo punto,  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$  es el momento angular orbital del movimiento del centro de masa y  $\mathbf{W} \equiv \mathbf{S}$  es el operador espín, tanto con respecto al centro de masa como al centro de carga. El operador espín conmuta con  $H$ ,  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{K}$  por lo que la función de onda puede escribirse en variables separadas como  $\Phi(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = \sum_i \psi_i(t, \mathbf{r}) \chi_i(\boldsymbol{\rho})$  lo que nos lleva a las ecuaciones de valores propios

$$(H - \mathbf{P}^2/2m)\psi_i(t, \mathbf{r}) = E\psi_i(t, \mathbf{r}), \quad (3.44)$$

$$S^2 \chi_i(\boldsymbol{\rho}) = s(s+1)\hbar^2 \chi_i(\boldsymbol{\rho}), \quad (3.45)$$

$$S_3 \chi_i(\boldsymbol{\rho}) = m_s \hbar \chi_i(\boldsymbol{\rho}). \quad (3.46)$$

Bopp y Haag<sup>5</sup> encontraron soluciones con  $s = 1/2$  para el sistema de ecuaciones (3.45) y (3.46). Estas soluciones reciben el nombre de funciones de Wigner<sup>6</sup>. Las soluciones de (3.45) para cualquier valor de  $s$  no son más que una combinación lineal de las componentes de la representación irreducible matricial de dimensión  $(2s+1) \times (2s+1)$ , del grupo de rotaciones, resultado que se obtiene a partir del teorema de Peter-Weyl sobre representaciones finitas de

<sup>5</sup> F. Bopp and R. Haag, Über die möglichkeit von spinmodellen, *Z. Naturforschg.* 5a, 644 (1950).

<sup>6</sup> L.C. Biedenharn and J.D. Louck, *Angular Momentum in Quantum Physics. Theory and Application*, Cambridge U. P., Cambridge, England (1989).

grupos compactos <sup>7,8,9</sup>. Analizaremos las soluciones correspondientes a las funciones de onda de  $s = 1/2$  en la Sección 3.5 del Apéndice, donde se van a obtener de forma explícita además de analizar una introducción al teorema de Peter-Weyl.

Para describir fermiones, las partículas clásicas deben necesariamente tener como variables cinemáticas, variables compactas del tipo de orientación. En caso contrario no es posible obtener una descripción de objetos de espín  $1/2$  si solamente el espín está asociado con el zitterbewegung. Las partículas de espín  $1/2$ , desde el punto de vista clásico, poseen orientación y por lo tanto rotan.

### 3.3. Cuantización del fotón

Si tomamos el eje  $OZ$  como la línea que describe el punto donde está localizado el fotón, las variables cinemáticas se reducen a  $(t, z, \alpha)$ , siendo  $\alpha$  la orientación de un triedro uno de cuyos ejes es la propia dirección del movimiento  $OZ$  y  $\alpha$  representa el ángulo girado por el triedro en su desplazamiento y rotación. La Lagrangiana que describe de forma clásica a un fotón de momento angular  $S$  y helicidad  $\epsilon = \pm 1$ , es según la sección **2.5.1**

$$\tilde{L} = \epsilon S \frac{\dot{z}\dot{\alpha}}{ct}.$$

Las constantes del movimiento Noetherianas son

$$H = -\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{t}} = \epsilon S \omega, \quad P_z = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{z}} = \epsilon S \omega / c = \epsilon S k, \quad S_z = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\alpha}} = \epsilon S,$$

con  $\omega = d\alpha/dt$  la velocidad angular de la partícula,  $k = \omega/c$  el número de onda. Para el fotón  $\epsilon\omega > 0$  y  $\epsilon\omega < 0$  para el antifotón. De esta forma  $H > 0$  y  $P_z > 0$  para el fotón y negativos para el antifotón. Si de acuerdo con Planck esta partícula representa un cuanto de energía electromagnética, tiene que tener una energía de valor  $h\nu$ , siendo  $\nu$  la frecuencia de la radiación, que si la identificamos con la frecuencia angular de la partícula, resulta  $H = S2\pi\nu = h\nu$ , por lo que el valor  $S = \hbar$ . Desde el punto de vista cuántico el espín  $S_z$  solamente puede tomar los valores enteros  $\pm\hbar$ , por lo que se trata de un bosón. Si el espín no tomara esos valores, tampoco la energía de un fotón sería  $\hbar\omega = h\nu$ . Para singularizar una solución entre los valores extremos de las variables cinemáticas no basta fijar  $t_1, z_1, \alpha_1$  con  $0 \leq \alpha_1 \leq 2\pi$  y lo mismo en el punto 2, sino que hay que indicar el número completo  $n$  de vueltas que la partícula ha dado, de tal manera que la fase final se exprese como  $2\pi n + \alpha_2$ , con  $0 \leq \alpha_2 \leq 2\pi$ . De esta forma

$$\omega = \frac{2\pi n + \alpha_2 - \alpha_1}{t_2 - t_1}, \quad z_2 - z_1 = c(t_2 - t_1).$$

En el caso cuántico, los generadores autoadjuntos de las traslaciones y rotaciones son

$$H = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad P_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}, \quad S_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \alpha}.$$

La función de onda que describe los estados del fotón será una función de cuadrado integrable  $\psi(t, z, \alpha)$ , que al ser vector propio de esos tres generadores que conmutan se puede tomar en variables separadas,

$$\psi(t, z, \alpha) = e^{-i\epsilon\omega t} e^{i\epsilon k z} e^{i\epsilon\alpha} = \exp(-i\epsilon(\omega t - kz - \alpha)),$$

<sup>7</sup> A.R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Princeton U. P., Princeton NJ (1957).

<sup>8</sup> N. Ja. Vilenkin, *Fonctions spéciales et Théorie de la représentation des groups*, Dunod, Paris (1969).

<sup>9</sup> A.O. Barut and R. Raczka, *Theory of group representations and applications*, PWN, Warszawa (1980).

que es vector propio de los anteriores generadores con los correspondientes valores propios. Se corresponde con la descripción dada en (3.48) una vez que los dos estados de espín se han reemplazado por las dos componentes del vector columna. La identificación de los dos estados de polarización corresponde a

$$e^{i\alpha} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^{-i\alpha} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En esta base la representación del operador del espín se reduce a

$$S_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Estos dos estados básicos corresponden a fotones de un haz de luz polarizada circular a derechas e izquierdas, respectivamente. Si incluyéramos los estados del antifotón entonces el vector columna sería de cuatro componentes.

De esta forma un fotón polarizado será una combinación lineal

$$\psi(t, z) = e^{i(kz - \omega t)} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

con lo que aparece como una onda plana que viaja en el sentido positivo del eje  $OZ$ . La función acción entre dos estados inicial y final, toma la forma

$$A(x_1, x_2) = \epsilon \hbar \frac{(z_2 - z_1)(2\pi n + \alpha_2 - \alpha_1)}{c(t_2 - t_1)} = \epsilon \hbar (2\pi n + \alpha_2 - \alpha_1) = \epsilon \hbar \omega (t_2 - t_1),$$

si es que tenemos presente que  $(z_2 - z_1)/(t_2 - t_1) = c$ . En unidades de  $\hbar$  la función acción es la fase de la función de onda o estado del fotón de acuerdo con Feynman.

Como los valores de  $H$ ,  $P_z$  y  $S_z$  están definidos de forma precisa en estos estados que son vectores propios de ellos, las variables conjugadas poseen una gran dispersión. En efecto, como los conmutadores  $[t, H] = -i\hbar$ ,  $[z, P_z] = i\hbar$ ,  $[\alpha, S_z] = i\hbar$ , resulta

$$\Delta t \Delta H \geq |[t, H]| = \hbar, \quad \Delta z \Delta P_z \geq |[z, P_z]| = \hbar, \quad \Delta \alpha \Delta S_z \geq |[\alpha, S_z]| = \hbar,$$

es decir que no sabemos donde se encuentra el fotón ni cual es su fase.

La medida para definir el producto escalar a  $t$  constante puede ser

$$\langle \psi | \phi \rangle = \frac{1}{(z_2 - z_1)(2\pi n + \alpha_2 - \alpha_1)} \int_{z_1}^{z_2} \int_{\alpha_1}^{2\pi n + \alpha_2} \psi^* \phi \, dz d\alpha,$$

extendida a todo el rango de las variables cinemáticas en esta evolución. Así, el valor esperado de la posición en uno de estos estados es

$$\langle z \rangle = \langle \psi | z | \psi \rangle = \frac{1}{(z_2 - z_1)(2\pi n + \alpha_2 - \alpha_1)} \int_{z_1}^{z_2} \int_{\alpha_1}^{2\pi n + \alpha_2} z \, dz d\alpha = \frac{1}{2}(z_1 + z_2),$$

en el punto medio de la trayectoria, y su dispersión

$$(\Delta z)^2 = \langle (z - \langle z \rangle)^2 \rangle = \frac{1}{3}(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2) - \frac{1}{4}(z_1 + z_2)^2 = \frac{1}{12}(z_2 - z_1)^2.$$

La incertidumbre  $\Delta z = (z_2 - z_1)/3.46$ , por lo que la probabilidad de encontrar al fotón en el rango alrededor del punto medio  $\pm \Delta z$ , es del 68 %.



### 3.4. Apéndice: Estados de polarización de la luz

Hemos visto que la parte interna que describe los estados de espín del fotón forma un espacio de Hilbert bidimensional  $\mathbb{C}^2$ . Por lo tanto cualquier estado puro viene descrito por el conocimiento de un vector  $|\Phi\rangle \in \mathbb{C}^2$  de norma unidad,  $\langle \Phi|\Phi\rangle = 1$ . Los estados no puros, o mezclas estocásticas, vendrán caracterizados por operadores densidad  $\rho$ , es decir operadores autoadjuntos sobre  $\mathbb{C}^2$  de traza uno y por lo tanto se caracterizarán mediante matrices hermiticas  $2 \times 2$  de traza unidad.

El conjunto de matrices hermiticas  $2 \times 2$  es un espacio vectorial real de cuatro dimensiones, una base del mismo puede venir dada por las cuatro matrices:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

por lo que toda matriz hermitica se puede expresar en la forma  $\rho = a^\mu \sigma_\mu$  con  $a^\mu \in \mathbb{R}$ , cuatro números reales. La condición de que  $\rho$  caracterice a un estado es que sea de traza uno, lo que nos lleva a que  $a^0 = 1/2$ . Si  $\rho$  es un estado puro, también denominado estado vectorial, entonces  $\rho = |\Phi\rangle\langle\Phi|$  en términos del vector estado  $|\Phi\rangle$ , por lo que resulta ser un proyector. Los estados puros vienen caracterizados por la condición de que  $\rho^2 = \rho$ , de donde resulta que  $\text{Tr}\rho^2 = \text{Tr}\rho = 1$ , en tanto que en general para un estado arbitrario la  $\text{Tr}\rho^2 \leq \text{Tr}\rho = 1$ .

Esta condición, teniendo presente que  $\text{Tr}\sigma_\mu\sigma_\nu = 2\delta_{\mu\nu}$ , nos lleva a que  $2(a^0)^2 + 2\mathbf{a}^2 \leq 1$ , y como  $a^0 = 1/2$ ,  $\mathbf{a}^2 \leq 1/4$ , por lo que podemos caracterizar todo estado cuántico de este sistema mediante un vector tridimensional real  $\mathbf{a}$ , de norma igual o menor que  $1/2$ , siendo igual a  $1/2$  en el caso de que el estado sea puro. Los estados de este sistema vendrán dados por los puntos de una esfera en  $\mathbb{R}^3$  de radio  $1/2$ , denominada **esfera de Poincaré**, siendo los puntos de la superficie los estados puros, en tanto que los del interior representan a los estados mezcla. Vemos que el conjunto de estados es un conjunto convexo, de tal manera que todo estado mezcla se puede construir como una combinación lineal convexa de estados puros.

Este tipo de descripción es general para sistemas cuánticos con dos estados internos. Aquí, puede formar parte por ejemplo, de un sistema cuántico que describa fotones polarizados, cuyo espacio de Hilbert lo podemos realizar como  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$ , donde los dos posibles estados de polarización vienen descritos por la parte  $\mathbb{C}^2$  del espacio de Hilbert. Supongamos que en el instante  $t$  tenemos dado el vector  $|\Psi\rangle$ :

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \exp(i(kz - \omega t)) \quad (3.48)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son dos complejos tales que  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ , el cual es vector propio del operador  $H = i\hbar\partial/\partial t$  con valor propio  $\hbar\omega$ , y del operador  $\mathbf{P} = -i\hbar\nabla$  con valor propio  $(0, 0, \hbar k)$ . Si escribimos  $\alpha = a \exp(i\delta_a)$  y  $\beta = b \exp(i\delta_b)$  y convenimos en representar el estado de tal manera que saquemos fuera la fase de la primera componente, para que ésta sea real, entonces,

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \exp(i(kz - \omega t)) = \begin{pmatrix} a \\ be^{i\delta} \end{pmatrix} \exp(i(kz - \omega t + \delta_a)) \quad (3.49)$$

siendo  $\delta = \delta_b - \delta_a$ .

El proyector que caracteriza este estado es el  $|\Psi\rangle\langle\Psi|$  que viene dado en la forma:

$$|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} a^2 & abe^{-i\delta} \\ abe^{i\delta} & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^0 + a^3 & a^1 - ia^2 \\ a^1 + ia^2 & a^0 - a^3 \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

por lo que el tetravector a que da lugar es el:

$$[(a^2 + b^2)/2, ab \cos \delta, ab \sin \delta, (a^2 - b^2)/2], \quad 2a^0 \equiv a^2 + b^2 = 1. \quad (3.51)$$

En términos del vector tridimensional  $\mathbf{a}$ , los diferentes estados puros vienen dados por la superficie de la esfera de radio  $1/2$  de la figura, en tanto que los puntos del interior representan estados mezcla.

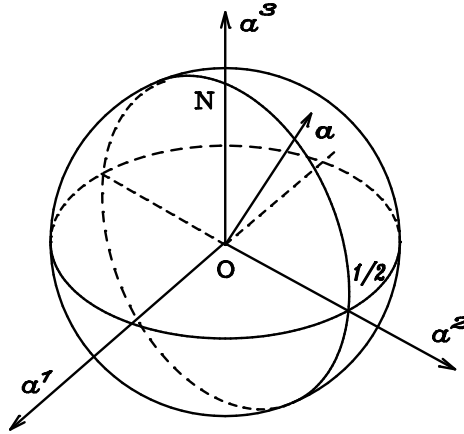


Figura 3.2: Esfera de Poincaré que representa los diferentes estados de polarización de la luz. La superficie de la esfera representa a los estados puros o estados vectoriales, mientras que los puntos del interior representan a los estados mezcla que vienen representados por operadores densidad  $\rho$ . La esfera es un espacio convexo.

En particular los estados ortogonales  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  dan lugar a sendos operadores de proyección  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  los cuales vienen caracterizados por los vectores  $\mathbf{a}$  y  $-\mathbf{a}$ , siendo  $\mathbf{a} \equiv (0, 0, 1/2)$ , es decir por los dos polos Norte y Sur de la esfera de Poincaré de la figura.

Si  $E_a$  y  $E_b$  son dos proyectores caracterizados por sendos vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  y representan estados ortogonales, entonces  $E_a E_b = 0$ . En términos de las matrices de Pauli  $E_a E_b = a^\mu b^\nu \sigma_\mu \sigma_\nu = 0$ , y tomando trazas, sabiendo que  $a^0 = b^0 = 1/2$ , nos queda  $(1/4 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = 0$ , y que como  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son a su vez de módulo  $1/2$ , la solución es  $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$ . Estados ortogonales vienen dados por puntos opuestos de la esfera de estados, y tomados por pares caracterizan por lo tanto a todas las posibles bases ortonormales de  $\mathbb{C}^2$ . Significa esto que cualquier otro estado puro se obtendrá como superposición coherente de dos de estos estados ortogonales, y que cualquier otro estado no puro, mediante combinaciones lineales convexas de estados puros.

### 3.4.1. Parámetros de Stokes

La descripción anterior de los estados de polarización en términos del tetravector  $a^\mu$  es equivalente a la que realiza Stokes (1852). Si tenemos una onda polarizada de forma elíptica en la que los campos sean

$$E_x = a \cos(kz - \omega t), \quad E_y = b \cos(kz - \omega t + \delta),$$

el campo describe en el plano  $XOY$  una elipse inscrita en un rectángulo de lados  $2a$  y  $2b$ .<sup>10</sup> Los puntos de contacto de la elipse con el rectángulo exterior son  $A, A' \equiv (\pm a, \pm b \cos \delta)$  y  $B, B' \equiv (\pm a \cos \delta, \pm b)$ . Los parámetros de Stokes son

$$s_0 = a^2 + b^2, \quad s_1 = a^2 - b^2, \quad s_2 = 2ab \cos \delta, \quad s_3 = 2ab \sin \delta,$$

<sup>10</sup>M. Born and E. Wolf, Principles of Optics, Cambridge Univ. Press, (1993), ch.1

que no son independientes pues  $s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$  y donde  $s_0$  representa la intensidad de la onda electromagnética. Comparados con la descripción anterior  $s_0 = 2a^0$ ,  $s_1 = 2a^3$ ,  $s_2 = 2a^1$  y  $s_3 = 2a^2$ . El radio de la esfera de Poincaré en este caso no vale  $1/2$  sino que vale  $s_0$ . Los polos  $N$  y  $S$  representan luz polarizada circular derecha e izquierda, respectivamente. Podríamos

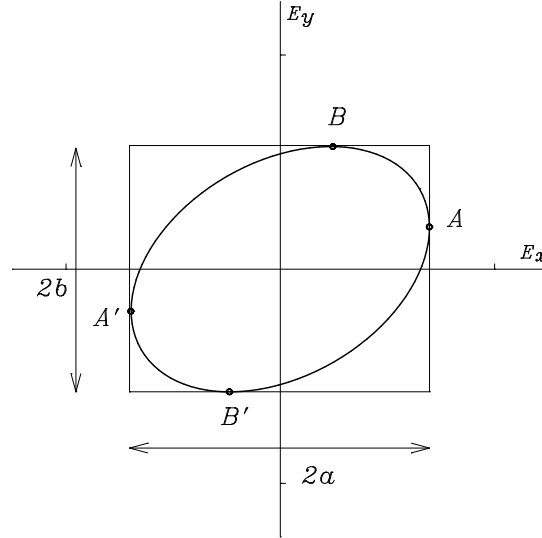


Figura 3.3: Campo eléctrico de una onda polarizada de forma elíptica.

interpretar la descripción cuántica del fotón de tal manera que la parte real de una función de onda no normalizada representara la parte transversal del campo eléctrico instantáneo asociado al fotón. La normalización de la función de onda se interpretaría como la densidad de energía del fotón. Los diferentes estados de polarización elíptica se corresponden con los estados puros de la descripción cuántica.

### 3.4.2. Superposición coherente

Si tenemos dos estados puros, y por lo tanto vectoriales,  $|\Phi\rangle$  y  $|\Psi\rangle$ , el vector  $\alpha|\Phi\rangle + \beta|\Psi\rangle$  una vez normalizado, representará otro estado puro y se dice que es la superposición coherente de ambos. En este caso lo que admitimos es que la fase relativa con que se superponen ambos estados es importante.

Supongamos por sencillez que nos estamos refiriendo básicamente a los dos estados polares  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(i(kz - \omega t))$  y  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(i(kz - \omega t))$ , y que  $\alpha$  y  $\beta$  los tomamos en principio reales con  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ . Entonces el vector estado a que dan lugar es el  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \exp(i(kz - \omega t))$  y como proyector el  $\begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{pmatrix}$  que viene representado en la esfera por el vector  $[\alpha\beta, 0, (\alpha^2 - \beta^2)/2]$  y por lo tanto en el meridiano que está en el plano  $XOZ$  por el punto  $P$  representado en la figura 3.4 siendo  $NP = \beta$  y  $PS = \alpha$ .

En efecto,  $a^3 = (\alpha^2 - \beta^2)/2 = 1/2 - \beta^2 = \alpha^2 - 1/2$ , y por lo tanto las distancias del punto  $P$  a los planos tangentes a los polos son iguales a  $\beta^2$  y  $\alpha^2$  respectivamente. Si  $\alpha = \beta$ , el punto representativo estará sobre el ecuador. Estos valores  $\alpha^2$  y  $\beta^2$  son las probabilidades de que el estado sea el  $N$  o el  $S$ , o bien las proporciones que de los estados  $N$  y  $S$  utilizamos para construir su superposición.

Si  $\alpha$  y  $\beta$  son en general complejos, una vez extraída la fase de  $\alpha$ , que lo supondremos en adelante real, el estado se reduce a (3.50) y (3.51), con lo que aquella superposición coherente

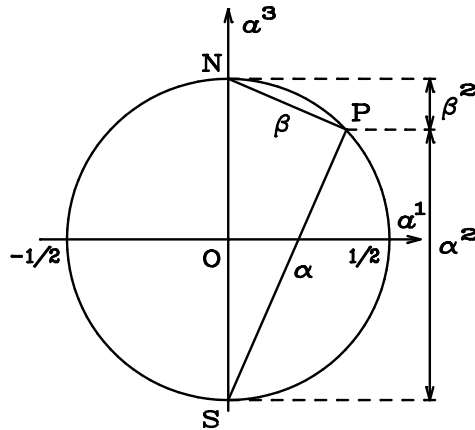


Figura 3.4: El punto  $P$  representa la superposición coherente de los estados  $N$  y  $S$  con coeficientes reales  $\alpha$  y  $\beta$ .

con los mismos  $a$  y  $b$  y diferentes  $\delta$ , nos produce todos los puntos de un mismo paralelo. Además  $\delta$  es el ángulo acimutal y el giro es en el sentido positivo (horario) alrededor de un eje que va del segundo estado al primero.

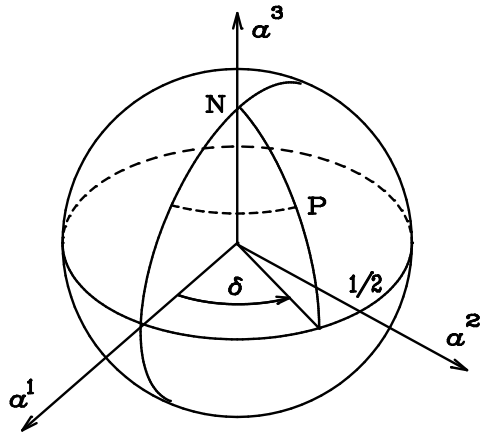


Figura 3.5: El punto  $P$  es la superposición coherente de  $N$  y  $S$  con coeficientes  $a$  y  $be^{i\delta}$ .

La situación es totalmente simétrica si la superposición la efectuamos a partir de dos estados arbitrarios ortogonales. Tenemos sobre la esfera dos puntos opuestos. A continuación determinamos la superposición con  $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$ , la cual nos determina la posición del meridiano cero. A partir de ahí giraremos en sentido positivo el ángulo  $\delta$ , y el paralelo correspondiente dependerá de los valores  $a$  y  $b$ .

Por lo tanto la superposición coherente es una aplicación definida sobre la superficie de la esfera, tal que a cada par de puntos opuestos, y dados los correspondientes números  $a$  y  $be^{i\delta}$ , les corresponde otro punto de la superficie, construido de la forma anteriormente señalada.

### 3.4.3. Superposición incoherente

Sean  $|\Phi_1\rangle$  y  $|\Phi_2\rangle$  dos estados puros ortogonales, caracterizados por los proyectores  $E_1$  y  $E_2$ , y por los vectores reales  $\mathbf{a}$  y  $-\mathbf{a}$ . Si definimos el estado  $\rho = \alpha E_1 + (1 - \alpha)E_2$ , con  $0 < \alpha < 1$ , representa una superposición que decimos es incoherente, de ambos estados en las proporciones  $\alpha$  y  $1 - \alpha$ . En esta representación, el vector que lo caracteriza es el  $\alpha\mathbf{a} - (1 - \alpha)\mathbf{a} = (2\alpha - 1)\mathbf{a}$ . El punto característico en la figura 3.6, está por lo tanto en la línea de unión de los dos estados puros, de tal forma que  $PA = (1 - \alpha)$  y  $PB = \alpha$ . Es por lo tanto el centro de masa de dos masas  $\alpha$  y  $(1 - \alpha)$  situadas en  $A$  y  $B$  respectivamente.

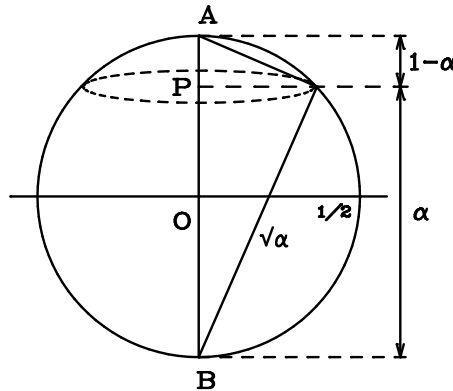


Figura 3.6: El punto  $P$  es la superposición incoherente de los estados puros  $A$  y  $B$  en las proporciones  $\alpha$  y  $1 - \alpha$ , respectivamente.

Podemos interpretar la superposición incoherente como el centro de masa de todas las posibles superposiciones coherentes en las mismas proporciones de  $A$  y  $B$ , en las que la fase relativa  $\delta$  se deja libre. En este caso obtendríamos todos los posibles estados del paralelo que dista de los planos polares  $(1 - \alpha)$  y  $\alpha$  respectivamente.

Si  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$  son  $k$  estados puros, y por lo tanto representados por sendos puntos de la superficie de la esfera de estados, y  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ ,  $0 \leq \alpha_i \leq 1$  tal que  $\sum \alpha_i = 1$ , entonces  $\rho = \sum \alpha_i \rho_i$  se dice que es la mezcla incoherente, con pesos  $\alpha_i$  de los  $k$  estados puros  $\rho_i$ . Su punto representativo vendrá dado por el baricentro de los correspondientes puntos  $\rho_i$  en los que se ha supuesto colocado un peso de valor  $\alpha_i$ . Los estados puros son los únicos que no pueden expresarse como combinación lineal convexa de otros estados puros.

La superposición incoherente se convierte así en la combinación lineal convexa de vectores de  $\mathbb{R}^3$ , pertenecientes a la superficie de la esfera de radio  $1/2$ .

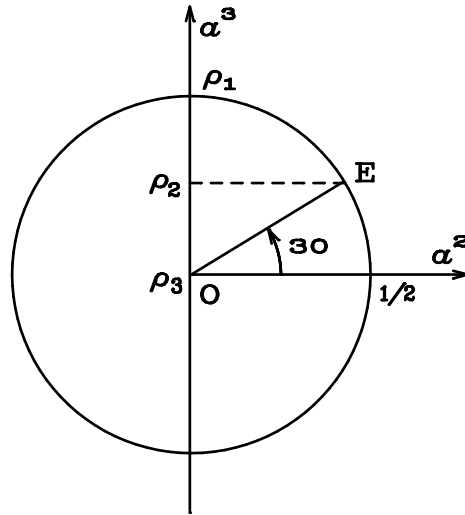
### 3.4.4. Filtros

Son observables tales que si el sistema está en un estado cualquiera lo proyectan en un posible estado puro. Vienen representados por proyectores y se caracterizan por el proyector correspondiente sobre el estado que filtran. Si el estado inicial del sistema es  $\rho$ , entonces la medida de  $E$  en el estado  $\rho$  viene dada por  $\langle E \rangle = \text{Tr} \rho E$ , en tanto que el nuevo estado en el que queda el fotón después de la medida, es el  $\rho' = E \rho E / \text{Tr}(\rho E)$ . Por ejemplo supongamos que  $\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  y sea  $E$  el proyector sobre el estado dado por el vector  $\mathbf{a}$  de componentes

$[0, \sqrt{3}/4, 1/4]$ , es decir  $E = \begin{pmatrix} 3/4 & -\sqrt{3}i/4 \\ \sqrt{3}i/4 & 1/4 \end{pmatrix}$ . El valor esperado de  $E$  en el estado  $\rho_1$  vale  $3/4$ , que es precisamente la proporción en que el estado  $E$  se compone a partir de  $\rho_1$  y de su estado ortogonal. Después de su medida, el estado en que queda el sistema es:

$$\rho' = E\rho_1 E / \text{Tr}(\rho_1 E) = (4/3)E\rho_1 E = \begin{pmatrix} 3/4 & -\sqrt{3}i/4 \\ \sqrt{3}i/4 & 1/4 \end{pmatrix} = E$$

es decir el propio  $E$ .



Desde el punto de vista vectorial por ser el estado puro,  $|\rho_1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  por lo que el valor esperado  $\langle E; \rho_1 \rangle = \langle \rho_1 | E \rho_1 \rangle = 3/4$  y el estado final del sistema será el  $|\rho'_1\rangle = E|\rho_1\rangle / \|E|\rho_1\rangle\| = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ i/2 \end{pmatrix}$  que resulta ser precisamente el propio estado  $E$ , pues  $|\rho'_1\rangle \langle \rho'_1| = E$ .

Si el estado inicial no es puro, por ejemplo  $\rho_2 = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ , que corresponde a una superposición incoherente de  $3/4$  del  $\rho_1$  anterior y  $1/4$  de su complementario ortogonal, entonces  $\langle E; \rho_2 \rangle = \text{Tr} \rho_2 E = 5/8$ , es decir aquella parte de  $\rho_2$  que se proyecta en  $E$ , y el estado final  $\rho'_2$  resulta ser el propio estado  $E$ .

Si el estado inicial es un estado totalmente incoherente, como el dado por el operador densidad  $\rho_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ , representado por el punto  $O$ , entonces  $\langle E; \rho_3 \rangle = 1/2$ , ya que dicho estado incoherente también se puede formar a partir de  $E$  y de su complementario ortogonal al 50 %.

### 3.5. Apéndice: Espinores

En esta sección de contenido puramente matemático, revisaremos las propiedades principales de los espinores, en particular las relacionadas con las posibles representaciones del grupo de rotaciones que describen objetos de espín  $1/2$ . Vamos a encontrar estas representaciones a partir de funciones propias de los diferentes operadores de espín que conmutan. Pero conviene resaltar que además de tener operadores de espín referidos al sistema de referencia del observador inercial, u observador del laboratorio, también tenemos operadores de espín referidos a los ejes ligados a la partícula, ya que, en general, las partículas que analizamos poseen orientación como variables cinemáticas y por lo tanto podemos asignarles un triedro cartesiano comóvil, que rota. Esto nos va a producir el resultado de que una partícula de espín  $1/2$ , su función de onda, necesariamente, posee cuatro componentes.

Todos los cálculos de este apéndice resultan abrumadores si se tratan de hacer a mano, por lo que el uso de un programa de cálculo algebraico facilita la tarea. Son muchas las derivadas e integrales de funciones complejas que hay que realizar para determinar productos escalares y representaciones matriciales de los diferentes operadores. En mi página web el fichero <http://tp.lc.ehu.es/documents/SpinorsNotesBilbao.nb>, es un notebook del programa Mathematica<sup>11</sup> en el que se recogen los cálculos de este apéndice.

La función de onda más general de una partícula elemental es una función compleja de las diez variables cinemáticas,  $\Phi(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ , y la parte del espín está ligada con la dependencia de las variables invariantes por traslación  $\mathbf{u}$  y  $\boldsymbol{\rho}$  y viene dado por el operador

$$\mathbf{S} = \mathbf{u} \times \mathbf{U} + \mathbf{W} = \mathbf{Z} + \mathbf{W}, \quad (3.52)$$

donde  $\mathbf{Z}$  y  $\mathbf{W}$  están dados por los operadores

$$\mathbf{Z} = \mathbf{u} \times \frac{\hbar}{i} \nabla_{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{W} = \frac{\hbar}{2i} \{ \nabla_{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\rho} \times \nabla_{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\rho}}) \}. \quad (3.53)$$

Éstos últimos se expresan en la representación  $\tan(\alpha/2)$  del grupo de rotaciones, como se ha expresado en las secciones anteriores.  $\nabla_{\mathbf{u}}$  y  $\nabla_{\boldsymbol{\rho}}$  son respectivamente, los operadores gradiente con respecto a las variables  $\mathbf{u}$  y  $\boldsymbol{\rho}$ . Estos operadores conmutan entre sí y conmutan con los operadores  $H = i\hbar\partial/\partial t$  y  $\mathbf{P} = -i\hbar\nabla$ . Son por lo tanto operadores invariantes por traslación. Esta característica nos permite separar la función de onda más general en términos de funciones de variables espacio-temporales y de funciones de las variables velocidad-orientación, donde estas últimas nos describirán las propiedades invariantes por traslación de la partícula.

Los operadores de espín satisfacen las reglas de conmutación

$$[\mathbf{Z}, \mathbf{Z}] = i\hbar\mathbf{Z}, \quad [\mathbf{W}, \mathbf{W}] = i\hbar\mathbf{W}, \quad [\mathbf{Z}, \mathbf{W}] = 0, \quad (3.54)$$

y por lo tanto

$$[\mathbf{S}, \mathbf{S}] = i\hbar\mathbf{S}.$$

#### 3.5.1. Vectores unidad

Como estamos describiendo la orientación de la partícula colocando un conjunto de tres vectores unidad ortogonales  $\mathbf{e}_i$ , cuya orientación espacial viene dada en términos de las variables  $\boldsymbol{\rho}$  o  $\boldsymbol{\alpha}$ , entonces, si escogemos que en el instante inicial  $\tau = 0$ , estos ejes coincidan con los del laboratorio, las componentes de los vectores  $\mathbf{e}_i$  en cualquier instante, vienen dados por

$$(\mathbf{e}_i)_j = R_{ji}(\boldsymbol{\alpha}) = \delta_{ji} \cos \alpha + n_j n_i (1 - \cos \alpha) - \epsilon_{jik} n_k \sin \alpha, \quad (3.55)$$

<sup>11</sup> *Mathematica*, es un programa de cálculo registrado por Wolfram Research Inc. 100 Trade Center Drive, Champaign, IL 61820-7237, USA.

en la parametrización normal, y en la parametrización  $\boldsymbol{\rho}$  por

$$(\mathbf{e}_i)_j = R_{ji}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{1 + \rho^2} ((1 - \rho^2)\delta_{ji} + 2\rho_j\rho_i - 2\epsilon_{jik}\rho_k). \quad (3.56)$$

Las componentes cartesianas del vector unidad que define el eje de rotación  $\mathbf{n}$  son:

$$n_1 = \sin\theta \cos\phi, \quad n_2 = \sin\theta \sin\phi, \quad n_3 = \cos\theta, \quad (3.57)$$

donde  $\theta$  es el ángulo polar y  $\phi$  es el ángulo acimutal. Explícitamente:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \cos\alpha + \sin^2\theta \cos^2\phi(1 - \cos\alpha), \\ e_{12} &= \cos\theta \sin\alpha + \sin^2\theta \sin\phi \cos\phi(1 - \cos\alpha), \\ e_{13} &= -\sin\theta \sin\phi \sin\alpha + \sin\theta \cos\theta \cos\phi(1 - \cos\alpha), \\ \\ e_{21} &= -\cos\theta \sin\alpha + \sin^2\theta \sin\phi \cos\phi(1 - \cos\alpha), \\ e_{22} &= \cos\alpha + \sin^2\theta \sin^2\phi(1 - \cos\alpha), \\ e_{23} &= \sin\theta \cos\phi \sin\alpha + \sin\theta \cos\theta \sin\phi(1 - \cos\alpha), \\ \\ e_{31} &= \sin\theta \sin\phi \sin\alpha + \sin\theta \cos\theta \cos\phi(1 - \cos\alpha), \\ e_{32} &= -\sin\theta \cos\phi \sin\alpha + \sin\theta \cos\theta \sin\phi(1 - \cos\alpha), \\ e_{33} &= \cos\alpha + \cos^2\theta(1 - \cos\alpha), \end{aligned}$$

en la representación normal  $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{n}$ , o parametrización normal del grupo de rotaciones. En la parametrización  $\boldsymbol{\rho} = \tan(\alpha/2)\mathbf{n}$ , resulta ser

$$\begin{aligned} e_{11} &= (1 + \rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_3^2)/(1 + \rho^2), \\ e_{12} &= (2\rho_1\rho_2 + 2\rho_3)/(1 + \rho^2), \\ e_{13} &= (2\rho_1\rho_3 - 2\rho_2)/(1 + \rho^2), \\ \\ e_{21} &= (2\rho_2\rho_1 - 2\rho_3)/(1 + \rho^2), \\ e_{22} &= (1 - \rho_1^2 + \rho_2^2 - \rho_3^2)/(1 + \rho^2), \\ e_{23} &= (2\rho_2\rho_3 + 2\rho_1)/(1 + \rho^2), \\ \\ e_{31} &= (2\rho_1\rho_3 + 2\rho_2)/(1 + \rho^2), \\ e_{32} &= (2\rho_3\rho_2 - 2\rho_1)/(1 + \rho^2), \\ e_{33} &= (1 - \rho_1^2 - \rho_2^2 + \rho_3^2)/(1 + \rho^2), \end{aligned}$$

donde  $\rho^2 \equiv \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 = \tan^2(\alpha/2)$ .

### 3.5.2. Proyección del espín en los vectores unidad

Además de los operadores que definen las diferentes componentes del espín  $S_i$ ,  $Z_i$  y  $W_i$  en el sistema de referencia del laboratorio, podemos encontrar otro conjunto de operadores de espín. Éstos son las proyecciones de los operadores de espín en los ejes del cuerpo  $\mathbf{e}_i$ , es decir, los operadores  $R_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{S}$ ,  $M_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{Z}$  y  $T_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{W}$ , respectivamente. En particular, los operadores de espín  $T_i$ , recolectando los términos de (3.56) y (3.53), tienen la expresión

$$\begin{aligned} T_i = \sum_{k=1}^{k=3} (e_i)_k W_k &= \frac{\hbar}{2i(1 + \rho^2)} \sum_{k=1}^{k=3} ((1 - \rho^2)\delta_{ik} + 2\rho_i\rho_k - 2\epsilon_{kij}\rho_j) \\ &\quad \times \left( \frac{\partial}{\partial \rho_k} + \epsilon_{klr}\rho_l \frac{\partial}{\partial \rho_r} + \rho_k(\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_\rho) \right), \end{aligned}$$



que después de algunas manipulaciones toman la forma vectorial

$$\mathbf{T} = \frac{\hbar}{2i} \{ \nabla_{\rho} - \boldsymbol{\rho} \times \nabla_{\rho} + \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_{\rho}) \}. \quad (3.58)$$

Vemos, por inspección, que este resultado puede también obtenerse de la expresión de  $\mathbf{W}$  en (3.53), sin más que reemplazar  $\boldsymbol{\rho}$  por  $-\boldsymbol{\rho}$ , seguido de un cambio global de signo. Esto es así porque nosotros describimos la orientación de la partícula por el vector  $\boldsymbol{\rho}$  en el sistema de referencia del laboratorio, pero desde el punto de vista activo, es decir, con los ejes del laboratorio fijos y lo que gira son los ejes del cuerpo. Sin embargo la orientación con respecto a los ejes del cuerpo se hace describiendo el movimiento de los ejes del laboratorio, cuya orientación con respecto a los del cuerpo es  $-\boldsymbol{\rho}$ , y el cambio global de signo de los operadores proviene de cambiar la interpretación activa por la pasiva.

Satisfacen las reglas de conmutación

$$[\mathbf{T}, \mathbf{T}] = -i\hbar\mathbf{T}, \quad [\mathbf{T}, \mathbf{W}] = 0.$$

donde el signo menos de los primeros conmutadores frente a las relaciones de conmutación de los momentos angulares, realzan el hecho de que son operadores del álgebra de Lie del grupo de rotaciones, en una representación pasiva. En general todos los operadores de espín proyectados en los ejes del cuerpo,  $R_i$ ,  $M_i$  y  $T_i$ , conmutan con las correspondientes proyecciones en el laboratorio  $S_i$ ,  $Z_i$  y  $W_i$ . Esto es conforme al principio de indeterminación, ya que componentes del espín con respecto a sistemas de referencia diferentes, son observables compatibles y por lo tanto conmutan.

### 3.5.3. Funciones de onda espinoriales

Para encontrar las funciones propias de los operadores de espín tenemos que resolver ecuaciones de la forma:

$$S^2\chi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = s(s+1)\hbar^2\chi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}), \quad S_3\chi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = m\hbar\chi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}).$$

Pero como también tenemos operadores de espín proyectados en los ejes del cuerpo que conmutan con los anteriores, podemos ampliar el conjunto de operadores que conmutan. Podemos exigir, por ejemplo, que las funciones anteriores sean también vectores propios de  $T_3$ ,

$$T_3\chi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = n\hbar\chi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}),$$

de tal manera que el conjunto completo de observables que conmutan también incluye proyecciones del espín en los ejes del cuerpo.

El operador espín al cuadrado

$$S^2 = \mathbf{Z}^2 + \mathbf{W}^2 + 2\mathbf{Z} \cdot \mathbf{W}, \quad (3.59)$$

se expresa según (3.54) como la suma de tres operadores que conmutan, por lo que sus vectores propios se escogerán como vectores propios simultáneos de los tres operadores de la derecha de (3.59). Los operadores  $\mathbf{Z}$  y  $\mathbf{W}$  derivan la función de onda con respecto a las variables  $\mathbf{u}$  y  $\boldsymbol{\rho}$ . Podemos separar cada  $\chi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$  en la forma

$$\chi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = \sum_j U_j(\mathbf{u}) V_j(\boldsymbol{\rho}), \quad (3.60)$$

donde la suma va sobre un rango finito, y donde  $U_j(\mathbf{u})$  serán funciones propias de  $\mathbf{Z}^2$  y  $V_j(\boldsymbol{\rho})$  de  $\mathbf{W}^2$ , respectivamente.

### 3.5.4. Representaciones sobre la esfera unidad. Armónicos esféricos

Las funciones  $U_j(\mathbf{u})$  son múltiplos de los armónicos esféricos definidos sobre la orientación del vector velocidad  $\mathbf{u}$ , ya que el operador  $\mathbf{Z}$  tiene la estructura de un momento angular orbital en términos de las variables  $\mathbf{u}$ . Sus valores propios son enteros. El factor global es una función arbitraria del valor absoluto de la velocidad,  $u$ .

En efecto, si la velocidad la expresamos en coordenadas polares esféricas,  $\mathbf{u} \equiv (u, \beta, \lambda)$ , donde  $\beta$  es el ángulo polar y  $\lambda$  el acimutal

$$u_x = u \sin \beta \cos \lambda, \quad u_y = u \sin \beta \sin \lambda, \quad u_z = u \cos \beta,$$

las componentes del momento angular  $Z_i$  aparecen como:

$$Z_1 = i\hbar \left( \sin \lambda \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \cos \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \right), \quad Z_2 = -i\hbar \left( \cos \lambda \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \sin \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \right), \quad Z_3 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \lambda},$$

$$Z_{\pm} = Z_1 \pm iZ_2 = \hbar e^{\pm i\lambda} \left\{ \pm \frac{\partial}{\partial \beta} + i \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right\}. \quad (3.61)$$

Vemos que son independientes de la variable  $u$ , ya que en realidad el grupo de rotaciones sobre  $\mathbb{R}^3$  lo que hace es transformar puntos de la superficie de una esfera en puntos de esa misma esfera, es decir, actúa de forma transitiva sobre las esferas centradas en el origen, cualesquiera que sea el radio  $u$ .

El operador  $Z^2$  que conmuta con los tres  $Z_i$ , toma la forma

$$Z^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\sin^2 \beta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right]. \quad (3.62)$$

Podemos por lo tanto buscar funciones propias comunes a  $Z^2$  y  $Z_3$  en la forma  $f(u)G(\beta, \lambda)$ , con  $f(u)$  arbitraria y respecto de la parte que depende de las variables angulares

$$Z^2 Y_l^m(\beta, \lambda) = l(l+1)\hbar^2 Y_l^m(\beta, \lambda), \quad Z_3 Y_l^m(\beta, \lambda) = m\hbar Y_l^m(\beta, \lambda).$$

Solo existen soluciones de este sistema de ecuaciones diferenciales para valores enteros de  $l$  y con  $m = -l, -l+1, \dots, l$ . Las funciones  $|l, m\rangle \equiv Y_l^m(\beta, \lambda)$ , definidas sobre la esfera unidad, reciben el nombre de **armónicos esféricos**. La medida sobre la esfera normalizada en la unidad es

$$\int_0^\pi d\beta \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi} \sin \beta d\lambda = 1 \quad (3.63)$$

Los armónicos esféricos son ortogonales respecto del producto escalar hermítico definido mediante

$$\langle l, m | s, n \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi \sin \beta d\beta Y_l^{m*}(\beta, \lambda) Y_s^n(\beta, \lambda) = \delta_{mn} \delta_{ls},$$

es decir respecto de la medida invariante y normalizada sobre la esfera unidad  $(1/4\pi) \sin \beta d\beta d\lambda$ . La solución del sistema consiste en buscar las funciones de la forma  $Y_l^l(\beta, \lambda)$  en variables separadas  $Y_l^l(\beta, \lambda) = A_l(\beta)B_l(\lambda)$ , que satisfagan

$$Z_+ A_l(\beta)B_l(\lambda) = 0, \quad Z_3 A_l(\beta)B_l(\lambda) = l\hbar A_l(\beta)B_l(\lambda),$$

es decir,

$$A_l' - l(\cos \beta / \sin \beta) A_l = 0, \quad -iB_l' = lB_l,$$

que resultan ser proporcionales a las funciones  $A_l(\beta) \simeq \sin^l \beta$  y  $B_l(\lambda) \simeq \exp(i l \lambda)$ . Como sobre la superficie de la esfera el punto  $(\beta, \lambda)$  es el mismo que el  $(\beta, \lambda + 2\pi)$ , resulta que  $\exp(i l \lambda) = \exp(i l (\lambda + 2\pi))$ , lo que implica que necesariamente  $l$  debe ser un número entero.

Estas funciones, una vez normalizadas con respecto a la medida (3.63) se pueden escribir como

$$Y_l^l(\beta, \lambda) = (-1)^l \sqrt{\frac{(2l+1)(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}} \sin^l \beta e^{i\lambda}, \quad (3.64)$$

y el resto se obtienen de éstos mediante la acción reiterada sobre ellos de  $Z_-$ . No existen vectores propios correspondientes a valores propios semienteros, ya que la superficie de la esfera no es el espacio homogéneo de mayor dimensión. Podemos ver que  $Y_l^{m*} = (-1)^m Y_l^{-m}$ , y los primeros armónicos normalizados en la unidad son:

$$|0, 0\rangle = 1,$$

$$|1, 1\rangle = -\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \beta e^{i\lambda}, \quad |1, 0\rangle = \sqrt{3} \cos \beta, \quad |1, -1\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} \sin \beta e^{-i\lambda},$$

$$|2, 2\rangle = \sqrt{\frac{15}{8}} \sin^2 \beta e^{2i\lambda}, \quad |2, 1\rangle = -\sqrt{\frac{15}{2}} \sin \beta \cos \beta e^{i\lambda}, \quad |2, 0\rangle = \sqrt{\frac{5}{4}} (3 \cos^2 \beta - 1).$$

Para obtener la forma más general de un espinor hay que encontrar también la parte  $V_j(\boldsymbol{\rho})$ , que depende de las variables de orientación. Esto lo haremos a continuación tras el análisis de la acción del grupo de rotaciones sobre sí mismo, como grupo de transformaciones.

### 3.5.5. Representaciones espinoriales sobre SU(2)

Vamos a describir en detalle la parte de la función de onda ligada con la orientación,  $V(\boldsymbol{\rho})$ . Si no existiera contribución al espín proveniente de la parte del zitterbewegung  $\mathbf{Z}$ , el operador espín (3.52) se reduciría al operador  $\mathbf{W}$  dado en (3.53). Para obtener las ecuaciones de valores propios vamos primero a escribir estos operadores en coordenadas esféricas.

Si representamos el vector  $\boldsymbol{\rho} = \tan(\alpha/2)\mathbf{n} = r\mathbf{n}$ , en coordenadas esféricas como  $(r, \theta, \phi)$ , siendo  $r = |\boldsymbol{\rho}| = \tan(\alpha/2)$  y  $\theta$  y  $\phi$  los ángulos polar y acimutal del vector unidad  $\mathbf{n}$ , respectivamente, entonces el vector unidad  $\mathbf{n}$  tiene por componentes cartesianas las dadas en (3.57). Si a partir de ahora tomamos  $\hbar = 1$ , los operadores de espín (3.53) quedan representados por los operadores diferenciales

$$W_1 = \frac{1}{2i} \left[ (1+r^2) \sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} + \left( \frac{1}{r} \cos \theta \cos \phi - \sin \phi \right) \frac{\partial}{\partial \theta} - \left( \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} + \frac{\cos \theta \cos \phi}{\sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \right],$$

$$W_2 = \frac{1}{2i} \left[ (1+r^2) \sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \left( \frac{1}{r} \cos \theta \sin \phi + \cos \phi \right) \frac{\partial}{\partial \theta} - \left( \frac{\cos \theta \sin \phi}{\sin \theta} - \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \right],$$

$$W_3 = \frac{1}{2i} \left[ (1+r^2) \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \phi} \right].$$

El operador de Casimir del grupo de rotaciones  $W^2$  es:

$$W^2 = -\frac{1+r^2}{4} \left[ (1+r^2) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2(1+r^2)}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\} \right].$$

Los operadores de espín de subida(up) y bajada(down) definidos como habitualmente por  $W_{\pm} = W_1 \pm iW_2$ , son

$$W_+ = \frac{e^{i\phi}}{2i} \left[ (1+r^2) \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \left( \frac{\cos \theta + ir}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} - \left( \frac{r \cos \theta - i}{r \sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \right],$$

$$W_- = \frac{e^{-i\phi}}{2i} \left[ (1+r^2) \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \left( \frac{\cos \theta - ir}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} - \left( \frac{r \cos \theta + i}{r \sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \right].$$

Satisfacen las reglas de conmutación

$$[W_3, W_+] = W_+, \quad [W_3, W_-] = -W_-, \quad [W_+, W_-] = 2W_3.$$

Podemos verificar que  $(W_i)^* = -W_i$  y que  $W_+ = -(W_-)^*$ , donde  $*$  significa tomar el complejo conjugado del correspondiente operador.

Si  $F_s^m(r, \theta, \phi)$  es una función propia de  $W^2$  y  $W_3$ , satisface las ecuaciones diferenciales:

$$W^2 F_s^m(r, \theta, \phi) = s(s+1)F_s^m(r, \theta, \phi), \quad W_3 F_s^m(r, \theta, \phi) = mF_s^m(r, \theta, \phi).$$

Para obtener soluciones de este sistema, vamos a proceder de la siguiente manera. Primero vamos a calcular las funciones propias de la forma  $F_s^s$ . Sobre ellas el operador  $W_+$  nos produce  $W_+ F_s^s = 0$  y después, actuando sucesivamente con el operador  $W_-$  obtendremos las restantes funciones propias  $F_s^m$  de la misma representación irreducible caracterizada por el parámetro  $s$  y para  $-s \leq m \leq s$ . El objetivo es encontrar primero las funciones  $F_s^s$ .

Consideremos que podemos escribir las funciones  $F_s^s$  en variables separadas en la forma  $F_s^s(r, \theta, \phi) = A(r)B(\theta)C(\phi)$ . Entonces

$$W_3 A(r)B(\theta)C(\phi) = sA(r)B(\theta)C(\phi)$$

da lugar a

$$(1+r^2) \cos \theta A' B C - \frac{\sin \theta}{r} A B' C + A B C' = 2isABC$$

donde  $A'$  es la derivada de  $A$  y así con las demás, y dividiendo ambos lados por  $ABC$  llegamos a

$$(1+r^2) \cos \theta \frac{A'(r)}{A(r)} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{B'(\theta)}{B(\theta)} + \frac{C'(\phi)}{C(\phi)} = 2is.$$

El tercer término de la izquierda debe ser constante, ya que los demás términos son independientes de  $\phi$ . Este término lo ponemos como  $C'(\phi)/C(\phi) = ik$  y por lo tanto  $C(\phi) = e^{ik\phi}$ , salvo un factor constante arbitrario. Como  $C(\phi + 2\pi) = C(\phi)$  implica que la constante  $k$  debe ser un entero. Las otras dos funciones satisfacen:

$$r(1+r^2) \cos \theta A' B - \sin \theta A B' + ir(k-2s)AB = 0. \quad (3.65)$$

Si existen soluciones con funciones reales  $A$  y  $B$ , entonces necesariamente  $k = 2s$  de tal manera que el valor propio  $s$  puede ser un entero o un semientero, y la ecuación (3.65) se puede separar en la forma:

$$r(1+r^2) \frac{A'(r)}{A(r)} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \frac{B'(\theta)}{B(\theta)} = p = \text{constante}, \quad (3.66)$$

cuya solución general, salvo un factor global constante, es

$$A(r) = \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right)^{p/2}, \quad B(\theta) = (\sin \theta)^p.$$

Si actuamos sobre esta solución  $F_s^s \equiv A(r)B(\theta)C(\phi)$ , con  $W_+$ , como debe ser  $W_+ F_s^s = 0$ , nos produce:

$$r(1+r^2) \sin^2 \theta A' B + (\sin \theta \cos \theta + ir \sin \theta) A B' - 2s(ir \cos \theta + 1)AB = 0.$$

Dividiendo ambos miembros por  $AB$ , teniendo en cuenta (3.66), obtenemos para los parámetros la condición  $(p-2s)(1+ir \cos \theta) = 0$ . Entonces existen soluciones reales en variables separadas, para todo  $p = 2s = k$ . Vienen dadas, salvo un factor global constante, por:

$$F_s^s(r, \theta, \phi) = \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right)^s (\sin \theta)^{2s} e^{i2s\phi}. \quad (3.67)$$

Para  $s = 1/2$  y después de la acción con  $W_-$  obtenemos los dos vectores ortogonales

$$\Psi_{1/2}^{1/2} = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \sin \theta e^{i\phi}, \quad W_- \Psi_{1/2}^{1/2} = \Psi_{1/2}^{-1/2} = \frac{r \cos \theta + i}{\sqrt{1+r^2}},$$

que producen una representación bidimensional del grupo de rotaciones. Podemos verificar que  $W_- \Psi_{1/2}^{-1/2} = 0$ .

Del análisis de la estructura de los operadores  $W_{\pm}$ , si tomamos el complejo conjugado de la expresión  $W_+ F_s^s = 0$  obtenemos  $-W_-(F_s^s)^* = 0$  y por lo tanto  $(F_s^s)^* \sim G_s^{-s}$  de tal manera que tomando los espinores complejos conjugados de la anterior representación, obtenemos otro par de espinores ortogonales correspondientes a  $s = 1/2$ .

$$\tilde{\Psi}_{1/2}^{1/2} = \frac{r \cos \theta - i}{\sqrt{1+r^2}}, \quad \tilde{\Psi}_{1/2}^{-1/2} = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \sin \theta e^{-i\phi}.$$

Las restantes representaciones para espines superiores se pueden obtener por el mismo procedimiento. Otra forma es obtenerlas mediante productos tensoriales de las dos representaciones irreducibles bidimensionales anteriores. Por ejemplo, para  $s = 1$  podemos obtener tres representaciones ortogonales. Si de (3.67) con  $s = 1$  y actuando con el operador  $W_-$  obtenemos

$$\begin{aligned} \Psi_1^1 &= (\Psi_{1/2}^{1/2})^2 = \frac{r^2}{1+r^2} \sin^2 \theta e^{i2\phi}, \\ \Psi_1^0 &= (\Psi_{1/2}^{1/2})(\Psi_{1/2}^{-1/2}) = \frac{r}{1+r^2} \sin \theta (i + r \cos \theta) e^{i\phi}, \\ \Psi_1^{-1} &= (\Psi_{1/2}^{-1/2})^2 = \frac{(i + r \cos \theta)^2}{1+r^2}, \end{aligned}$$

que también puede obtenerse como el producto tensorial de  $\Psi \otimes \Psi$ .

Si hubiéramos trabajado en la representación canónica, donde los parámetros son  $\alpha = \alpha \mathbf{n}$ , esto equivale a reemplazar la variable  $r = \tan(\alpha/2)$  en términos del parámetro  $\alpha$  y expresar el operador diferencial  $\partial/\partial r$  en términos de  $\partial/\partial \alpha$ , por lo que los operadores de espín quedan

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2i} \left[ 2 \sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \alpha} + \left( \frac{\cos \theta \cos \phi}{\tan(\alpha/2)} - \sin \phi \right) \frac{\partial}{\partial \theta} - \left( \frac{\sin \phi}{\tan(\alpha/2) \sin \theta} + \frac{\cos \theta \cos \phi}{\sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \right], \\ W_2 &= \frac{1}{2i} \left[ 2 \sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \alpha} + \left( \frac{\cos \theta \sin \phi}{\tan(\alpha/2)} + \cos \phi \right) \frac{\partial}{\partial \theta} - \left( \frac{\cos \theta \sin \phi}{\sin \theta} - \frac{\cos \phi}{\tan(\alpha/2) \sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \right], \\ W_3 &= \frac{1}{2i} \left[ 2 \cos \theta \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\sin \theta}{\tan(\alpha/2)} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \phi} \right], \\ W^2 &= - \left[ \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\tan(\alpha/2)} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{1}{4 \sin^2(\alpha/2)} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\} \right], \\ W_+ &= \frac{e^{i\phi}}{2i} \left[ 2 \sin \theta \frac{\partial}{\partial \alpha} + \left( \frac{\cos \theta}{\tan(\alpha/2)} + i \right) \frac{\partial}{\partial \theta} - \left( \frac{\cos \theta \tan(\alpha/2) - i}{\tan(\alpha/2) \sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \right], \\ W_- &= \frac{e^{-i\phi}}{2i} \left[ 2 \sin \theta \frac{\partial}{\partial \alpha} + \left( \frac{\cos \theta}{\tan(\alpha/2)} - i \right) \frac{\partial}{\partial \theta} - \left( \frac{\cos \theta \tan(\alpha/2) + i}{\tan(\alpha/2) \sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \end{aligned}$$

y los espinores de las dos representaciones ortogonales bidimensionales se escriben como

$$\Psi_{1/2}^{1/2} = i \sin \frac{\alpha}{2} \sin \theta e^{i\phi}, \quad \Psi_{1/2}^{-1/2} = \cos \frac{\alpha}{2} - i \sin \frac{\alpha}{2} \cos \theta \quad (3.68)$$

y

$$\tilde{\Psi}_{1/2}^{1/2} = \cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \cos \theta, \quad \tilde{\Psi}_{1/2}^{-1/2} = -i \sin \frac{\alpha}{2} \sin \theta e^{-i\phi}. \quad (3.69)$$

Se ha mencionado que los anteriores espinores son ortogonales. Para dotar a este espacio de funciones con una estructura de espacio de Hilbert es necesario definir un producto escalar, hermitico, definido positivo. La matriz Jacobiana de las variables  $\rho'$  en términos de las variables  $\rho$  dada en (3.39), posee por determinante

$$\det \left( \frac{\partial \rho'^i}{\partial \rho^j} \right) = \frac{(1 + \mu^2)^2}{(1 - \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\rho})^4},$$

y la transformación del elemento de volumen

$$d^3 \rho' = \frac{(1 + \mu^2)^2}{(1 - \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\rho})^4} d^3 \rho.$$

A partir de (3.39) obtenemos que

$$1 + \rho'^2 = \frac{(1 + \mu^2)}{(1 - \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\rho})^2} (1 + \rho^2)$$

por lo que la medida

$$\frac{d^3 \rho'}{(1 + \rho'^2)^2} = \left( \frac{(1 - \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\rho})^2}{(1 + \mu^2)(1 + \rho^2)} \right)^2 \frac{(1 + \mu^2)^2}{(1 - \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\rho})^4} d^3 \rho = \frac{d^3 \rho}{(1 + \rho^2)^2}$$

es de hecho una medida invariante.

En coordenadas esféricas se escribe como

$$\frac{r^2 \sin \theta}{(1 + r^2)^2} dr d\theta d\phi$$

y en la representación normal es

$$\sin^2(\alpha/2) \sin \theta d\alpha d\theta d\phi.$$

Como el grupo de rotaciones es un grupo doblemente conexo, la medida anterior tiene que estar definida sobre una variedad simplemente conexa, es decir, sobre el grupo recubridor universal del grupo de rotaciones  $SO(3)$ , que es el grupo  $SU(2)$ . La variedad del grupo  $SU(2)$  en la representación canónica viene dada por la esfera tridimensional de radio  $2\pi$  en la que los puntos de su superficie representan a un único elemento de  $SU(2)$ , la matriz unitaria  $2 \times 2$ ,  $-\mathbb{I}$ . La medida invariante y normalizada resulta ser

$$d\mu_N(\alpha, \theta, \phi) \equiv \frac{1}{4\pi^2} \sin^2(\alpha/2) \sin \theta d\alpha d\theta d\phi. \quad (3.70)$$

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{4\pi^2} \sin^2(\alpha/2) \sin \theta = 1.$$

Por lo tanto, el producto escalar hermitico queda definido como

$$\langle f|g \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi f^*(\alpha, \theta, \phi) g(\alpha, \theta, \phi) \sin^2(\alpha/2) \sin \theta, \quad (3.71)$$

donde  $f^*$  es la función compleja conjugada de la  $f$ .

Los anteriores espinores son vectores ortogonales con respecto a esta medida invariante (3.70). En particular, los espinores normalizados correspondientes a  $s = 1/2$  vienen dados en (3.68)-(3.69), multiplicados por el factor  $\sqrt{2}$ .

Los operadores de espín proyectados en los ejes del cuerpo  $\mathbf{e}_i$ , vienen dados en (3.58) en la parametrización  $\boldsymbol{\rho}$ , y hemos visto que difieren de los operadores  $\mathbf{W}$  únicamente en el cambio  $\boldsymbol{\rho} \rightarrow -\boldsymbol{\rho}$ , seguido de un cambio global de signo. Esto corresponde en la parametrización canónica al cambio  $\alpha \rightarrow -\alpha$ , seguido del cambio global de signo.

Estos operadores son

$$T_1 = \frac{1}{2i} \left[ 2 \sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \alpha} + \left( \frac{\cos \theta \cos \phi}{\tan(\alpha/2)} + \sin \phi \right) \frac{\partial}{\partial \theta} - \left( \frac{\sin \phi}{\tan(\alpha/2) \sin \theta} - \frac{\cos \theta \cos \phi}{\sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \right], \quad (3.72)$$

$$T_2 = \frac{1}{2i} \left[ 2 \sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \alpha} + \left( \frac{\cos \theta \sin \phi}{\tan(\alpha/2)} - \cos \phi \right) \frac{\partial}{\partial \theta} - \left( -\frac{\cos \theta \sin \phi}{\sin \theta} - \frac{\cos \phi}{\tan(\alpha/2) \sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \right], \quad (3.73)$$

$$T_3 = \frac{1}{2i} \left[ 2 \cos \theta \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\sin \theta}{\tan(\alpha/2)} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \phi} \right]. \quad (3.74)$$

Se puede verificar, como se ha mencionado anteriormente, que satisfacen las reglas de conmutación:

$$[T_i, T_k] = -i\epsilon_{ikl} T_l, \quad (3.75)$$

$$[W_i, T_k] = 0. \quad (3.76)$$

Como  $W^2 = T^2$  podemos encontrar vectores propios comunes de los operadores  $W^2$ ,  $W_3$  y  $T_3$ , que los denotaremos por  $D_{mn}^{(s)}(\boldsymbol{\alpha})$  de tal manera que

$$\begin{aligned} W^2 D_{mn}^{(s)}(\boldsymbol{\alpha}) &= s(s+1) D_{mn}^{(s)}(\boldsymbol{\alpha}), \\ W_3 D_{mn}^{(s)}(\boldsymbol{\alpha}) &= m D_{mn}^{(s)}(\boldsymbol{\alpha}), \\ T_3 D_{mn}^{(s)}(\boldsymbol{\alpha}) &= n D_{mn}^{(s)}(\boldsymbol{\alpha}). \end{aligned}$$

Como  $W_3(\alpha) D_{mn}^{(s)}(\alpha) = m D_{mn}^{(s)}(\alpha)$ , si producimos el cambio  $\alpha \rightarrow -\alpha$  obtenemos que  $W_3(-\alpha) D_{mn}^{(s)}(-\alpha) = m D_{mn}^{(s)}(-\alpha)$  y el posterior cambio global de signo lo reduce a

$$-W_3(-\alpha) D_{mn}^{(s)}(-\alpha) = T_3(\alpha) D_{mn}^{(s)}(-\alpha) = -m D_{mn}^{(s)}(-\alpha),$$

por lo que los anteriores espinores (3.68)-(3.69) son también vectores propios de  $T_3$ .

Con esta notación, los cuatro espinores normalizados, denotados por los correspondientes valores propios  $|s, m, n\rangle$ , son

$$\Phi_1 = |1/2, 1/2, 1/2\rangle = \sqrt{2}(\cos(\alpha/2) + i \cos \theta \sin(\alpha/2)), \quad (3.77)$$

$$\Phi_2 = |1/2, -1/2, 1/2\rangle = i\sqrt{2} \sin(\alpha/2) \sin \theta e^{-i\phi}, \quad (3.78)$$

$$\Phi_3 = |1/2, 1/2, -1/2\rangle = i\sqrt{2} \sin(\alpha/2) \sin \theta e^{i\phi}. \quad (3.79)$$

$$\Phi_4 = |1/2, -1/2, -1/2\rangle = \sqrt{2}(\cos(\alpha/2) - i \cos \theta \sin(\alpha/2)), \quad (3.80)$$

Forman un conjunto ortonormal con respecto a la medida normalizada e invariante (3.70) y con respecto al producto escalar definido en (3.71). Podemos comprobar que los operadores de bajada  $W_- \Phi_1 = \Phi_2$ ,  $W_- \Phi_2 = 0$ ,  $W_- \Phi_3 = \Phi_4$ ,  $W_- \Phi_4 = 0$ , y análogamente  $T_- \Phi_1 = 0$ ,  $T_- \Phi_3 = \Phi_1$ ,  $T_- \Phi_2 = 0$ , and  $T_- \Phi_4 = \Phi_2$ , y las correspondientes relaciones cuando se actúa con los operadores que suben  $W_+$  y  $T_+$ , respectivamente. Observar que debido al signo opuesto en las relaciones de conmutación de los operadores  $T_i$ , los operadores  $T_{\pm}$  operan en sentido contrario.

La razón es que  $[W_3, W_\pm] = \pm W_\pm$ , mientras que  $[T_3, T_\pm] = \mp T_\pm$ . Esto trae consigo que si  $|w, m\rangle$  es vector propio de  $W_3$  con valor propio  $m$ ,  $W_3|w, m\rangle = m|w, m\rangle$ , la acción de  $W_+$  produce un vector propio de  $W_3$  con valor propio  $m + 1$ . En efecto

$$W_3(W_+|w, m\rangle) = (W_+ + W_+W_3)|w, m\rangle = W_+|w, m\rangle + W_+m|w, m\rangle = (m + 1)(W_+|w, m\rangle),$$

mientras que si  $|t, r\rangle$  es vector propio de  $T_3$  con valor propio  $r$ ,  $T_+|t, r\rangle$  es vector propio de  $T_3$  con valor propio  $r - 1$ . En efecto

$$T_3T_+|t, r\rangle = (-T_+ + T_+T_3)|t, r\rangle = -T_+|t, r\rangle + T_+r|t, r\rangle = (r - 1)(T_+|t, r\rangle).$$

Un aspecto importante que conviene resaltar es que para las partículas de espín  $1/2$ , a pesar de que las representaciones irreducibles correspondientes a  $s = 1/2$ , son bidimensionales, para describir la parte del espín de la función de onda, necesitamos una función compleja de un espacio de Hilbert de dimensión cuatro, ya que para describir la orientación de la partícula, tenemos que asociar a la misma un sistema de referencia local, por lo que además de la proyección del espín en el sistema del laboratorio  $\mathbf{W}$ , poseemos como observables las proyecciones del espín en los ejes del cuerpo  $\mathbf{T}$ , las cuales deben ser incluidas porque son operadores que conmutan con los anteriores.

### 3.5.6. Representación matricial de los observables internos

La representación matricial de cualquier observable  $A$  que actúa sobre las variables de orientación o en el espacio de Hilbert de dimensión cuatro generado por estos cuatro espinores de espín  $1/2$ ,  $\Phi_i$ , se obtiene de  $A_{ij} = \langle \Phi_i | A \Phi_j \rangle$ ,  $i, j = 1, 2, 3, 4$ . Una vez que fijamos estos cuatro vectores básicos normalizados, cuando los operadores actúan sobre el subespacio que ellos generan, los diferentes operadores diferenciales como  $W_i$  y  $T_i$ , van a tener una representación matricial  $4 \times 4$  por bloques de la forma:

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{W} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (3.81)$$

$$T_1 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & i\mathbb{I} \\ -i\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad (3.82)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}$  son las tres matrices de Pauli y  $\mathbb{I}$  representa la matriz unidad  $2 \times 2$ . Hemos incluido la constante de Planck en los operadores de momento angular.

Si de forma análoga calculamos la representación matricial de las nueve componentes, en esa misma base, de los tres vectores unidad  $(\mathbf{e}_i)_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  que definen la orientación de la partícula, obtenemos las nueve matrices hermíticas de traza nula

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & i\boldsymbol{\sigma} \\ -i\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (3.83)$$

Podemos verificar que  $T_i = \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{S}$ . Vemos que en general las diferentes componentes de los vectores unidad  $\mathbf{e}_i$ , no conmutan entre sí. Los valores propios de cada componente  $e_{ij}$ , en esta representación matricial son  $\pm 1/3$ . Sin embargo, la representación matricial del cuadrado de cada una de las componentes es  $(e_{ij})^2 = \mathbb{I}/3$ , de tal forma que la magnitud al cuadrado de cada vector unidad es efectivamente  $\mathbf{e}_i^2 = \sum_j (e_{ij})^2 = \mathbb{I}$ , la matriz unidad. Los valores propios de los operadores  $(e_{ij})^2$  no son los cuadrados de los valores propios de los operadores  $e_{ij}$ . Esto es debido a que en general, la función  $e_{ij}\Phi_k$  no pertenece al mismo espacio que el que generan las funciones  $\Phi_k$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , a pesar de que este subespacio es invariante bajo los operadores  $W_i$  y  $T_j$ . De hecho, cada función  $e_{ij}\Phi_k$  es una combinación lineal de un espinor de espín  $1/2$  y de un espinor de espín  $3/2$ .

No se entiende por qué cualquier componente del vector unidad  $\mathbf{e}_i$  de un sistema cartesiano puede tener como valores propios  $\pm 1/3$  en el caso cuántico y su cuadrado  $(e_{ij})^2 = \mathbb{I}/3$  en vez de ser  $\mathbb{I}/9$ .



### 3.5.7. Teorema de Peter-Weyl para grupos compactos

Los espinores que acabamos de obtener, pueden ser obtenidos también por medio de un teorema importante relativo a las representaciones de grupos compactos, y que se conoce en la literatura como el teorema de Peter-Weyl <sup>12</sup>. Lo vamos a enunciar sin demostración la cual se puede encontrar en cualquiera de las referencias citadas.

**Teorema.-** Sea  $D^{(s)}(g)$  un sistema completo de representaciones unitarias no equivalentes e irreducibles de un grupo compacto  $G$ , enumeradas por el parámetro  $s$ . Sea  $d_s$  la dimensión de la correspondiente representación y  $D_{ij}^{(s)}(g)$ ,  $1 \leq i, j \leq d_s$  los correspondientes elementos matriciales. Entonces, las funciones

$$\sqrt{d_s} D_{ij}^{(s)}(g), \quad 1 \leq i, j \leq d_s$$

forman un conjunto ortonormal completo sobre  $G$ , con respecto a una medida normalizada e invariante  $\mu_N(g)$  definida sobre este grupo, es decir,

$$\int_G \sqrt{d_s} D_{ij}^{(s)*}(g) \sqrt{d_r} D_{kl}^{(r)}(g) d\mu_N(g) = \delta^{sr} \delta_{ik} \delta_{jl}. \quad (3.84)$$

Que el conjunto es completo significa que cada función de cuadrado integrable definida sobre  $G$ ,  $f(g)$ , admite un desarrollo en serie, convergente en norma, en términos de las funciones ortogonales anteriores  $D_{ij}^{(s)}(g)$ , en la forma

$$f(g) = \sum_{s,i,j} a_{ij}^{(s)} \sqrt{d_s} D_{ij}^{(s)}(g),$$

y donde los coeficientes, en general números complejos  $a_{ij}^{(s)}$ , se obtienen a partir de

$$a_{ij}^{(s)} = \int_G \sqrt{d_s} D_{ij}^{(s)*}(g) f(g) d\mu_N(g).$$

En nuestro caso,  $SU(2)$  considerado como la variedad de un grupo, es la esfera tridimensional simplemente conexa de radio  $2\pi$ , con una medida normalizada e invariante dada por (3.70),

$$d\mu_N(\alpha, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi^2} \sin \theta \sin(\alpha/2)^2 d\alpha d\theta d\phi.$$

En la parametrización normal, las representaciones bidimensionales de  $SU(2)$  corresponden a los valores propios  $s = 1/2$  de  $S^2$  y la representación matricial está dada por

$$D^{(1/2)}(\boldsymbol{\alpha}) = \cos(\alpha/2)\mathbb{I} - i \sin(\alpha/2)(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}),$$

con el vector unidad  $\mathbf{n}$  dado en (3.57), es decir,

$$D^{(1/2)}(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) - i \cos \theta \sin(\alpha/2) & -i \sin \theta \sin(\alpha/2) e^{-i\phi} \\ -i \sin \theta \sin(\alpha/2) e^{i\phi} & \cos(\alpha/2) + i \cos \theta \sin(\alpha/2) \end{pmatrix}.$$

<sup>12</sup> N. Ja. Vilenkin, *Fonctions spéciales et Théorie de la représentation des groupes*, Dunod, Paris (1969), p. 39.

A.O. Barut and R. Raczyka, *Theory of group representations and applications*, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa (1980), p. 174.

F. Peter and H. Weyl, *Math. Ann.* **7**, 735 (1927).

Si comparamos estas componentes matriciales con los cuatro espinores ortogonales dados en (3.77)-(3.80) vemos que

$$D^{(1/2)}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Phi_4 & -\Phi_2 \\ -\Phi_3 & \Phi_1 \end{pmatrix}, \quad (3.85)$$

es decir,  $\sqrt{2}$  veces las 4 componentes matriciales de  $D^{(1/2)}(\boldsymbol{\alpha})$  son los cuatros espinores básicos  $\Phi_i$ .

En la representación tridimensional de  $SO(3)$ , considerada como una representación  $3 \times 3$  de  $SU(2)$

$$D_{ij}^{(1)}(\boldsymbol{\alpha}) \equiv D^{(1)}(\alpha, \theta, \phi) = \delta_{ij} \cos \alpha + n_i n_j (1 - \cos \alpha) + \epsilon_{ikj} n_k \sin \alpha \equiv e_{ji}$$

donde

$$n_1 = \sin \theta \cos \phi, \quad n_2 = \sin \theta \sin \phi, \quad n_3 = \cos \theta,$$

obtenemos otro conjunto de nueve funciones ortogonales, en este caso todas reales, que resultan ser las 9 componentes  $e_{ij}$  de los vectores unidad ligados al punto  $\mathbf{r}$ . De acuerdo con el teorema de Peter-Weyl, multiplicadas por  $\sqrt{3}$ , puesto que son matrices de dimensión  $3 \times 3$ , forman otro conjunto ortonormal y ortogonal al conjunto anterior de cuatro espinores  $\Phi_k$ .

$$3 \langle e_{ij} | e_{kl} \rangle = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad \langle e_{ij} | \Phi_k \rangle = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Resulta un buen ejercicio el verificar esta ortogonalidad, realizando las correspondientes integrales por medios manuales o haciendo uso de algún programa de cálculo algebraico, como en el fichero notebook de Mathematica, mencionado. Estas 9 funciones son vectores propios del operador  $\mathbf{W}^2$  con valor propio  $1(1+1) = 2$ .

$$\mathbf{W}^2 e_{ij} = 2e_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Respecto del grupo  $SU(2)$ ,  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  son vectores básicos de una representación irreducible. Lo mismo sucede con  $\Phi_3$  y  $\Phi_4$ . Por lo tanto el producto tensorial de estas dos representaciones generan hasta 3 posibles representaciones de espín 1. Así, si definimos las funciones, que en la notación  $|w, w_3, t_3 \rangle$  son

$$\begin{aligned} g_{11} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \Phi_1^2 && \equiv |1, 1, 1 \rangle, \\ g_{12} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \Phi_1 \Phi_2 && \equiv |1, 0, 1 \rangle, \\ g_{13} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \Phi_2^2 && \equiv |1, -1, 1 \rangle, \\ g_{21} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \Phi_3^2 && \equiv |1, 1, -1 \rangle, \\ g_{22} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \Phi_3 \Phi_4 && \equiv |1, 0, -1 \rangle, \\ g_{23} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \Phi_4^2 && \equiv |1, -1, -1 \rangle, \\ g_{31} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \Phi_1 \Phi_3 && \equiv |1, 1, 0 \rangle, \\ g_{32} &= \sqrt{3} (\Phi_1 \Phi_4 + \Phi_2 \Phi_3) && \equiv |1, 0, 0 \rangle, \\ g_{33} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \Phi_2 \Phi_4 && \equiv |1, -1, 0 \rangle, \end{aligned}$$

Todos estos espinores son vectores propios de  $W^2$  con valor propio  $1(1+1)$ ,

$$W^2 g_{ij} = 2g_{ij},$$

los tres primeros  $g_{11}, g_{12}, g_{13}$  son vectores propios de  $T_3$  con valor propio 1, los  $g_{21}, g_{22}, g_{23}$  son vectores propios de  $T_3$  con valor propio  $-1$ , y finalmente los  $g_{31}, g_{32}, g_{33}$  son vectores propios de  $T_3$  con valor propio 0. Cada terna forma una representación irreducible de  $SO(3)$ . Los  $g_{11}, g_{21}, g_{31}$  son vectores propios de  $W_3$  con valor propio 1, los  $g_{12}, g_{22}, g_{32}$  son vectores propios de  $W_3$  con valor propio 0, y finalmente los  $g_{13}, g_{23}, g_{33}$  son vectores propios de  $W_3$  con valor propio  $-1$ .

Se puede comprobar que forman una base ortonormal de la representación  $3 \times 3$  de todos los objetos de espín 1 del grupo de rotaciones.

$$\langle g_{ij} | g_{kl} \rangle = \delta_{ik} \delta_{jl}.$$

Como las funciones  $\sqrt{3}e_{ij}$  también forman una base ortonormal de esta representación es posible expresarlas una en términos de la otra. Así, podemos comprobar que

$$\begin{aligned} \sqrt{3} e_{11} &= \frac{1}{2} (g_{11} - g_{13} - g_{21} + g_{23}), \\ \sqrt{3} e_{12} &= \frac{-i}{2} (g_{11} + g_{13} - g_{21} - g_{23}), \\ \sqrt{3} e_{13} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (g_{22} - g_{12}), \\ \sqrt{3} e_{21} &= \frac{i}{2} (g_{11} - g_{13} + g_{21} - g_{23}), \\ \sqrt{3} e_{22} &= \frac{1}{2} (g_{11} + g_{13} + g_{21} + g_{23}), \\ \sqrt{3} e_{23} &= \frac{-i}{\sqrt{2}} (g_{12} + g_{22}), \\ \sqrt{3} e_{31} &= \frac{-1}{\sqrt{2}} (g_{31} - g_{33}), \\ \sqrt{3} e_{32} &= \frac{i}{\sqrt{2}} (g_{31} + g_{33}), \\ \sqrt{3} e_{33} &= g_{32}, \end{aligned}$$

pero aunque estos espinores formados por las componentes de los vectores unidad que describen la orientación son también vectores propios de  $W^2$  con valor propio  $w = 1$ , no son vectores propios de  $W_3$  y  $T_3$ .

$$W^2 e_{ij} = 2e_{ij},$$

que, como hemos visto, también satisfacen las reglas de ortogonalidad y normalización

$$\langle \sqrt{3}e_{ij} | \sqrt{3}e_{kl} \rangle = \delta_{ik} \delta_{jl}.$$

### 3.5.8. Espinores generales

En el caso de que la parte del zitterbewegung no sea nula, podemos obtener también espinores de espín 1/2 como parte de las representaciones irreducibles contenidas en el producto tensorial de los estados de espín 1 y espín 1/2, de las funciones  $U(\mathbf{u})$  y  $V(\boldsymbol{\rho})$ , respectivamente, en que se descompone la función de onda más general (3.60).

El espín total de la partícula es de la forma

$$\mathbf{S} = \mathbf{u} \times \mathbf{U} + \mathbf{W} = \mathbf{Z} + \mathbf{W},$$

donde  $\mathbf{Z} = -i\hbar\mathbf{u} \times \nabla_{\mathbf{u}}$  y  $\mathbf{W}$  viene dado en (3.53). Las proyecciones del espín en los ejes del cuerpo, es decir los operadores  $T_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{W}$ , vienen descritos en (3.58). Satisfacen las reglas de conmutación:

$$\begin{aligned} [\mathbf{Z}, \mathbf{Z}] &= i\mathbf{Z}, & [\mathbf{W}, \mathbf{W}] &= i\mathbf{W}, & [\mathbf{T}, \mathbf{T}] &= -i\mathbf{T}, \\ [\mathbf{Z}, \mathbf{W}] &= 0, & [\mathbf{Z}, \mathbf{T}] &= 0, & [\mathbf{W}, \mathbf{T}] &= 0. \end{aligned}$$

Estas reglas de conmutación son invariantes bajo el cambio  $\boldsymbol{\rho}$  por  $-\boldsymbol{\rho}$  en la definición de los operadores  $\mathbf{W}$  y  $\mathbf{T}$ , puesto que se intercambian uno en otro. Finalmente, la expresión de los vectores unidad ligados a la partícula  $\mathbf{e}_i$  vienen dados en (3.55) y (3.56).

Podemos ver que estas componentes de los vectores unidad y los operadores  $W_i$  y  $T_j$ , satisfacen las siguientes propiedades:

- 1)  $e_{ij}(-\alpha, \theta, \phi) = -e_{ij}(\alpha, \theta, \phi)$ .
- 2)  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{W} \equiv \sum_j e_{ij} W_j = T_i$ .
- 3)  $\sum_j \mathbf{e}_j T_j = \mathbf{W}$ .
- 4) Para todo  $i, j$ , la acción  $W_i e_{ji} = 0$ , sin suma sobre el índice  $i$ .
- 5) Para todo  $i, j$ , la acción  $T_i e_{ij} = 0$ , sin suma sobre el índice  $i$ .
- 6) Para todo  $i, j, k$ , con  $i \neq j$ , tenemos que  $W_i e_{kj} + W_j e_{ki} = 0$ , y en el caso de que  $i = j$ , nos lleva a la propiedad 4.
- 7) Para todo  $i, j, k$ , con  $i \neq j$ , tenemos que  $T_i e_{jk} + T_j e_{ik} = 0$ , y análogamente al caso anterior, cuando  $i = j$  nos lleva de nuevo a la propiedad 4.

Esto implica que  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{W} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_i = T_i$ , debido a la propiedad 4, cuando actúa sobre una función arbitraria  $f$ ,

$$(\mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_i) f \equiv \sum_j W_j (e_{ij} f) = f \sum_j W_j (e_{ij}) + \sum_j e_{ij} W_j (f) = T_i(f),$$

debido a que  $\sum_j W_j e_{ij} = 0$ .

De la misma manera  $\sum_j \mathbf{e}_j T_j \equiv \sum_j T_j \mathbf{e}_j = \mathbf{W}$ .

Fijemos ahora el valor del espín. Podemos describir partículas de cualquier valor de su espín. Consideremos sin embargo los espines de valor más bajo. Para partículas de espín  $1/2$ , si tomamos por simplicidad las funciones propias  $V(\boldsymbol{\rho})$  de  $W^2$  correspondientes al valor propio  $1/2$ , como el espín total debe ser  $1/2$ , la parte orbital  $\mathbf{Z}$  debe contribuir solamente con los armónicos esféricos de valor  $z = 0$  y  $z = 1$ .

Si no hay contribución de la parte del zitterbewegung,  $z = 0$ , las funciones de Wigner se pueden escoger como funciones propias simultáneas de los tres operadores que conmutan  $W^2$ ,  $W_3$ , y  $T_3$ , y los correspondientes vectores normalizados  $|w, w_3, t_3\rangle$  vienen dados por las funciones (3.77-3.80).

Si tenemos una contribución del zitterbewegung correspondiente al valor  $z = 1$ , entonces las funciones  $U(\mathbf{u})$  son los armónicos esféricos

$$Y_1^1(\beta, \lambda) \equiv |1, 1\rangle = -\sin(\beta) e^{i\lambda} \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad (3.86)$$

$$Y_1^0(\beta, \lambda) \equiv |1, 0\rangle = \sqrt{3} \cos(\beta), \quad (3.87)$$

$$Y_1^{-1}(\beta, \lambda) \equiv |1, -1\rangle = \sin(\beta) e^{-i\lambda} \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad (3.88)$$

normalizados con respecto a la medida invariante

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi} \sin(\beta) d\beta d\lambda = 1.$$

Se representan en la forma de funciones propias  $|z, z_3\rangle$  de  $\mathbf{Z}^2$  y  $Z_3$ , donde las variables  $\beta$  y  $\lambda$  representan la orientación del vector velocidad  $\mathbf{u}$ .

La representación producto tensorial del grupo de rotaciones contruida a partir de las dos representaciones irreducibles, la  $\mathbf{1}$  asociada a los armónicos esféricos (3.86)-(3.88) y la representación  $\mathbf{1/2}$  dada en (3.77)-(3.80) se descompone en la suma directa de representaciones irreducibles  $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1/2} = \mathbf{3/2} \oplus \mathbf{1/2}$ . La representación  $\mathbf{3/2}$  es de dimensión 8, y corresponde a espinores de espín  $s = 3/2$  y la otra  $\mathbf{1/2}$  de dimensión 4 es la de  $s = 1/2$ .

Las siguientes funciones de las cinco variables compactas  $\beta, \lambda, \alpha, \theta$  y  $\phi$ , donde las variables  $\beta$  y  $\lambda$  son las mismas que las de los armónicos esféricos  $Y_l^m$ , y las restantes  $\alpha, \theta$  y  $\phi$ , provienen de los espinores  $\Phi_i$ , representan funciones normalizadas de espín  $1/2, |s, s_3, t_3 \rangle$  que son vectores propios de los operadores  $S^2, S_3$  y  $T_3$

$$\Psi_1 \equiv |1/2, 1/2, 1/2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( Y_1^0 \Phi_1 - \sqrt{2} Y_1^1 \Phi_2 \right), \quad (3.89)$$

$$\Psi_2 \equiv |1/2, -1/2, 1/2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( -Y_1^0 \Phi_2 + \sqrt{2} Y_1^{-1} \Phi_1 \right), \quad (3.90)$$

$$\Psi_3 \equiv |1/2, 1/2, -1/2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( Y_1^0 \Phi_3 - \sqrt{2} Y_1^1 \Phi_4 \right), \quad (3.91)$$

$$\Psi_4 \equiv |1/2, -1/2, -1/2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( -Y_1^0 \Phi_4 + \sqrt{2} Y_1^{-1} \Phi_3 \right), \quad (3.92)$$

y vectores propios todos ellos de  $Z^2$  con valor propio  $1(1+1)$ , puesto que son combinaciones lineales de los armónicos esféricos  $Y_l^m$ , por lo que su representación matricial en esta base es  $Z^2 = 2\mathbb{I}$ . Son además vectores propios de  $W^2$  con valor propio  $1/2(1/2+1)$ , por ser combinaciones lineales de los  $\Phi_i$ , por lo que su representación matricial en esta base es  $W^2 = 3/4\mathbb{I}$ . Podemos verificar que

$$S_- \Psi_1 = \Psi_2, \quad S_- \Psi_2 = 0, \quad S_- \Psi_3 = \Psi_4, \quad S_- \Psi_4 = 0,$$

$$T_- \Psi_1 = 0, \quad T_- \Psi_2 = 0, \quad T_- \Psi_3 = \Psi_1, \quad T_- \Psi_4 = \Psi_2.$$

No son vectores propios del operador  $W_3$ , a pesar de que generan un espacio vectorial invariante para los operadores  $S^2, S_3$  y  $T_3$ . En esta base (3.89)-(3.92) formada por los vectores ortonormales  $\Psi_i$ , la representación matricial del espín es

$$\mathbf{S} = \mathbf{Z} + \mathbf{W} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (3.93)$$

mientras que la representación matricial de  $\mathbf{Z}$  y de  $\mathbf{W}$  es

$$\mathbf{Z} = \frac{2\hbar}{3} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \frac{-\hbar}{6} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (3.94)$$

los cuales no satisfacen las reglas de conmutación de un momento angular debido a que el espacio sobre el que actúan no es un espacio invariante para estos operadores  $\mathbf{Z}$  y  $\mathbf{W}$ . Se puede observar que  $\mathbf{Z}$  tiene la misma orientación que el espín  $\mathbf{S}$ , ya que es un múltiplo positivo de él, mientras que  $\mathbf{W}$  tiene la opuesta, como se sugiere de la figura de la portada.

Como  $S^2 = Z^2 + W^2 + 2\mathbf{Z} \cdot \mathbf{W}$ , si calculamos las representaciones matriciales en la base  $\Psi_i$ , obtenemos (tomando  $\hbar = 1$ ):

$$Z^2 = 2\mathbb{I}, \quad W^2 = \frac{3}{4}\mathbb{I}, \quad \mathbf{Z} \cdot \mathbf{W} = -\mathbb{I}, \quad S^2 = \left(2 + \frac{3}{4} - 2\right)\mathbb{I} = \frac{3}{4}\mathbb{I},$$

con lo que en la base  $\Psi_i$  los valores esperados de estos observables son los mismos en cualquiera de los cuatro estados a pesar de no ser estos vectores, vectores propios de  $W_i$  y  $Z_i$ . El que los valores esperados en los vectores de la base  $\Psi_i$ , de  $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{W} = -\mathbb{I}$ , sugiere que ambas componentes

del espín  $\mathbf{Z}$  y  $\mathbf{W}$  tienen sentidos contrarios, mientras que los valores absolutos de la parte rotativa del espín  $W^2$  y el espín total  $S^2$ , son los mismos.

Estos valores matriciales de  $Z^2$  y  $W^2$  no se corresponden con los cuadrados de sus respectivas representaciones matriciales pues de (3.94) resulta  $Z^2 = \frac{4}{3}\mathbb{I}$  y  $W^2 = \frac{1}{12}\mathbb{I}$ , mientras que  $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{W} = -\frac{1}{3}\mathbb{I}$ ,

El módulo de  $\mathbf{S}$ ,  $S$  vale  $\sqrt{3}/2$ , mientras que el de  $\mathbf{Z}$  resulta ser  $2/\sqrt{3}$ , es decir  $4/3$  del anterior, mientras que la parte  $\mathbf{W}$  su módulo es  $1/2\sqrt{3}$ , es decir  $1/3$  del módulo de  $\mathbf{S}$  pero en sentido contrario. Se puede observar que al ser  $\mathbf{Z}$  opuesto a  $\mathbf{W}$ , resulta que el módulo  $S = Z - W = \sqrt{3}/2$ . Esto justifica que desde el punto de vista cuántico hayamos representado estos operadores con la orientación relativa que aparece en la figura de la portada, con  $\mathbf{Z}$  en la misma dirección que  $\mathbf{S}$  y en sentido contrario la  $\mathbf{W}$ .

Si observamos a los espinores  $\Psi_i$ , éstos son vectores propios de  $Z^2$  con valor propio  $1(1+1) = 2$ , y de  $W^2$  con valor propio  $1/2(1/2 + 1) = 3/4$ , pero no son vectores propios de  $Z_3$  y de  $W_3$ . De hecho, la acción de estos operadores nos saca de este espacio vectorial de dimensión 4. No es un espacio de una representación irreducible de estos operadores de espín,  $Z_i$  y  $W_i$ , pero sí de los operadores  $S_i$ , de los que es una suma directa de dos representaciones irreducibles de valor  $s = 1/2$ .

La proyección del operador de espín  $\mathbf{W}$  sobre los ejes del cuerpo, es decir, los operadores  $\mathbf{T}$ , toman la misma forma que en el caso anterior (3.82)

$$T_1 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & i\mathbb{I} \\ -i\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad (3.95)$$

ya que las funciones  $\Psi_1$  y  $\Psi_2$  son vectores propios de  $T_3$  con valor propio  $1/2$ , mientras que las funciones  $\Psi_3$  y  $\Psi_4$  lo son con valor propio  $-1/2$ , y por lo tanto los espinores  $\Psi_i$  generan un espacio invariante para los operadores  $S_i$  y  $T_j$ . En efecto, la base formada por las funciones propias simultáneas del operador espín total  $S^2$ ,  $S_3$  y  $T_3$ , y la representación de los ket, es la misma que en el caso de los  $\Phi_i$  dados en (3.77)-(3.80).

La expresión en esta base de las componentes de los vectores unidad  $\mathbf{e}_i$  viene dada por

$$\mathbf{e}_1 = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & i\boldsymbol{\sigma} \\ -i\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (3.96)$$

Podemos observar que las matrices de los operadores  $\mathbf{W} = T_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i T_i$ , pero los  $T_i$  no se pueden obtener de la representación matricial como  $T_i = \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_i$ , ya que el espacio de Hilbert de dimensión 4 generado por los espinores  $\Psi_i$ , (3.89)-(3.92), no es irreducible para los operadores  $e_{ij}$  y los  $W_i$ , pero sí lo es para los  $T_i$ .

### 3.6. Resumen de Mecánica Clásica y Cuántica

Vamos a esquematizar aspectos generales de la descripción de las partículas elementales clásicas y cuánticas.

#### Mecánica Clásica

**Estados:** Cada punto  $x \in X$  del espacio cinemático  $X$ .

**Partícula elemental:**  $X$  es un espacio homogéneo del grupo cinemático  $G$ .

**Observables :** Toda función de las variables cinemáticas y de sus derivadas.

**Transformación del estado:**  $x' = gx \equiv f(x, g)$ ,  $g \in G$ .

**Partícula elemental:**  $\tilde{L}_0 = T\dot{t} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\omega}$ .

**Transformación de la Lagrangiana:**  $\tilde{L}'(x', \dot{x}') = \tilde{L}(x, \dot{x}) + d\alpha(g, x)/d\tau$

**Interacción:**  $\tilde{L}_I = -eA_0(t, \mathbf{r})\dot{t} + e\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}}$ .

**Constantes Noetherianas (no rel.)**  $\mathcal{G} \otimes SO(3)_L$ :

$$H = -T - \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{U}}{dt}, \quad \mathbf{P} = m\mathbf{u} - \frac{d\mathbf{U}}{dt}, \quad \mathbf{K} = m\mathbf{r} - \mathbf{P}t - \mathbf{U}, \quad \mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{u} \times \mathbf{U} + \mathbf{W},$$

$$T_i = \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

**Constantes Noetherianas (relativ.)**  $\mathcal{P} \otimes SO(3)_L$ :

$$H = -T - \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{U}}{dt}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{R} - \frac{d\mathbf{U}}{dt}, \quad \mathbf{K} = H\mathbf{r}/c^2 - \mathbf{P}t - \mathbf{S} \times \mathbf{u}/c^2, \quad \mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{u} \times \mathbf{U} + \mathbf{W},$$

$$T_i = \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

**Algunos observables**

$$H = \pm\gamma(v)mc^2, \quad \mathbf{P} = \pm\gamma(v)m\mathbf{v} = \frac{H}{c^2}\mathbf{v}, \quad \mathbf{S} = \mp\gamma(v)m(\mathbf{r} - \mathbf{q}) \times \mathbf{u}.$$

**Invariantes (no relativ.)**

$$m, \quad H - \frac{\mathbf{P}^2}{2m} = 0, \quad \mathbf{S}_{CM}^2 = \left( \mathbf{J} - \frac{1}{m}\mathbf{K} \times \mathbf{P} \right)^2, \quad \mathbf{T}^2 = \mathbf{W}^2$$

**Invariantes (relativ.)**

$$p_\mu p^\mu = (H/c)^2 - \mathbf{P}^2 = m^2 c^2, \quad w_\mu w^\mu = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{S}_{CM})^2 - (H\mathbf{S}_{CM}/c)^2 = -m^2 c^2 S^2, \quad \mathbf{T}^2 = \mathbf{W}^2.$$

$$\mathbf{S}_{CM} = \mathbf{J} - \mathbf{q} \times \mathbf{P}, \quad H\mathbf{S}_{CM}/c = H\mathbf{J}/c^2 - \mathbf{K} \times \mathbf{P}, \quad \mathbf{K} = H\mathbf{q}/c^2 - \mathbf{P}t.$$

### Mecánica Cuántica

**Estados:** Cada vector de norma unidad  $|\phi\rangle$ ,  $\phi(x) \in \mathbb{L}^2(X)$  del espacio de Hilbert  $\mathbb{L}^2(X)$ , sobre el espacio cinemático  $X$ .

**Partícula elemental:**  $\mathbb{L}^2(X)$  es el espacio de Hilbert de una representación proyectiva unitaria irreducible del grupo cinemático  $G$ .

**Observables :** Todo operador lineal autoadjunto sobre el espacio de Hilbert.

**Transformación del estado:**

$$|\phi'\rangle = U(g)|\phi\rangle, \phi'(x) = U(g)\phi(x) = \phi(g^{-1}x) \exp\left\{\frac{-i}{\hbar}\alpha(g^{-1};x)\right\},$$

y los operadores unitarios y sus generadores infinitesimales

$$U(g) = \exp\left\{\frac{-i}{\hbar}g^\sigma X_\sigma\right\}, \quad X_\sigma = \frac{\hbar}{i}u_\sigma^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} - \lambda_\sigma(x), \quad \lambda_\sigma(x) = \frac{\partial\alpha(g,x)}{\partial g^\sigma}\Big|_{g=0}.$$

**Generadores (no relativ.)**  $\mathcal{G} \otimes SO(3)_L$ :

$$H = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{P} = \frac{\hbar}{i}\nabla, \quad \mathbf{K} = m\mathbf{r} - \mathbf{P}t - \mathbf{U}, \quad \mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{u} \times \mathbf{U} + \mathbf{W}.$$

$$\mathbf{U} = \frac{\hbar}{i}\nabla u, \quad \mathbf{W} = \frac{\hbar}{2i}(\nabla_\rho + \boldsymbol{\rho} \times \nabla_\rho + \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_\rho)), \quad \mathbf{S} = \mathbf{u} \times \mathbf{U} + \mathbf{W},$$

$$T_i = \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad \mathbf{T} = \frac{\hbar}{2i}(\nabla_\rho - \boldsymbol{\rho} \times \nabla_\rho + \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_\rho)),$$

**Generadores (relativ.)**  $\mathcal{P} \otimes SO(3)_L$ :

$$H = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{P} = \frac{\hbar}{i}\nabla, \quad \mathbf{K} = H\mathbf{r}/c^2 - \mathbf{P}t - \mathbf{S} \times \mathbf{u}/c^2, \quad \mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{u} \times \mathbf{U} + \mathbf{W}.$$

$$\mathbf{U} = \frac{\hbar}{i}\nabla u, \quad \mathbf{W} = \frac{\hbar}{2i}(\nabla_\rho + \boldsymbol{\rho} \times \nabla_\rho + \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_\rho)), \quad \mathbf{S} = \mathbf{u} \times \mathbf{U} + \mathbf{W}.$$

$$T_i = \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad \mathbf{T} = \frac{\hbar}{2i}(\nabla_\rho - \boldsymbol{\rho} \times \nabla_\rho + \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_\rho)),$$

**Invariantes-Operadores de Casimir (no relativ.)**

$$m, \quad H - \frac{\mathbf{P}^2}{2m} = 0, \quad \mathbf{S}_{CM}^2 = \left(\mathbf{J} - \frac{1}{m}\mathbf{K} \times \mathbf{P}\right)^2, \quad \mathbf{T}^2 = \mathbf{W}^2$$

**Invariantes-Operadores de Casimir (relativ.)**

$$p_\mu p^\mu = (H/c)^2 - \mathbf{P}^2 = m^2 c^2, \quad w_\mu w^\mu = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{S}_{CM})^2 - (H\mathbf{S}_{CM}/c)^2 = -m^2 c^2 s(s+1)\hbar^2, \quad \mathbf{T}^2 = \mathbf{W}^2.$$

**Ecuación de Dirac**

$$H - \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} - \frac{1}{c^2}\mathbf{S} \cdot \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{u}\right) = 0.$$





## Capítulo 4

# Partícula de Dirac

### 4.1. Cuantización del modelo $u = c$

Consideremos el modelo de Luxones, con  $u = c$  y  $\dot{\mathbf{u}} \neq 0$ . Estamos describiendo dos tipos de partículas con un movimiento circular del centro de carga alrededor del centro de masa, a la velocidad  $c$ .

Para la partícula ( $H > 0$ ), en el sistema de referencia del centro de masa, (ver Fig.4.1) el centro de carga describe un círculo de radio  $R_0 = S/mc$ , siendo el espín constante y ortogonal al plano de la trayectoria. Para la antipartícula, con la misma orientación del espín, el movimiento de la carga es en sentido contrario al de la figura.

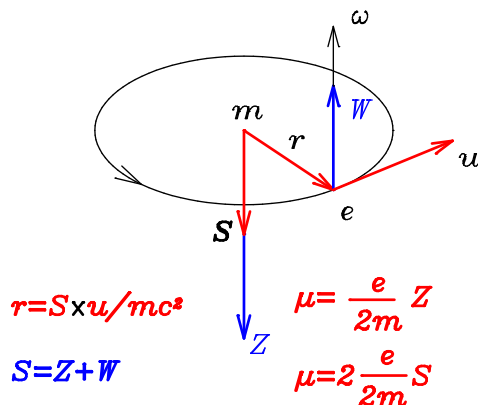


Figura 4.1: Movimiento del centro de carga de la partícula ( $H > 0$ ), para el observador del C.M.

Si hacemos el análisis para el observador del centro de masa, la partícula se reduce a un sistema mecánico de tres grados de libertad: las dos coordenadas  $x$  e  $y$  del centro de carga en el plano de la trayectoria y la orientación  $\alpha$  del sistema cartesiano local asociado al punto y que rota con velocidad angular  $\omega$ . Pero estos tres grados de libertad no son independientes. La fase  $\alpha$  es la misma que la del movimiento orbital. Pensad por ejemplo, que el triedro local sea el triedro de Frenet-Serret. Finalmente, como el movimiento es circular de radio constante, solamente nos queda un sólo grado de libertad, por ejemplo, la coordenada  $x$ . Para el observador del centro de masa, la partícula (y la antipartícula) es equivalente a un oscilador armónico unidimensional de pulsación  $\omega = mc^2/S$  y amplitud  $R_0$ , pero en su estado fundamental. El Principio atómico

requiere que como oscilador armónico no puede tener estados excitados.

Como la energía del estado fundamental del oscilador armónico unidimensional es  $\hbar\omega/2$ , si la identificamos con la energía de la partícula en este referencial  $+mc^2$ , esto implica que el parámetro clásico  $S$  tiene que tomar necesariamente el valor  $S = \hbar/2$ . Todos los sistemas Lagrangianos que posean el mismo espacio cinemático corresponden al ser cuantizados únicamente a partículas (y antipartículas) de espín  $1/2$ . Y esto es independiente del tipo de Lagrangiana que consideremos y que esté definida en el mismo espacio cinemático.

## 4.2. Ecuación de Dirac

Las variables cinemáticas de esta partícula transforman bajo  $\mathcal{P}$  de acuerdo con

$$t'(\tau) = \gamma t(\tau) + \gamma(\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{r}(\tau))/c^2 + b, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{r}'(\tau) = R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{r}(\tau) + \gamma\mathbf{v}t(\tau) + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)c^2}(\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{r}(\tau))\mathbf{v} + \mathbf{a}, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{u}'(\tau) = \frac{R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{u}(\tau) + \gamma\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{u}(\tau))\mathbf{v}\gamma^2/(1+\gamma)c^2}{\gamma(1 + \mathbf{v} \cdot R(\boldsymbol{\mu})\mathbf{u}(\tau)/c^2)}, \quad (4.3)$$

$$\boldsymbol{\rho}'(\tau) = \frac{\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\rho}(\tau) + \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\rho}(\tau) + \mathbf{F}_c(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}; \mathbf{u}(\tau), \boldsymbol{\rho}(\tau))}{1 - \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\rho}(\tau) + G_c(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}; \mathbf{u}(\tau), \boldsymbol{\rho}(\tau))}, \quad (4.4)$$

donde las funciones  $\mathbf{F}_c$  y  $G_c$  vienen dadas en (2.130) y (2.131), respectivamente. Al cuantizar esta partícula, la función de onda es una función compleja  $\Phi(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$  de todas las variables cinemáticas. Para el grupo de Poincaré todos los exponentes y por lo tanto todas las funciones gauge sobre sus espacios homogéneos son nulas, por lo que las Lagrangianas se pueden escoger estrictamente invariantes. Las representaciones proyectivas son verdaderas representaciones, por lo que los diez generadores sobre el espacio de Hilbert, teniendo en cuenta (4.1)-(4.4) y (3.14) vienen dados por:

$$H = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{P} = \frac{\hbar}{i} \nabla, \quad \mathbf{K} = \mathbf{r} \frac{i\hbar}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} - t \frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \times \mathbf{u}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \frac{\hbar}{i} \nabla + \mathbf{S}, \quad (4.6)$$

donde el operador  $\mathbf{S}$ , que es el momento angular con respecto al punto  $\mathbf{r}$ , es el operador espín de Dirac, que va a venir dado por el operador diferencial sobre las variables  $\mathbf{u}$  y  $\boldsymbol{\rho}$

$$\mathbf{S} = \mathbf{u} \times \frac{\hbar}{i} \nabla_{\mathbf{u}} + \frac{\hbar}{2i} \{ \nabla_{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\rho} \times \nabla_{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\rho}}) \} = \mathbf{u} \times \mathbf{U} + \mathbf{W}, \quad (4.7)$$

siendo  $\nabla_{\mathbf{u}}$  y  $\nabla_{\boldsymbol{\rho}}$  los operadores gradiente con respecto a  $\mathbf{u}$  y  $\boldsymbol{\rho}$ , como en el caso Galileano. El operador  $\mathbf{S}$  no es una constante del movimiento, ni siquiera para la partícula libre.

Para obtener el conjunto completo de observables que conmutan, empecemos por el operador de Casimir, u operador de Klein-Gordon

$$H^2 - c^2 \mathbf{P}^2 = m^2 c^4. \quad (4.8)$$

Los operadores  $H$  y  $\mathbf{P}$  únicamente derivan a la función de onda con respecto al tiempo  $t$  y a la posición  $\mathbf{r}$ , respectivamente. El operador de espín  $\mathbf{S}$  deriva con respecto a la velocidad y la orientación, por lo que conmuta con el operador de Klein-Gordon (4.8). Podemos por lo tanto encontrar funciones propias simultáneas de los operadores (4.8),  $S^2$  y  $S_3$ . Esto nos permite buscar soluciones en variables separadas, de tal manera que la función de onda la podemos reescribir como

$$\Phi(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = \sum_i \psi_i(t, \mathbf{r}) \chi_i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}), \quad (4.9)$$

donde las  $\psi_i(t, \mathbf{r})$  describen la parte espacio-temporal y las  $\chi_i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$  representan a la parte que describe la estructura del espín. En consecuencia

$$(H^2 - c^2 \mathbf{P}^2 - m^2 c^4) \psi_i(t, \mathbf{r}) = 0, \quad (4.10)$$

cada una de las partes espacio-temporales satisfacen la ecuación the Klein-Gordon, mientras que las que describen la estructura interna, satisfacen

$$S^2 \chi_i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = s(s+1) \hbar^2 \chi_i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}), \quad (4.11)$$

$$S_3 \chi_i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = m_s \hbar \chi_i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}). \quad (4.12)$$

En el Apéndice 3.5 se han encontrado soluciones de estas últimas ecuaciones. En particular, estamos interesados en las soluciones que describan partículas de espín 1/2. Estas soluciones son también vectores propios de la proyección del operador espín sobre los ejes del cuerpo  $T_3$ , por lo que la solución general de un espinor de espín 1/2 es un objeto de cuatro componentes.

Para partículas de espín 1/2, si tomamos como funciones propias las  $\chi(\boldsymbol{\rho})$  de  $S^2$  con valor propio 1/2, como el espín total debe ser 1/2, la parte orbital asociada al zitterbewegung  $\mathbf{Z} = \mathbf{u} \times \mathbf{U}$  solo puede contribuir con armónicos esféricos de valores propios  $z = 0$  y  $z = 1$ . Esto significa, que desde el punto de vista cuántico podemos encontrar hasta dos representaciones diferentes de partículas de espín 1/2, las caracterizadas por el singlete  $z = 0$  (¿leptones?) o por el triplete  $z = 1$  (¿quarks?) en tres posibles estados de su componente  $z_3$ . Si hubiéramos denominado a la parte  $Z$  del espín como el **color**, podríamos tener dos clases de partículas de Dirac, las que no tienen color (leptones) y las coloreadas (quarks). Los tres colores correspondientes a los valores propios de  $Z_3$  son inobservables porque los estados  $\Psi_i$  (3.89-3.92) son vectores propios de  $S_3$  y  $T_3$  pero no de  $Z_3$ . Sin embargo, esta interpretación de  $Z_3$  como si representara el color como en el modelo estándar no es del todo clara. Bastaría con demostrar que los modelos con  $z = 0$  no son consistentes, tras la segunda cuantización, con la cromodinámica cuántica mientras que sí lo son los modelos con  $z = 1$ . En cualquier caso, ambos modelos satisfacen la ecuación de Dirac<sup>1</sup>, y por lo tanto describen partículas de Dirac, como vamos a ver.

Para  $z = 0$ , las funciones de espín 1/2  $\chi_i(\boldsymbol{\rho})$  son combinaciones lineales de las cuatro funciones  $\Phi_i$  (3.77)-(3.80) y en el caso  $z = 1$  son combinaciones lineales de las cuatro  $\Psi_i$  de (3.89)-(3.92), de tal manera que el factor que aparece en frente de los armónicos esféricos es 1 porque como  $u = c$ , resulta ser una constante. El espacio de Hilbert que describe la estructura interna de una partícula de Dirac es isomorfo al espacio de Hilbert cuatridimensional  $\mathbb{C}^4$ .

Si tenemos dos direcciones arbitrarias en el espacio, caracterizadas por los vectores unidad  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  respectivamente, y  $S_{\mathbf{u}}$  y  $S_{\mathbf{v}}$  son las proyecciones del momento angular en esas direcciones,  $S_{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{S}$  y  $S_{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{S}$ , entonces  $S_{-\mathbf{u}} = -S_{\mathbf{u}}$ , y sus conmutadores son  $[S_{\mathbf{u}}, S_{\mathbf{v}}] = i\hbar S_{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}$ . En el caso del signo opuesto para las reglas de conmutación de los operadores  $T_i$ , por ejemplo,  $[T_1, T_2] = -i\hbar T_3$ , sugiere que los vectores unidad  $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_3$ , y sus permutaciones cíclicas  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ . Por lo tanto los vectores unidad  $\mathbf{e}_i$  ligados al cuerpo, no solamente poseen como valores propios  $\pm 1/3$ , sino que se comportan en el caso cuántico como un triángulo inverso. En este caso los vectores  $\mathbf{e}_i$  no son vectores arbitrarios en el espacio, sino vectores ligados a los ejes del cuerpo que giran y por lo tanto no son observables compatibles, de tal manera que la medida de las componentes, por ejemplo de  $\mathbf{e}_i$ , producirá una interacción con el cuerpo que enmascarará la medida de los otros.



<sup>1</sup> **Paul Adrien Maurice Dirac** Nace el 8 de agosto de 1902 en Bristol, Gloucestershire, Inglaterra y fallece el 20 de octubre de 1984 en Tallahassee, Florida, USA. Se gradúa como ingeniero eléctrico en Bristol y después se dedica a la matemática en el St John's College de Cambridge. Su artículo del año 1925 juntamente con los dos de 1928 sobre la estructura del electrón y la ecuación que lleva su nombre, y la publicación de *The principles of Quantum Mechanics* en 1930 le valieron el Premio Nobel en 1933. Se le considera como uno de los creadores del formalismo cuántico.

Usaremos esta interpretación de un triedro inverso asociado a las partículas más adelante, cuando analicemos la quiralidad en la sección 4.2.7. Para las antipartículas el comportamiento es el contrario, como un triedro directo.

Los operadores  $S_i$  y  $T_i$  poseen la representación matricial obtenida anteriormente, que es

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{W} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

$$T_1 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & i\mathbb{I} \\ -i\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}$  representan las tres matrices de Pauli y  $\mathbb{I}$  es la matriz unidad  $2 \times 2$ .

Análogamente, las representaciones matriciales de las nueve componentes de los vectores unidad  $(\mathbf{e}_i)_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  da lugar a dos conjuntos alternativos de representaciones, dependiendo de que la contribución del zitterbewegung sea  $z = 0$  o  $z = 1$ . En el primer caso, tenemos:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & i\boldsymbol{\sigma} \\ -i\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

mientras que en el caso  $z = 1$  la representación es

$$\mathbf{e}_1 = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & i\boldsymbol{\sigma} \\ -i\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Conviene observar que las diferentes componentes de los observables  $\mathbf{e}_i$  no son, en general, observables compatibles, puesto que vienen representadas por operadores que no conmutan.

Si finalmente escribimos la función de onda para partículas de espín  $1/2$  en la siguiente forma, para el caso  $z = 0$ ,

$$\Phi_{(0)}(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{i=4} \psi_i(t, \mathbf{r}) \Phi_i(\alpha, \theta, \phi), \quad (4.17)$$

resulta ser independiente de las variables  $\mathbf{u}$ , y en el caso  $z = 1$ , mediante

$$\Phi_{(1)}(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{i=4} \psi_i(t, \mathbf{r}) \Psi_i(\beta, \lambda; \alpha, \theta, \phi). \quad (4.18)$$

donde  $\beta$  y  $\lambda$  representan la dirección del vector  $\mathbf{u}$ . Por lo tanto, una vez que las funciones  $\Phi_i$  o  $\Psi_j$  que describen la estructura interna quedan identificadas con las cuatro funciones ortogonales y de norma unidad (dadas en el apéndice en (4.93-4.96) y ((4.97-4.100)), respectivamente), que son los vectores unidad de una base del espacio de Hilbert interno,  $\mathbb{C}^4$ , la función de onda más general resulta ser un objeto de cuatro componentes. Las seis componentes del espín  $S_i$  y  $T_j$ , juntamente con las nueve componentes  $(\mathbf{e}_i)_j$ , y la matriz unidad  $4 \times 4$ , completamente agotan las 16 matrices hermíticas  $4 \times 4$ , linealmente independientes. Forman por lo tanto una base vectorial del álgebra de Dirac. De esta forma, cualquier otro observable que sea invariante por traslación, y que describa por lo tanto parte de la estructura interna, por ejemplo el operador velocidad o aceleración, velocidad angular, etc., debe ser posible expresarlo en términos de una combinación lineal real de las 16 matrices mencionadas. Veremos en la Sec. 4.3 que la orientación interna, caracteriza completamente la estructura interna del electrón.

El operador velocidad en la base  $\Psi_i$  se calculará en función de sus componentes en coordenadas polares esféricas

$$u_1 = c \sin \beta \cos \lambda, \quad u_2 = c \sin \beta \sin \lambda, \quad u_3 = c \cos \beta.$$

Su representación matricial en esta base es totalmente nula puesto que estos vectores son vectores propios de  $S^2$ ,  $S_3$  y  $T_3$  y en estos vectores el valor esperado de los operadores de velocidad es estrictamente cero pero con una gran dispersión.

El operador espín  $\mathbf{S} = \mathbf{u} \times \mathbf{U} + \mathbf{W}$  con respecto al centro de carga, que como se ve en (3.93) y (4.13), coincide con la representación habitual del operador espín de Dirac.

#### 4.2.1. Operador de Dirac

Si consideramos la expresión del momento cinemático para las partículas libres con  $u = c$

$$\mathbf{K} = \frac{H}{c^2} \mathbf{r} - t\mathbf{P} - \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \times \mathbf{u},$$

y tomamos la derivada temporal de esta expresión seguida del producto escalar con el vector  $\mathbf{u}$ , nos conduce a una expresión invariante Poincaré (Operador de Dirac):

$$H - \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} - \frac{1}{c^2} \left( \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{S} = 0. \quad (4.19)$$

Cuando el operador de Dirac actúa sobre una función de onda cualquiera  $\Phi_{(0)}$  o  $\Phi_{(1)}$ , sabemos que  $H$  y  $\mathbf{P}$  poseen la representación diferencial dada en (4.5) y el espín la representación diferencial (4.7), o la representación matricial equivalente (4.13), pero en principio no sabemos cómo representar la velocidad  $\mathbf{u}$  y el observable  $(d\mathbf{u}/dt) \times \mathbf{u}$ . Sin embargo, sabemos que para esta partícula  $\mathbf{u}$  y  $d\mathbf{u}/dt$  son vectores ortogonales y que juntamente con el vector  $\mathbf{u} \times d\mathbf{u}/dt$  forman un triedro ortogonal directo, y que para el observador del centro de masa el centro de carga describe un círculo de radio  $R_0 = \hbar/2mc$  en el plano que contiene a  $\mathbf{u}$  y  $d\mathbf{u}/dt$ .

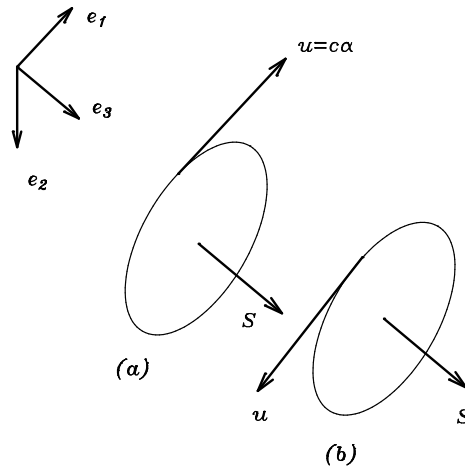


Figura 4.2: Representación de los ejes locales y diferentes observables para la solución (a)  $H > 0$  y para la (b)  $H < 0$ . Esta orientación nos produce una ecuación de Dirac en la representación de Pauli-Dirac.

#### Representación de Pauli-Dirac

Consideremos en primer lugar el caso  $z = 0$ . Como  $\mathbf{u}$  y  $d\mathbf{u}/dt$  son observables invariantes por traslación, son elementos del álgebra de Dirac. De aquí resulta que podemos relacionar estos tres vectores con los tres vectores que definen el triedro inverso (left-handed) que describe la orientación  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{e}_3$  en su representación (4.15). Entonces, como se muestra en la parte (a)

de la Figura 4.2 y para la partícula,  $H > 0$ , tenemos que  $\mathbf{u} = a\mathbf{e}_1$  y  $d\mathbf{u}/dt \times \mathbf{u} = b\mathbf{e}_3$ , donde  $a$  y  $b$  son números constantes, reales y positivos. Por lo tanto, el tercer término del operador de Dirac es  $(b/c^2)\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{S} = (b/c^2)T_3$ , y el operador (4.19) queda

$$H - a\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_1 - \frac{b}{c^2}T_3 = 0. \quad (4.20)$$

Si hacemos la identificación con la antipartícula,  $H < 0$ , la parte (b) de la Figura 4.2, la relación de los observables anteriores es opuesta a la obtenida anteriormente, pero ahora con los coeficientes  $-a$  y  $-b$ , respectivamente, es decir, obtenemos

$$H + a\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_1 + \frac{b}{c^2}T_3 = 0, \quad (4.21)$$

la cual corresponde claramente al cambio  $H \rightarrow -H$  en la ecuación (4.20). Explícitamente (4.20) aparece como:

$$H - \frac{a}{3} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} - \frac{b\hbar}{2c^2} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} = 0, \quad \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} P_3 & P_1 - iP_2 \\ P_1 + iP_2 & -P_3 \end{pmatrix}.$$

Si multiplicamos (4.21) por (4.20), teniendo presente que  $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_1)T_3 + T_3(\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_1) = 0$ , obtenemos una expresión que se satisface tanto para la partícula como para la antipartícula

$$H^2 - \frac{a^2}{9}\mathbf{P}^2\mathbb{I} - \frac{b^2\hbar^2}{4c^4}\mathbb{I} = 0, \quad (4.22)$$

y que es solamente una relación algebraica entre  $H^2$  y  $\mathbf{P}^2$ , independiente del espín. Si identificamos esta expresión con el operador de Klein-Gordon (4.8), el cual también contiene soluciones con  $H > 0$  y  $H < 0$ , esto conduce a  $a = 3c$  y  $b = 2mc^4/\hbar = c^3/R_0$  y substituyendo en (4.20) obtenemos la ecuación de Dirac:

$$H - c\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\alpha} - \beta mc^2 = 0, \quad (4.23)$$

donde las matrices de Dirac tradicionales  $\boldsymbol{\alpha}$  y  $\beta$  son hermiticas y vienen dadas por

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \sim T_3, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \sim \mathbf{e}_1. \quad (4.24)$$

Habitualmente la ecuación de Dirac se escribe de otra forma. Si en (4.23) multiplicamos todo por la izquierda por la matriz  $\beta$ , como  $\beta^2 = \mathbb{I}$ , se llega a

$$\beta H - c\mathbf{P} \cdot \beta\boldsymbol{\alpha} - mc^2 = 0, \quad \gamma^0 P_0 - \gamma^i P^i - mc = 0, \quad \gamma^\mu P_\mu - mc = 0,$$

por lo que las matrices  $\gamma^\mu$  de Dirac son

$$\gamma^0 \equiv \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} \equiv \gamma^0 \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

es decir, hemos obtenido la **representación de Pauli-Dirac**, donde  $3\mathbf{e}_1$  juega el papel de un vector unidad en la dirección de la velocidad. La matriz  $\gamma^0$  es hermitica y las  $\gamma^i$  antihermiticas.

Si estos coeficientes los hubiéramos substituído en la ecuación correspondiente a la antipartícula (4.21) corresponde a la representación equivalente que se produce por el cambio  $\beta \rightarrow -\beta$  y  $\boldsymbol{\alpha} \rightarrow -\boldsymbol{\alpha}$ . Como veremos en la sección 4.2.7 al analizar la quiralidad, habríamos llegado a la misma expresión de la ecuación de Dirac que en (4.23) con las mismas matrices de (4.24) si hubiéramos partido del modelo de antipartícula (b) pero asociando al electrón los ejes  $\mathbf{e}_i$  opuestos a los de la figura 4.2, es decir un sistema de ejes directo (right-handed).

La ecuación de Dirac (4.23) manifiesta la relación que existe entre el momento temporal mecánico o energía  $H$ , que se expresa como suma de un término ligado al movimiento del centro de masa,  $c\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\alpha}$ , o energía de traslación, lineal en el momento lineal mecánico, y el término dependiente linealmente del espín, o energía de rotación. Esta relación es válida para la partícula libre, mientras que si el electrón interactúa con un campo electromagnético externo, esa relación la deben satisfacer solamente las partes mecánicas, ya que de acuerdo con el principio atómico no es modificada su estructura mecánica, por lo que la  $H = H_m + e\phi$  y  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_m + e\mathbf{A}$  totales, satisfacen

$$H = e\phi + c(\mathbf{P} - e\mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{\alpha} + \beta mc^2, \quad (4.26)$$

siendo  $\phi$  y  $\mathbf{A}$  los potenciales escalar y vectorial externos, respectivamente.

Al actuar sobre una función de onda arbitraria correspondiente a un posible estado de una partícula de Dirac, esta ecuación aparece en el caso libre actuando sobre las componentes espacio-temporales del espinor de Dirac como

$$(i\hbar[\gamma^\mu]_{ij}\partial_\mu - mc\delta_{ij})\psi_j(t, \mathbf{r}) = 0,$$

y en el caso de interacción con un campo electromagnético externo y debido al principio atómico, como

$$((i\hbar\partial_\mu - eA_\mu(t, \mathbf{r}))[\gamma^\mu]_{ij} - mc\delta_{ij})\psi_j(t, \mathbf{r}) = 0.$$

Para el observador del centro de masa ( $\mathbf{P} = 0$ ), y en (4.23) el operador  $H$  se reduce a

$$H = \beta mc^2 = mc^2 \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix},$$

luego los espinores  $\psi$  que solamente tuvieran no nulas las componentes superiores  $\psi_1$  y  $\psi_2$  son vectores propios de  $H$  con valor propio  $+mc^2$  mientras que aquellos espinores con componentes no nulas  $\psi_3$  y  $\psi_4$  son vectores propios de  $H$  con valor propio  $-mc^2$ .

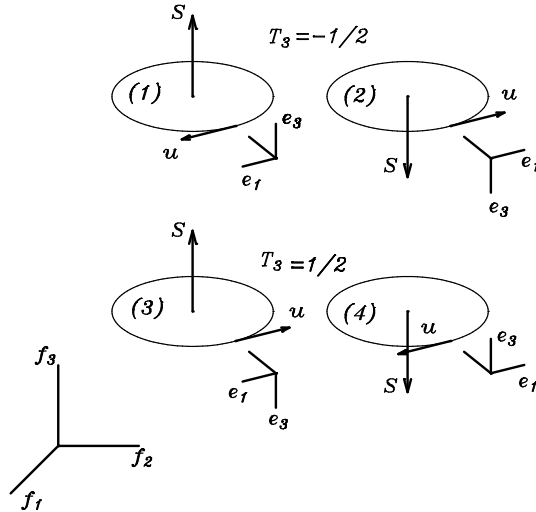


Figura 4.3: Orientación de los ejes del cuerpo en la representación de Pauli-Dirac, correspondientes a los cuatro estados básicos  $\Phi_i$  de (3.89)-(3.92), respectivamente, con el vector  $e_2$  en la dirección de la aceleración y  $e_1$  y  $-e_1$  en la dirección de la velocidad. El sistema de ejes local en los casos (1) y (2) es left-handed, mientras que es right-handed en (3) y (4), por corresponder a la antipartícula.

Podemos obtener de forma análoga la ecuación de Dirac en el caso de que la parte del zitterbewegung valga  $z = 1$ , utilizando el conjunto de matrices (4.16) en vez del conjunto



(4.15), ya que son múltiplos uno del otro y lo único que puede cambiar es algún factor constante en los cálculos intermedios. Explícitamente, la ecuación equivalente a la (4.20) es ahora la

$$H + \frac{a}{9} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} + \frac{b\hbar}{6c^2} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} = 0, \quad \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} P_3 & P_1 - iP_2 \\ P_1 + iP_2 & -P_3 \end{pmatrix}.$$

Al multiplicarla por ella misma con  $H$  cambiado por  $-H$ , se obtiene como en el caso anterior después de indentificarla con la ecuación de Klein-Gordon

$$H^2 - \frac{a^2}{81} \mathbf{P}^2 \mathbb{I} - \frac{b^2 \hbar^2}{36c^4} \mathbb{I} = 0, \quad a = 9c, \quad b = 6 \frac{mc^4}{\hbar},$$

es decir como en (4.23) con las mismas matrices  $\boldsymbol{\alpha}$  y  $\beta$ :

$$H - c\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\alpha} - \beta mc^2 = 0.$$

Los cuatro estados básicos  $\Phi_i$ , (4.93)-(4.96) or (4.97)-(4.100), en la representación de Pauli-Dirac, se corresponden con los cuatro estados representados en la figura 4.3, donde los  $\mathbf{f}_i$  son los vectores unidad del sistema de referencia del laboratorio, y los  $\mathbf{e}_i$  los vectores unidad ligados al punto  $\mathbf{r}$ , con el vector  $\mathbf{e}_2$  en la dirección de la aceleración. En los estados (1) y (2) la proyección del espín  $\mathbf{W}$ , opuesto a  $\mathbf{S}$ , en el eje  $\mathbf{e}_3$ ,  $T_3$  es  $-1/2$ , mientras que los dos de abajo (3) y (4) corresponden a  $T_3 = 1/2$ , y ambos con las dos posibilidades de  $S_3 = \pm 1/2$  en los ejes del laboratorio. Conviene observar que los dos inferiores, se corresponden con los estados de la antipartícula, en los que el sistema de ejes es right-handed.

### Representación de Weyl de la ecuación de Dirac

La posible identificación de los observables internos con las diferentes combinaciones lineales reales de las matrices hermíticas  $\mathbf{e}_i$  conduce a diferentes representaciones equivalentes de las matrices de Dirac, y por lo tanto a diferentes expresiones para la ecuación de Dirac.

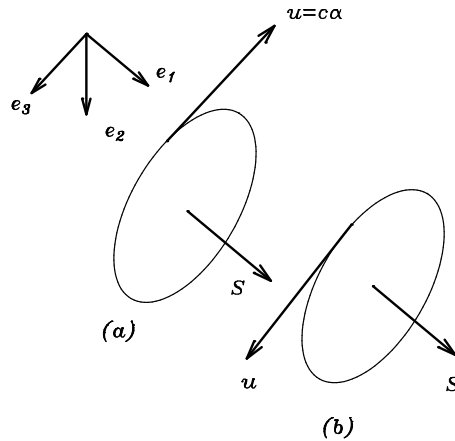


Figura 4.4: Orientación de los ejes en la representación de Weyl.

Por ejemplo, si realizamos la identificación que se sugiere en la Figura 4.4 para la partícula,  $\mathbf{u} = -a\mathbf{e}_3$  y el observable  $d\mathbf{u}/dt \times \mathbf{u} = b\mathbf{e}_1$  en términos de sendas constantes positivas  $a$  y  $b$ , obtenemos por el mismo método las matrices hermíticas

$$\beta_W = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \sim T_1, \quad \boldsymbol{\alpha}_W = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \sim -\mathbf{e}_3, \quad (4.27)$$

y así, las matrices gama resultan ser

$$\gamma_W^0 \equiv \beta = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_W \equiv \gamma^0 \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_W^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

es decir, la **representación de Weyl** de la ecuación de Dirac. Su interés reside en el análisis de las interacciones débiles de los fermiones que violan la conservación de la paridad, y se distinguen las partes quirales de izquierda (Left) de las derechas (Right) definidas por

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \psi, \quad \psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} \psi, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix},$$

por lo que las componentes superiores del espinor son Left y las inferiores Right. Con esta representación los generadores de las transformaciones del grupo de Lorentz que actúan sobre los espinores son

$$\mathbf{J} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}.$$

De esta forma una representación del grupo de Lorentz sobre los espinores toma la forma

$$D(\Lambda) = \begin{pmatrix} D^{(1/2,0)}(\Lambda) & 0 \\ 0 & D^{(0,1/2)}(\Lambda) \end{pmatrix}$$

por lo que las componentes superiores e inferiores transforman de manera independiente con las dos representaciones irreducibles no equivalentes  $2 \times 2$ , de  $SL(2, \mathbb{C})$ .

Cuando comparamos ambas representaciones, vemos que la representación de Weyl se obtiene a partir de la de Pauli-Dirac si es que rotamos el sistema de ejes del cuerpo un valor  $\pi/2$  alrededor del eje  $\mathbf{e}_2$ . De esta forma, el operador velocidad  $c\boldsymbol{\alpha}$  tiene sentido contrario a  $\mathbf{e}_3$ . Entonces, el operador de rotación es el

$$R(\pi/2, \mathbf{e}_2) = \exp\left(\frac{i\pi}{\hbar} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{W}\right) = \exp\left(\frac{i\pi}{\hbar} T_2\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \mathbb{I} \end{pmatrix}.$$

Podemos comprobar que  $R\gamma_{PD}^\mu R^\dagger = \gamma_W^\mu$ , donde  $\gamma_{PD}^\mu$  y  $\gamma_W^\mu$  son las matrices gama en las representaciones de Pauli-Dirac y de Weyl, respectivamente.

### Representación supersimétrica

Es aquella en que las matrices hermíticas de Dirac se escogen como

$$\beta_S = \begin{pmatrix} 0 & -i\mathbb{I} \\ i\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \sim -T_2, \quad \boldsymbol{\alpha}_S = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \sim \mathbf{e}_1. \quad (4.29)$$

y así las matrices  $\gamma^\mu$

$$\gamma_S^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i\mathbb{I} \\ i\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_S = \begin{pmatrix} -i\boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & i\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \gamma_S^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

Está relacionada con la de Pauli-Dirac mediante la transformación unitaria  $T_S \gamma_{PD}^\mu T_S^\dagger = \gamma_S^\mu$ . Esta transformación corresponde a una rotación de valor  $\pi/2$  alrededor del eje  $\mathbf{e}_1$ , en la representación de Pauli-Dirac

$$T_S = R(\pi/2, \mathbf{e}_1) = \exp\left(\frac{i\pi}{\hbar} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{W}\right) = \exp\left(\frac{i\pi}{\hbar} T_1\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & i\mathbb{I} \\ i\mathbb{I} & \mathbb{I} \end{pmatrix}.$$

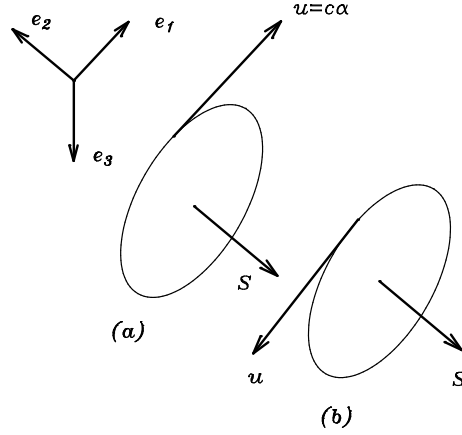


Figura 4.5: Orientación de los ejes locales en la representación Supersimétrica.

### Representación de Majorana

Como ecuación diferencial, la ecuación de Dirac se escribe

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi_i(t, \mathbf{r}) = 0,$$

como un operador diferencial lineal matricial de coeficientes constantes, que actúa sobre un vector columna de cuatro componentes, que son funciones complejas de  $t$  y  $\mathbf{r}$ . Si buscamos una representación en la que las matrices  $\gamma^\mu$  tengan todas sus componentes imaginarias puras, podemos hacer que en el sistema de ecuaciones diferenciales anterior todos los coeficientes sean constantes reales y por lo tanto buscar soluciones en las que las cuatro funciones  $\psi_i$  se puedan escoger reales. Esta es la **representación de Majorana**. En ella, las matrices hermíticas

$$\beta_M = \begin{pmatrix} 0 & i\mathbb{I} \\ -i\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \sim T_2, \quad \alpha_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}, \quad (4.31)$$

y así, las matrices gama resultan ser imaginarias puras

$$\gamma_M^0 \equiv \beta = \begin{pmatrix} 0 & i\mathbb{I} \\ -i\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_M^1 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_1 \\ -i\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_M^2 = \begin{pmatrix} i\mathbb{I} & 0 \\ 0 & -i\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad \gamma_M^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_3 \\ -i\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

De la representación de Pauli-Dirac a la representación de Majorana podemos pasar mediante la transformación unitaria

$$T_M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{I} + i\sigma_2 & \mathbb{I} - i\sigma_2 \\ -i\mathbb{I} + \sigma_2 & i\mathbb{I} + \sigma_2 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -i & -i & i & -i \\ i & -i & i & i \end{pmatrix}$$

mediante  $T_M\gamma_{PD}^\mu T_M^\dagger = \gamma_M^\mu$ .

Para el observador del centro de masa en el que  $H = \beta mc^2$ , los espinores de la forma

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} i\psi \\ 0 \\ \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i\psi \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix}, \quad H\Psi_i = mc^2\Psi_i, \quad i = 1, 2$$

son estados de  $H > 0$ , mientras que los espinores linealmente independientes de los anteriores

$$\Psi_3 = \begin{pmatrix} -i\psi \\ 0 \\ \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -i\psi \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix}, \quad H\Psi_i = -mc^2\Psi_i, \quad i = 3, 4$$

son estados de  $H < 0$ .

En la literatura también aparece otra representación de Majorana en la que las matrices  $\gamma_M$ , que siguen siendo imaginarias, se toman como:

$$\gamma_M^0 \equiv \beta = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_M^1 = \begin{pmatrix} i\sigma_3 & 0 \\ 0 & i\sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \gamma_M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_M^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1 \end{pmatrix}.$$

Como resumen, la representación de Pauli-Dirac conduce a que la matriz hermítica  $\beta$  es proporcional a la  $T_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{W}$ , y las matrices hermíticas  $\alpha$  a  $\mathbf{e}_1$ . La representación de Weyl es la que la matriz hermítica  $\beta$  es proporcional a la  $T_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{W}$  y las matrices hermíticas  $\alpha$  a  $-\mathbf{e}_3$ . La representación supersimétrica  $\beta$  es proporcional a  $-T_2 = -\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{W}$ , las matrices hermíticas  $\alpha$  a  $\mathbf{e}_1$ . La representación de Majorana es una transformación unitaria que combina los estados de partícula y antipartícula a partes iguales.

#### 4.2.2. Transformación gauge

Supongamos una transformación de cambio de fase, que afecte al estado de partícula, pero no a la antipartícula, en la representación de Dirac. Sobre el espinor de Dirac vendría dado por la transformación unitaria

$$G \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha}\psi_1 \\ e^{i\alpha}\psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_3 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} e^{i\alpha}\mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad G^{-1} = G^\dagger = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha}\mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix},$$

que afecta solamente a las componentes superiores. Esto en la representación de Pauli-Dirac

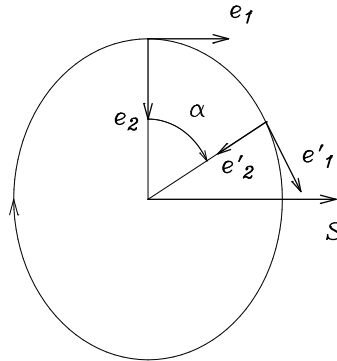


Figura 4.6: Cambio de fase de la partícula que corresponde a un giro  $\alpha$  de la carga en la dirección de su movimiento. El eje  $e_3$  y el espín  $S$  no son afectados por esta transformación.

supone que al actuar sobre los observables básicos con esta transformación unitaria

$$\begin{aligned}
 G\mathbf{e}_1G^\dagger &= \begin{pmatrix} 0 & e^{i\alpha}\boldsymbol{\sigma} \\ e^{-i\alpha}\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (\cos\alpha + i\sin\alpha)\boldsymbol{\sigma} \\ (\cos\alpha - i\sin\alpha)\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \cos\alpha\mathbf{e}_1 + \sin\alpha\mathbf{e}_2, \\
 G\mathbf{e}_2G^\dagger &= \begin{pmatrix} 0 & ie^{i\alpha}\boldsymbol{\sigma} \\ -ie^{-i\alpha}\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (-\sin\alpha + i\cos\alpha)\boldsymbol{\sigma} \\ (-\sin\alpha - i\cos\alpha)\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = -\sin\alpha\mathbf{e}_1 + \cos\alpha\mathbf{e}_2, \\
 G\mathbf{e}_3G^\dagger &= \mathbf{e}_3, \quad G\mathbf{S}G^\dagger = \mathbf{S}, \\
 GT_1G^\dagger &= \cos\alpha T_1 + \sin\alpha T_2, \quad GT_2G^\dagger = -\sin\alpha T_1 + \cos\alpha T_2, \quad GT_3G^\dagger = T_3.
 \end{aligned}$$

Esta transformación corresponde en la figura 4.6 al desplazamiento de una fase  $\alpha$  de la posición del centro de carga de la partícula. Si el cambio de fase afectase solamente a una de las componentes de los espinores básicos, representaría este cambio de fase del correspondiente vector básico del conjunto de la figura 4.3.

### 4.2.3. Dinámica de los observables

En la representación de Heisenberg, la derivada temporal de cualquier observable  $A$  es

$$\frac{dA}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, A] + \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (4.33)$$

La función de onda depende de las variables cinemáticas. Entre éstas está el tiempo. La evolución temporal corresponde a una traslación temporal generada por el Hamiltoniano  $H$ , de tal manera que  $\psi(t, x_1, \dots, x_n) = \exp(-iHt/\hbar)\psi(0, x_1, \dots, x_n)$ . El valor esperado en el instante  $t$  de un observable  $A$ , con el sistema en el estado  $\psi(t)$  es

$$\langle A(t) \rangle = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = \langle \psi(0) | e^{iHt/\hbar} A e^{-iHt/\hbar} | \psi(0) \rangle,$$

equivalente a tomar el valor esperado de un operador diferente  $A(t) = e^{iHt/\hbar} A e^{-iHt/\hbar}$ , pero en el estado inicial  $\psi(0)$ , independiente del tiempo, como si la carga estuviera quieta. En el instante  $t + \Delta t$

$$\langle A(t + \Delta t) \rangle = \langle \psi(t + \Delta t) | A | \psi(t + \Delta t) \rangle = \langle \psi(0) | e^{iH(t+\Delta t)/\hbar} A e^{-iH(t+\Delta t)/\hbar} | \psi(0) \rangle.$$

y la diferencia

$$\langle A(t + \Delta t) \rangle - \langle A(t) \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle \psi(0) | HA(t) - A(t)H | \psi(0) \rangle \Delta t,$$

por lo que

$$\frac{d\langle A(t) \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle \psi(0) | [H, A(t)] | \psi(0) \rangle = \langle \psi(0) | \frac{dA(t)}{dt} | \psi(0) \rangle.$$

De esta forma el cálculo de la variación temporal del valor esperado de un observable es equivalente al valor esperado del observable  $[H, A(t)]$  con respecto a cualquier estado inicial  $\psi(0)$ . Si el observable  $A$ , es una función explícita del tiempo, entonces es fácil ver que es el valor esperado del observable (4.33), con respecto al estado inicial arbitrario  $\psi(0)$  del sistema.

Podemos ver que para Dirac, el punto  $\mathbf{r}$  se mueve con la velocidad  $c$ . En efecto, el conmutador  $[H, \mathbf{r}]$  es distinto de cero debido a que  $[P_i, x_j] = -i\hbar\delta_{ij}$ , por lo que la velocidad de  $\mathbf{r}$  es

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, \mathbf{r}] = \frac{i}{\hbar}[c(\mathbf{P} - e\mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r}] = c\boldsymbol{\alpha},$$

incluso en interacción. Los valores propios de las matrices  $\alpha_i$  son  $\pm 1$ , por lo que si alguna componente del vector velocidad es medida con precisión, solamente puede ser  $\pm c$ .

La representación de Pauli-Dirac encontrada, es compatible con la aceleración  $d\mathbf{u}/dt$  a lo largo del vector  $\mathbf{e}_2$ . En efecto, en el sistema de referencia del centro de masa el Hamiltoniano de Dirac se reduce a  $H = \beta mc^2$ , y para el operador velocidad  $\mathbf{u} = c\boldsymbol{\alpha}$ , se tiene

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[mc^2\beta, c\boldsymbol{\alpha}] = \frac{2mc^3}{\hbar} \begin{pmatrix} 0 & i\boldsymbol{\sigma} \\ -i\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \frac{c^2}{R_0} 3\mathbf{e}_2, \quad (4.34)$$

donde  $c^2/R_0$  es el módulo constante de la aceleración en este sistema de referencia, y donde  $3\mathbf{e}_2$  juega el papel de vector unidad en esa dirección.

La derivada temporal del sistema cartesiano ligado al punto es

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\beta mc^2, \mathbf{e}_1] = \frac{c}{R_0}\mathbf{e}_2, \quad (4.35)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_2}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\beta mc^2, \mathbf{e}_2] = -\frac{c}{R_0}\mathbf{e}_1, \quad (4.36)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_3}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\beta mc^2, \mathbf{e}_3] = 0, \quad (4.37)$$

puesto que  $\mathbf{e}_3$  es ortogonal al plano de la trayectoria y no cambia, y donde  $c/R_0 = \omega$  es la velocidad angular del movimiento interno de la carga. Esta evolución temporal de los observables  $\mathbf{e}_i$  es la correcta si como hemos supuesto se trata de un triedro cartesiano inverso como se muestra en la Figura 4.2-(a). Es por esta razón que al comienzo del capítulo hemos supuesto que el triedro rota con la misma velocidad que la velocidad angular del movimiento del centro de carga.

Al mismo tipo de conclusión habríamos llegado si hubiéramos utilizado la representación de Weyl donde las matrices de Dirac vienen dadas en (4.27). En efecto, en esta representación

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\beta_W mc^2, \mathbf{e}_1] = 0, \quad (4.38)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_2}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\beta_W mc^2, \mathbf{e}_2] = \frac{c}{R_0}\mathbf{e}_3, \quad (4.39)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_3}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\beta_W mc^2, \mathbf{e}_3] = -\frac{c}{R_0}\mathbf{e}_2. \quad (4.40)$$

Para ser consistente con la consideración anterior de que los vectores  $3\mathbf{e}_i$ , juegan el papel de vectores unidad, esto implica que el espín, para el observador del centro de masa en la representación de Pauli-Dirac, debe tener la orientación de  $3\mathbf{e}_3$ . Este es el caso para las componentes superiores, mientras que para las inferiores (que en esta representación corresponden a estados con  $H < 0$ ) la orientación es la opuesta. Esto significa que para las partículas el correspondiente conjunto de ejes ligados al cuerpo forma un triedro inverso, mientras que para las antipartículas, el correspondiente conjunto de ejes, forma un triedro directo. Esto pone de manifiesto una diferencia en la quiralidad entre partículas y antipartículas, como veremos en la sección 4.2.7.

En general

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, \mathbf{S}] = \frac{i}{\hbar}[c\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \beta mc^2, \mathbf{S}] = c\mathbf{P} \times \boldsymbol{\alpha} \equiv \mathbf{P} \times \mathbf{u},$$

no es una constante del movimiento, pero para el observador del centro de masa, el operador espín  $\mathbf{u} \times \mathbf{U} + \mathbf{W}$  se reduce al espín con respecto al centro de masa  $\mathbf{S}$  que sí es constante en este referencial:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\beta mc^2, \mathbf{S}] = 0. \quad (4.41)$$

Únicamente la componente  $T_3$  del espín sobre los ejes del cuerpo, en la representación de Pauli-Dirac permanece constante mientras que las otras dos componentes  $T_1$  y  $T_2$  cambian debido a la rotación de estos ejes.

$$\frac{dT_1}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\beta mc^2, T_1] = \frac{c}{R_0}T_2, \quad (4.42)$$

$$\frac{dT_2}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\beta mc^2, T_2] = -\frac{c}{R_0}T_1, \quad (4.43)$$

$$\frac{dT_3}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\beta mc^2, T_3] = 0. \quad (4.44)$$

En cambio, es la componente  $T_1$  la que permanece constante en la representación de Weyl

$$\frac{dT_1}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\beta_W m c^2, T_1] = 0, \quad (4.45)$$

$$\frac{dT_2}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\beta_W m c^2, T_2] = \frac{c}{R_0} T_3, \quad (4.46)$$

$$\frac{dT_3}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\beta_W m c^2, T_3] = -\frac{c}{R_0} T_2. \quad (4.47)$$

Si se analiza desde un observador arbitrario, el movimiento es una hélice y la aceleración no es de módulo constante  $c^2/R_0$ , y el operador espín con respecto al centro de carga  $\mathbf{S}$  no es una constante del movimiento, ya que quien es constante es el momento angular total  $\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{S}$ , que se conserva.

#### 4.2.4. Conservación de la probabilidad

La ecuación de Dirac se escribe:

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\hbar}{i} \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi - m c^2 \beta \Phi = 0, \quad (4.48)$$

donde  $\Phi$  es el espinor (4.17) o el espinor (4.18) un espinor o vector columna de cuatro componentes,

$$\Phi(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) = \begin{pmatrix} \psi_1(t, \mathbf{r}) \\ \psi_2(t, \mathbf{r}) \\ \psi_3(t, \mathbf{r}) \\ \psi_4(t, \mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

una vez que las partes relativas a la dependencia de las variables  $\mathbf{u}$  y  $\boldsymbol{\alpha}$  se han sustituido por los cuatro espinores básicos. La velocidad  $\mathbf{u} = c\boldsymbol{\alpha}$  es el operador velocidad de Dirac escrito en términos de las matrices hermiticas  $4 \times 4$  de Dirac  $\boldsymbol{\alpha}$  y  $\beta = \gamma^0$ , es la matriz hermitica de Dirac, relacionada con el vector unidad sobre el que se proyecta el espín. Cada una de las funciones  $\psi_i(t, \mathbf{r})$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , es solución de la ecuación de Klein-Gordon,  $(\partial^\mu \partial_\mu + m^2 c^2 / \hbar^2) \psi_i = 0$ .

Si ahora tomamos la compleja conjugada y traspuesta de la expresión anterior,

$$-i\hbar \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} + \frac{\hbar}{i} \nabla \Phi^* \cdot \mathbf{u} - m c^2 \Phi^* \beta = 0. \quad (4.50)$$

donde  $\Phi^*$  representa el espinor fila, traspuesto y complejo conjugado del (4.49). Si a la primera ecuación (4.48) la multiplicamos por el vector fila  $\Phi^*$  por la izquierda y la (4.50) por el vector columna  $\Phi$  por la derecha, y restamos la segunda de la primera, el término en  $\beta$  se cancela, y se llega a

$$\frac{\partial(\Phi^* \Phi)}{\partial t} + \nabla(\Phi^* \mathbf{u} \Phi) = 0,$$

que llamando a  $\Phi^* \Phi = \sum \psi_i^* \psi_i = \rho(t, \mathbf{r})$  una función escalar y definida positiva que se interpreta como la densidad de probabilidad de presencia del electrón y a  $\Phi^* \mathbf{u} \Phi = \mathbf{j}(t, \mathbf{r})$ , como la densidad de corriente de probabilidad, la ecuación de Dirac nos produce localmente la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (4.51)$$

Existe por lo tanto conservación local de la probabilidad, en cada punto  $(t, \mathbf{r}) \in \mathbb{R}^4$ , del espacio tiempo. Esta ley de conservación implica que la integral a  $t$  constante  $\int_V \rho dV$  se conserva cualesquiera que sea el volumen de integración  $V$ . Si este volumen es todo el espacio tridimensional, esa integral vale 1, como corresponde a una función de onda normalizada.

La densidad de corriente  $\mathbf{j} = \Phi^* \mathbf{u} \Phi = c \Phi^* \boldsymbol{\alpha} \Phi = c \Phi^* \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \Phi$ , que como  $(\gamma^0)^2 = \mathbb{I}$ , y definiendo el espinor conjugado como vector fila  $\tilde{\Phi} = \Phi^* \gamma^0$ , nos permite escribir la ecuación de continuidad en forma covariante en términos del tetravector  $j^\mu = c \tilde{\Phi} \gamma^\mu \Phi \equiv (c\rho, \mathbf{j})$ ,

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (4.52)$$

Si al tetravector  $j^\mu$ , lo multiplicamos por el valor de la carga  $e$ , obtenemos el tetravector densidad de corriente eléctrica, que también satisface la misma ecuación de continuidad, por lo que se refuerza la idea de que la distribución dada por la función de onda como función de  $t$  y  $\mathbf{r}$ , el punto  $\mathbf{r}$  representa la localización de la carga eléctrica del electrón.

Como el tetravector de densidad de corriente eléctrica es  $j^\mu = ec \tilde{\Phi} \gamma^\mu \Phi$ , la interacción con un campo externo se escribe en la forma del acoplamiento mínimo en términos de potenciales  $A_\mu(t, \mathbf{r})$ , que son solamente funciones de  $(t, \mathbf{r})$ :

$$j^\mu(t, \mathbf{r}) A_\mu(t, \mathbf{r}).$$

En electrodinámica cuántica no existe ningún otro acoplamiento entre los campos externos y las propiedades de la partícula, lo que refuerza la idea de que, efectivamente, lo que se está describiendo de forma clásica, es la evolución del centro de carga, es decir de un punto al que se le asocia el valor de una carga eléctrica  $e$  y ningún multipolo eléctrico o magnético. Y la función de onda lo que describe es la densidad de probabilidad de presencia de la carga eléctrica.

#### 4.2.5. Invariancia PCT

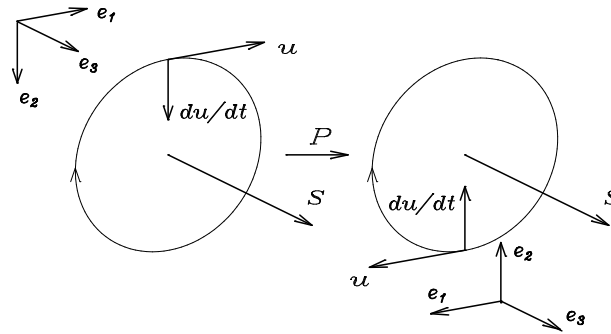


Figura 4.7: La inversión espacial del electrón en el sistema del centro de masa es equivalente a una rotación de valor  $\pi$  alrededor de  $\mathbf{S}$ . El sistema local de ejes permanece left-handed, ya que el carácter de partícula (o antipartícula) no cambia.

En la Figura 4.7 representamos la inversión espacial de la descripción del electrón, considerado como el luxón cuyo centro de carga se mueve alrededor de su centro de masa a la velocidad de la luz. Bajo la inversión  $P$  y desde el punto de vista del observador del centro de masa cambia de acuerdo con

$$P : \{\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}, \mathbf{u} \rightarrow -\mathbf{u}, du/dt \rightarrow -du/dt, \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}, H \rightarrow H, \mathbf{e}_1 \rightarrow -\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rightarrow -\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rightarrow \mathbf{e}_3\}.$$

En la representación de Pauli-Dirac (Figura 4.2), vemos que esta inversión equivale a una rotación de valor  $\pi$  alrededor del eje  $\mathbf{e}_3$  y, por lo tanto,

$$P \equiv R(\pi, \mathbf{e}_3) = \exp(i\pi \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{S}/\hbar) = \exp(i\pi T_3/\hbar) = i\gamma_0,$$



que es una de las posibles representaciones del operador paridad  $\pm\gamma_0$  o bien  $\pm i\gamma_0$ . En la representación de Weyl esto corresponde a una rotación de valor  $\pi$  alrededor del eje  $\mathbf{e}_1$  con lo que tomamos  $P \equiv i\gamma_0$ . Esto resulta de la compatibilidad con la conjugación de carga, según Racah.<sup>2</sup>

La inversión espacial no afecta al carácter left o right-handed del sistema de referencia local de vectores unidad  $\mathbf{e}_i$ , ya que transforma partícula en partícula y antipartícula en antipartícula. Podemos comprobar que con la transformación unitaria  $P \equiv i\gamma_0$ ,

$$PHP^\dagger = mc^2 P\beta P^\dagger = H, \quad PSP^\dagger = \mathbf{S}, \quad Pe_1P^\dagger = -\mathbf{e}_1, \quad Pe_2P^\dagger = -\mathbf{e}_2, \quad Pe_3P^\dagger = \mathbf{e}_3.$$

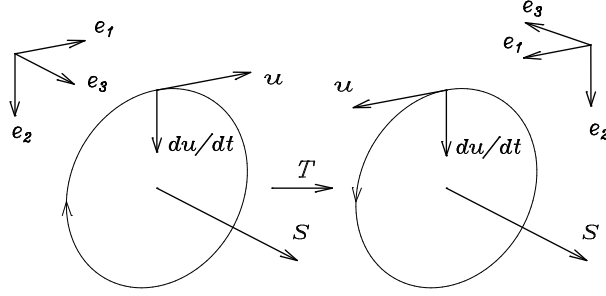


Figura 4.8: La inversión temporal del electrón produce una partícula cuyo momento temporal  $H$  es negativo.

En la Figura 4.8 representamos la inversión temporal, también para el observador del centro de masa,

$$T : \{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}, \mathbf{u} \rightarrow -\mathbf{u}, du/dt \rightarrow du/dt, \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}, H \rightarrow -H, \mathbf{e}_1 \rightarrow -\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rightarrow \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rightarrow \mathbf{e}_3\},$$

pero este movimiento corresponde a una partícula con  $H < 0$ , tal que la orientación relativa entre el espín, velocidad y posición, dados por la ecuación (2.167), está conforme al movimiento descrito en esta figura. El sistema local de ejes es left-handed. El operador de inversión temporal viene dado por<sup>3</sup> y puede también tomarse como una rotación de valor  $\pi$  alrededor del eje  $\mathbf{e}_2$ ,

$$T = R(\pi, \mathbf{e}_2) = \exp(i\pi \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{S}/\hbar) = \exp(i\pi T_2/\hbar) = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = T^\dagger.$$

$$THT^\dagger = mc^2 T\beta T^\dagger = -H, \quad TST^\dagger = \mathbf{S}, \quad Te_1T^\dagger = -\mathbf{e}_1, \quad Te_2T^\dagger = \mathbf{e}_2, \quad Te_3T^\dagger = -\mathbf{e}_3.$$

La transformación  $PT$  viene dada por la matriz

$$TP = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad PT = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix},$$

y al actuar sobre las matrices  $\gamma^\mu$  producen

$$P\gamma^0P^{-1} = \gamma^0, \quad P\gamma^iP^{-1} = -\gamma^i, \quad T\gamma^0T^{-1} = -\gamma^0, \quad T\gamma^iT^{-1} = \gamma^i, \\ (PT)\gamma^\mu(PT)^{-1} = -\gamma^\mu,$$

ya que las cuatro matrices  $\gamma$  transforman como las componentes de un tetravector

$$(PT)x^\mu(PT)^{-1} = -x^\mu, \quad (PT)\partial^\mu(PT)^{-1} = -\partial^\mu,$$

<sup>2</sup>G. Racah, Nuovo Cimento **14**, 322 (1937).

<sup>3</sup>B. Thaller, The Dirac equation, Springer, Berlin (1992), p 75.

Es por esto que la ecuación de la partícula de Dirac libre es invariante bajo el grupo completo de Poincaré, incluyendo inversiones.

Una partícula de Dirac es un sistema mecánico cuyos atributos intrínsecos son la masa  $m > 0$  y el espín  $\hbar/2$ . Vemos que también el signo de  $H$  es invariante Poincaré y por lo tanto es otra propiedad intrínseca lo que establece dos clases diferentes de sistemas de la misma masa y espín. Al sistema con  $H > 0$  se le da habitualmente el nombre de partícula mientras que se reserva el nombre de antipartícula para el de  $H < 0$ . El valor de la masa no lo fija la teoría, hay que introducirlo a mano. Para caracterizar su interacción con un campo electromagnético externo, tenemos que introducir a mano otra propiedad intrínseca, la carga eléctrica  $e$ , localizada en el punto  $\mathbf{r}$ . Esto implica que además de las propiedades mecánicas  $m$  y  $S$  el sistema posee propiedades electromagnéticas como la carga eléctrica  $e$ , que debido a su movimiento a la velocidad de la luz y a su separación con respecto al centro de masa produce un momento dipolar eléctrico  $\mathbf{d}$  y un momento dipolar magnético  $\boldsymbol{\mu}$ , respectivamente. La carga eléctrica puede tener ambos signos, positiva o negativa.

$$P \begin{pmatrix} S \\ m \\ H \\ e \\ \boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \\ m \\ H \\ e \\ \boldsymbol{\mu} \\ -\mathbf{d} \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} S \\ m \\ H \\ e \\ \boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \\ m \\ -H \\ -e \\ -\boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix}, \quad C \begin{pmatrix} S \\ m \\ H \\ e \\ \boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \\ m \\ -H \\ -e \\ -\boldsymbol{\mu} \\ -\mathbf{d} \end{pmatrix}$$

y la transformación global  $PCT$  nos da

$$PCT \begin{pmatrix} S \\ m \\ H \\ e \\ \boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \\ m \\ H \\ e \\ \boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix}.$$

La transformación  $PCT$ , transforma la partícula en su antipartícula, invirtiendo incluso el sistema local de ejes y recíprocamente, manteniendo invariantes los atributos mecánicos  $m$  y  $S$  y los atributos electromagnéticos  $\boldsymbol{\mu}$  y  $\mathbf{d}$ . La invariancia  $PCT$  de este sistema establece una relación entre el signo de  $H$  y el signo de la carga  $e$ , a pesar de que la indeterminación en el signo de la carga de la partícula, persiste. El producto  $eH$  es invariante  $PCT$ . La ecuación de Dirac es invariante  $PCT$  puesto que esta transformación aplica soluciones con  $H > 0$  en soluciones con  $H < 0$  y recíprocamente, puesto que esta ecuación contiene la descripción de ambos tipos de partículas elementales.

Esto implica que la partícula y la antipartícula, en el sistema de referencia del centro de masa, poseen un momento dipolar magnético y un momento dipolar eléctrico oscilante, en un plano ortogonal al espín. Una vez fijada la dirección del espín, el momento magnético de ambas posee la misma orientación relativa con respecto al espín, bien paralelo a antiparalelo, de acuerdo con cual haya sido la elección del signo de la carga de la partícula. El momento dipolar eléctrico oscila hacia la izquierda para las partículas y hacia la derecha para las antipartículas lo que muestra una diferencia entre ambas que recibe el nombre de *quiralidad*. Si como habitualmente consideramos que el electrón es *la partícula*, es de carga negativa, la transformación  $PCT$  transforma la partícula (a) de la figura 4.9 en el sistema (b). Si lo que denominamos partícula es de carga positiva, entonces el espín y el momento magnético son opuestos entre sí, tanto para la partícula como para antipartícula.

Sin embargo, no tenemos constancia de que se hayan realizado medidas experimentales para encontrar la orientación relativa entre el espín y el momento magnético para electrones

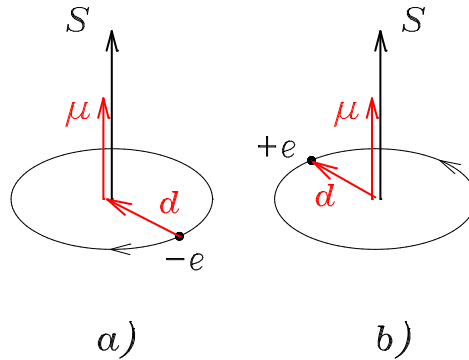


Figura 4.9: Atributos electromagnéticos  $\mu$  y  $d$  para (a) una partícula de carga negativa y su transformada  $PCT$ , (b), la antipartícula de carga positiva y la orientación relativa con su espín, analizado todo por el observador del centro de masa. El momento dipolar eléctrico de la partícula oscila hacia la derecha mientras que lo hace hacia la izquierda para la antipartícula.

y positrones libres, (y tampoco para muones) a pesar de que se han realizado medidas muy precisas para determinar el valor absoluto de  $g$ , la relación giromagnética.

#### 4.2.6. Dos experimentos plausibles

Un experimento plausible indirecto <sup>4</sup> ha sido propuesto para medir la orientación relativa entre el espín y el momento magnético de los electrones externos en átomos alcalinos como el Rb o Cs.

Los átomos de Rb<sup>87</sup> tienen un electrón en el nivel  $5s$ . Su núcleo tiene espín  $3/2$  y como el resto de las capas electrónicas están completas, el estado fundamental del átomo tiene un espín total 1, por lo que el electrón externo se coloca con su espín en dirección contraria al espín del núcleo. El momento magnético del átomo es básicamente el del electrón externo, ya que las capas internas están completas y el momento magnético del núcleo es mucho más pequeño, del orden de  $m_e/87m_p$  con respecto al del electrón, siendo  $m_e$  y  $m_p$  las masas del electrón y del protón, respectivamente.

Átomos de rubidio Rb<sup>87</sup> muy fríos, en un campo magnético externo se orientarán de tal manera que sus momentos magnéticos apunten en la dirección del campo. Si ahora lanzamos en la dirección del campo un haz de fotones polarizados circularmente de suficiente energía  $\sim 6.8$  GHz para producir la transición hiperfina que nos da vuelta al espín del electrón más externo, colocando al átomo en el estado excitado hiperfino, y por lo tanto con espín total 2, únicamente aquellos fotones cuyo espín tenga sentido contrario al de este electrón serán capaces de hacer la transición, y podrán ser absorbidos. Fotones con su espín en la dirección del espín del electrón externo no lo producirán. Por lo tanto, midiendo la orientación del espín de los fotones de la luz polarizada circular que produce la transición hiperfina, sabremos que el espín del electrón externo tiene la orientación contraria, y como su momento magnético tiene la orientación del campo, obtenemos la orientación relativa entre espín y momento magnético. Ahora la tarea sería también medir la orientación relativa para los positrones, para confirmar esta predicción.

<sup>4</sup>M.Rivas, *Are the electron spin and magnetic moment parallel or antiparallel vectors?*, LANL ArXiv:physics/0112057.

Existe una indefinición en el signo de la carga de la materia, que está también presente en el formalismo de Dirac. Sin embargo la predicción que se hace es consistente con los estados ligados formados por una partícula y su antipartícula. Como ejemplo, consideremos el positronio (un sistema ligado inestable electrón-positrón). Antes de aniquilarse posee un estado fundamental de espín 0 y momento magnético 0. Esto significa que los espines de ambos electrón y positrón son opuestos y lo mismo sucede para sus momentos magnéticos. Por lo tanto, para el electrón y el positrón debe existir la misma orientación relativa entre su espín y su momento magnético.

Otro ejemplo, el pión neutro  $\pi^0$ , es una combinación lineal de los estados ligados quark-antiquark  $u\bar{u}$ ,  $d\bar{d}$  y a veces también se incluye el par  $s\bar{s}$ . Es un sistema ligado que en su estado fundamental es de espín 0 y momento magnético 0. Como cada uno de los quarks anteriores poseen masas y cargas distintas poseen diferentes momentos magnéticos, la posibilidad de que su combinación lineal dé un espín 0 y momento magnético 0, es que para cada uno de los pares valgan cero, por lo que cada quark y su correspondiente antiquark deben tener la misma orientación relativa entre el espín y su momento magnético.

Otro experimento que se propone es medir la dirección de precesión del espín de los  $e^+$  y  $e^-$  o bien de los  $\mu^+$  and  $\mu^-$  en un anillo de almacenamiento. Si cada par  $e^+$  y  $e^-$  o bien  $\mu^+$  y  $\mu^-$  tienen la misma orientación relativa entre el espín y el momento magnético, entonces el momento que las fuerzas externas hacen sobre ellos por parte de un campo magnético es el mismo

$$\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} = \frac{d\mathbf{S}}{dt}$$

Sin embargo, si inyectamos estas partículas con un acelerador de tal manera que las partículas y las antipartículas tengan el espín en la misma dirección, por ejemplo hacia arriba, como las dos clases de partículas poseen carga contraria, hay que invertir el sentido del campo magnético del anillo, por lo que precesarán en sentido contrario. Si fuera posible detectar esta dirección de precesión, confirmaría esta predicción, pero al mismo tiempo nos daría la orientación relativa entre el espín y el momento magnético.

#### 4.2.7. Quiralidad

El modelo clásico que satisface la ecuación de Dirac cuando se cuantiza, da lugar a dos posibles sistemas con  $H > 0$  y  $H < 0$ . Al sistema cuyo  $H > 0$  se le suele denominar la partícula. Ambos sistemas son de energía positiva  $E = |H|$ . Para la partícula el movimiento interno del centro de carga tiene lugar en un plano ortogonal al espín en sentido hacia la izquierda cuando se fija la dirección del espín en el sentido positivo. Para la antipartícula, el movimiento es hacia la derecha, para la misma orientación del espín. Para las partículas, el sistema local orientable de vectores unidad  $\mathbf{e}_i$  se comporta como un triedro inverso, que rota con velocidad angular en la dirección opuesta a la del espín. Para las antipartículas resulta ser un triedro directo que rota en el sentido del espín.

Si hubiéramos comenzado nuestro análisis considerando en primer lugar el ejemplo de la antipartícula, entonces a la hora de obtener la misma representación de Pauli-Dirac como en el caso anterior, habríamos tenido que considerar que los ejes del cuerpo son los de la figura 4.10, es decir, en la dirección opuesta a los que escogimos anteriormente, y esto nos lleva por los mismos argumentos que las matrices  $\gamma^\mu$  deben reemplazarse por las  $-\gamma^\mu$ , de manera que el Hamiltoniano, en el sistema de referencia del centro de masa, se reduce a  $-\beta mc^2$ . De esta forma, el movimiento de los ejes del cuerpo es, en vez de (4.35-4.37), el dado por

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} = \frac{i}{\hbar}[-\beta mc^2, \mathbf{e}_1] = -\omega \mathbf{e}_2, \quad (4.53)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_2}{dt} = \frac{i}{\hbar}[-\beta mc^2, \mathbf{e}_2] = \omega \mathbf{e}_1, \quad (4.54)$$

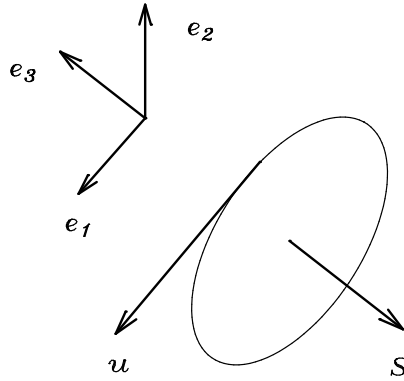


Figura 4.10: **Orientación relativa de los ejes del cuerpo para la antipartícula que dan lugar a la representación de Pauli-Dirac. Los ejes se comportan como un sistema de ejes directo que rotan alrededor de la dirección del espín.**

$$\frac{d\mathbf{e}_3}{dt} = \frac{i}{\hbar}[-\beta mc^2, \mathbf{e}_3] = 0, \quad (4.55)$$

con  $\omega = c/R_0$ , lo cual corresponde claramente a un triedro directo que rota con una velocidad angular  $\omega$ , en la dirección del espín.

La materia es de izquierdas y la antimateria es de derechas, por lo que respecta al movimiento y al comportamiento de los ejes del cuerpo. Materia y antimateria muestran una diferente **quiralidad**.

A pesar de que el movimiento del centro de carga tiene lugar en una región del orden de la longitud de onda Compton, es posible que esta separación sea físicamente inobservable, este movimiento corresponde sin embargo a la oscilación de un dipolo eléctrico instantáneo, que oscila con una frecuencia muy alta. El sentido del movimiento de este dipolo, una vez que la dirección del espín ha sido fijada, revela la diferencia entre partícula y antipartícula.

Finalmente, si comparamos el operador espín y el vector  $\mathbf{e}_3$  vemos que

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}.$$

de tal forma que las dos componentes superiores del espinor de Dirac corresponden a soluciones de valor positivo de  $H$  y por lo tanto están relacionadas con  $\mathbf{S} \sim \mathbf{e}_3$ , mientras que las componentes inferiores corresponden al valor negativo de  $H$ , y para estas componentes estos operadores se comportan como  $\mathbf{S} \sim -\mathbf{e}_3$ , lo cual brinda una relación vectorial como la que se representa en las figuras 4.2 y 4.10, respectivamente.

### 4.3. Álgebra de Dirac

Las tres componentes espaciales del espín  $S_i$ , las tres componentes del espín en los ejes del cuerpo  $T_j$  y las nueve componentes de los ejes del cuerpo  $(\mathbf{e}_i)_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , cuyas representaciones matriciales vienen dadas en el caso  $z = 0$  por (4.15) o en (4.16) en el caso  $z = 1$ , son 15 matrices hermíticas de traza nula, que juntamente con la matriz unidad  $4 \times 4$ ,  $\mathbb{I}$ , forman un conjunto de 16 matrices hermíticas, linealmente independientes. Son por lo tanto una base del

álgebra de Dirac como espacio vectorial, y satisfacen las siguientes reglas de conmutación:

$$[S_i, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_k, \quad [T_i, T_j] = -i\hbar\epsilon_{ijk}T_k, \quad [S_i, T_j] = 0, \quad (4.56)$$

$$[S_i, (\mathbf{e}_j)_k] = i\hbar\epsilon_{ikr}(\mathbf{e}_j)_r, \quad [T_i, (\mathbf{e}_j)_k] = -i\hbar\epsilon_{ijr}(\mathbf{e}_r)_k, \quad (4.57)$$

y los vectores reescalados  $3\mathbf{e}_i$ , en el caso  $z = 0$ ,

$$[(3\mathbf{e}_i)_k, (3\mathbf{e}_j)_l] = \frac{4i}{\hbar} (\delta_{ij}\epsilon_{klr}S_r - \delta_{kl}\epsilon_{ijr}T_r), \quad (4.58)$$

mostrando que los operadores  $\mathbf{e}_i$  transforman como vectores bajo rotaciones pero no son observables que conmuten. En el caso  $z = 1$ , los vectores reescalados  $-9\mathbf{e}_i$ , satisfacen las mismas relaciones (4.58).

Si fijamos el par de índices  $i$ , y  $j$ , entonces el conjunto de cuatro operadores, por ejemplo,  $S^2$ ,  $S_i$ ,  $T_j$  y  $(\mathbf{e}_j)_i$  forman un conjunto de 4 matrices hermiticas que conmutan. En efecto, las funciones  $\Phi_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , dadas anteriormente (3.77)-(3.80), son funciones propias simultáneas de  $S^2$ ,  $S_3$ ,  $T_3$  pero no de  $(\mathbf{e}_3)_3$  con valores propios  $s = 1/2$ , y para  $s_3 = \pm 1/2$ ,  $t_3 = \pm 1/2$ , pero la acción de  $\mathbf{e}_{33}$  sobre los espinores básicos nos los saca del espacio de la representación, a pesar de que su representación matricial es diagonal, por lo que los espinores básicos no son vectores propios de  $\mathbf{e}_{33}$ .

Estos observables básicos satisfacen las siguientes reglas de anticonmutación:

$$\{S_i, S_j\} = \{T_i, T_j\} = \frac{\hbar^2}{2} \delta_{ij}\mathbb{I}, \quad (4.59)$$

$$\{S_i, T_j\} = \frac{\hbar^2}{2} (3\mathbf{e}_j)_i, \quad (4.60)$$

$$\{S_i, (3\mathbf{e}_j)_k\} = 2\delta_{ik}T_j, \quad \{T_i, (3\mathbf{e}_j)_k\} = 2\delta_{ij}S_k, \quad (4.61)$$

$$\{(\mathbf{e}_i)_j, (\mathbf{e}_k)_l\} = \frac{2}{9}\delta_{ik}\delta_{jl}\mathbb{I} + \frac{2}{3}\epsilon_{ikr}\epsilon_{jls}(\mathbf{e}_r)_s. \quad (4.62)$$

Si definimos ahora las matrices adimensionales y normalizadas:

$$a_{ij} = 3(\mathbf{e}_i)_j, \quad (\text{ó } a_{ij} = -9(\mathbf{e}_i)_j), \quad s_i = \frac{2}{\hbar}S_i, \quad t_i = \frac{2}{\hbar}T_i, \quad (4.63)$$

juntamente con la matriz unidad  $4 \times 4$ ,  $\mathbb{I}$ , forman un conjunto de 16 matrices  $\Gamma_\lambda$ ,  $\lambda = 1, \dots, 16$  que son hermiticas, unitarias, linealmente independientes y de determinante unidad. Son la base ortonormal del álgebra de Dirac como álgebra de Clifford.

El conjunto de 64 matrices unitarias de determinante  $+1$ ,  $\pm\Gamma_\lambda$ ,  $\pm i\Gamma_\lambda$ ,  $\lambda = 1, \dots, 16$  forman un subgrupo finito de  $SU(4)$ . Su ley de composición se puede obtener de:

$$a_{ij} a_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}\mathbb{I} + i\delta_{ik}\epsilon_{jlr} s_r - i\delta_{jl}\epsilon_{ikr} t_r + \epsilon_{ikr}\epsilon_{jls} a_{rs}, \quad (4.64)$$

$$a_{ij} s_k = i\epsilon_{jkl} a_{il} + \delta_{jk} t_i, \quad (4.65)$$

$$a_{ij} t_k = -i\epsilon_{ikl} a_{lj} + \delta_{ik} s_j, \quad (4.66)$$

$$s_i a_{jk} = i\epsilon_{ikl} a_{jl} + \delta_{ik} t_j, \quad (4.67)$$

$$s_i s_j = i\epsilon_{ijk} s_k + \delta_{ij}\mathbb{I}, \quad (4.68)$$

$$s_i t_j = t_j s_i = a_{ji}, \quad (4.69)$$

$$t_i a_{jk} = -i\epsilon_{ijl} a_{lk} + \delta_{ij} s_k, \quad (4.70)$$

$$t_i t_j = -i\epsilon_{ijk} t_k + \delta_{ij}\mathbb{I}, \quad (4.71)$$

y análogamente podemos usar estas expresiones para obtener las reglas de conmutación y de anticonmutación (4.56-4.62).

El álgebra de Dirac es generada habitualmente por las cuatro matrices gama de Dirac  $\gamma^\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$  que satisfacen las reglas de anticonmutación:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{I}, \quad (4.72)$$

donde  $\eta^{\mu\nu}$  es el tensor métrico de Minkowski.

Análogamente, el álgebra de Dirac puede ser generada por los cuatro observables siguientes, por ejemplo:  $S_1, S_2, T_1$  y  $T_2$ . En efecto por (4.68) y (4.71) obtenemos los  $\mathbb{I}, S_3$  y  $T_3$  respectivamente y mediante (4.69), los restantes elementos.

Clásicamente, la orientación interna de un electrón es caracterizada por el conocimiento de las componentes de los ejes del cuerpo  $(\mathbf{e}_i)_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , que en conjunto constituyen una matriz ortogonal. Para caracterizar completamente y de forma única una matriz ortogonal a partir de sus componentes, necesitamos conocer al menos cuatro de ellas. En la versión cuántica el conocimiento de cuatro de las matrices  $(\mathbf{e}_i)_j$  y haciendo uso algebraico de (4.64)-(4.71), nos permite recuperar los restantes elementos del álgebra de Dirac. Es en este sentido que **la orientación interna** del electrón completamente caracteriza su estructura interna. El álgebra de Dirac que contiene a los observables del electrón que son invariantes por traslación, y es generada por las cuatro matrices  $\gamma^\mu$ , puede ser también generada algebraicamente a partir de cualesquiera cuatro de los operadores que describen su orientación.

#### 4.4. Simetrías espacio-temporales adicionales

Las variables cinemáticas de esta partícula clásica de Dirac se reducen al tiempo  $t$ , posición  $\mathbf{r}$ , velocidad  $\mathbf{u}$  y orientación  $\boldsymbol{\alpha}$ , con la condición de que la velocidad es siempre  $u = c$ , o bien 1 en unidades naturales. Si la partícula tiene masa  $m \neq 0$  y espín  $s \neq 0$ , podemos definir también una unidad natural de longitud  $s/mc$  y una unidad natural de tiempo  $s/mc^2$ . La unidad natural de longitud es el radio del zitterbewegung, o movimiento circular del centro de carga de la figura 4.1, y la unidad natural de tiempo es el tiempo empleado por la carga durante una vuelta, y para el observador del centro de masa. Esto implica que para partículas con masa y espín, todas sus variables cinemáticas y sus derivadas temporales se pueden tomar adimensionales. El formalismo es por lo tanto invariante bajo aquellas dilataciones espacio-temporales que no modifiquen la velocidad de la luz.

Resulta de esto que, aunque hemos comenzado con el grupo de Poincaré como el grupo básico de simetrías espacio-temporales, estas partículas con masa y espín poseen un grupo de simetrías más amplio. Al menos contiene también dilataciones espacio-temporales con generador  $D$ . La acción de esta transformación sobre las variables cinemáticas es

$$t' = e^\lambda t, \quad \mathbf{r}' = e^\lambda \mathbf{r}, \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{\alpha}.$$

La nueva constante del movimiento Noetheriana toma la forma

$$D = tH - \mathbf{r} \cdot \mathbf{P}. \quad (4.73)$$

Sea  $R(\boldsymbol{\beta})$  una rotación arbitraria que cambia los ejes coordenados del observador inercial. La acción de esta rotación arbitraria  $R(\boldsymbol{\beta})$  sobre las variables cinemáticas es

$$t' = t, \quad \mathbf{r}' = R(\boldsymbol{\beta})\mathbf{r}, \quad \mathbf{u}' = R(\boldsymbol{\beta})\mathbf{u}, \quad R(\boldsymbol{\alpha}') = R(\boldsymbol{\beta})R(\boldsymbol{\alpha}),$$

y por esta razón los generadores  $\mathbf{J}$  de las rotaciones involucran a operadores diferenciales que derivan con respecto a todas estas variables cinemáticas, excluido el tiempo.

La orientación de la partícula, representada por las variables  $\boldsymbol{\alpha}$ , o de forma equivalente por la matriz ortogonal de rotación  $R(\boldsymbol{\alpha})$ , se interpreta como la orientación de un sistema hipotético

de tres ejes unidad cartesianos  $\mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , localizados en el punto  $\mathbf{r}$ . No poseen realidad física, pero la elección de este sistema cartesiano ligado al punto es completamente arbitraria, como hemos visto en el análisis clásico, de tal manera que el formalismo debe ser independiente de sus valores reales. Esto significa que, además del anterior grupo de rotaciones que modifica los ejes del observador inercial, debe existir otro grupo de rotaciones locales  $SO(3)_L$ , de elementos  $R(\boldsymbol{\gamma})$ , que modifica a las variables de orientación  $\boldsymbol{\alpha}$ , pero sin modificar al resto de las variables  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{u}$ , es decir, una rotación local del sistema de ejes del cuerpo:

$$t' = t, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r}, \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u}, \quad R(\boldsymbol{\alpha}') = R(\boldsymbol{\gamma})R(\boldsymbol{\alpha}), \quad (4.74)$$

Los generadores de este nuevo grupo de rotaciones, que afecta solamente a las variables de orientación, serán la proyección de los operadores de momento angular  $\mathbf{W}$  proyectados sobre los ejes de la partícula. Es claro que estas dos operaciones de rotación de los ejes del observador y de los ejes de la partícula, conmutan entre sí. Estas últimas rotaciones las podemos interpretar como rotaciones activas de los ejes de la partícula. A partir del teorema de Noether, los nuevos observables conservados serán:

$$T_i = \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_i, \quad (4.75)$$

donde  $\mathbf{e}_i$  son los tres vectores unidad ortogonales que definen los ejes de la partícula.

Si  $R(\boldsymbol{\alpha})$  es la matriz ortogonal de rotación que describe la orientación de la partícula, si la consideramos por columnas, estas columnas describen las componentes de los tres vectores unidad ortogonales  $\mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Las Ecuaciones (4.74) corresponden a la transformación  $\mathbf{e}'_i = R(\boldsymbol{\gamma})\mathbf{e}_i$  de los ejes de la partícula.

Los operadores  $W_i$ , representan a las componentes de los operadores de momento angular asociados al cambio de orientación de la partícula, y proyectados en los ejes del observador inercial correspondiente. Las magnitudes conservadas (4.75), son las componentes de los operadores de momento angular proyectados sobre los ejes de la partícula  $T_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{W}$ . Al cuantizar el sistema, vendrán dados por los operadores diferenciales (4.90)-(4.92) del apéndice de este capítulo, y satisfacen

$$T^2 = W^2, \quad [T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk}T_k, \\ [T_i, K_j] = [T_i, J_j] = [T_i, H] = [T_i, D] = [T_i, P_j] = 0.$$

Hemos visto que los operadores autoadjuntos  $T_i$  generan otro grupo  $SU(2)$  que es la representación del grupo de rotaciones locales  $SO(3)_L$ , que modifica solamente a las variables de orientación, conmuta con el grupo de rotaciones generado por los  $J_j$ , y con la totalidad del grupo de Poincaré ampliado, incluidas las dilataciones espacio-temporales.

#### 4.4.1. Análisis del grupo de simetrías ampliado

Sean  $H$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{J}$  los generadores del grupo de Poincaré  $\mathcal{P}$ . Con la identificación habitual de  $p^\mu \equiv (H/c, \mathbf{P})$  como los operadores que definen el tetramomento y  $w^\mu \equiv (\mathbf{P} \cdot \mathbf{J}, H\mathbf{J}/c - \mathbf{K} \times \mathbf{P})$  como el operador tetravector de Pauli-Lubanski los dos operadores de Casimir del grupo de Poincaré son

$$C_1 = p_\mu p^\mu, \quad C_2 = -w_\mu w^\mu.$$

Estos operadores de Casimir, si los medimos en el sistema de referencia del centro de masa donde  $\mathbf{P} = \mathbf{K} = 0$ , y en unidades naturales  $c = 1$ ,  $\hbar = 1$ , se reducen respectivamente en una representación irreducible a  $C_1 = m^2$  y  $C_2 = H^2 J^2 = m^2 s(s+1)$ . Los dos parámetros  $m$  y  $s$ , que caracterizan a cada representación irreducible del grupo de Poincaré, representan las propiedades intrínsecas de una partícula elemental relativista.

Consideremos las dilataciones espacio-temporales de generador  $D$ . La acción de esta transformación sobre las variables cinemáticas es

$$t' = e^\lambda t, \quad \mathbf{r}' = e^\lambda \mathbf{r}, \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{\alpha}.$$



Denotemos esta ampliación del grupo de Poincaré por  $\mathcal{W}$ , a veces denominado grupo de Weyl. En la representación cuántica, este nuevo generador, cuando actúa sobre la función de onda, toma la forma:

$$D = it\partial/\partial t + i\mathbf{r} \cdot \nabla. \quad (4.76)$$

y satisface

$$[D, p^\mu] = -ip^\mu, \quad [D, J^{\mu\nu}] = 0.$$

Este grupo ampliado solamente posee un operador de Casimir <sup>5</sup>, el cual, para partículas con masa, con lo que el operador  $C_1 \neq 0$  es invertible, se reduce a

$$C = C_2 C_1^{-1} = C_1^{-1} C_2 \equiv C_2/C_1 = s(s+1).$$

En el sistema de referencia del centro de masa, este operador se reduce a  $C = S^2$ , el cuadrado del operador espín.

Al admitir también como simetría las dilataciones espacio-temporales vemos que la masa deja de ser una propiedad intrínseca. Es únicamente el espín la propiedad intrínseca de una partícula elemental. En efecto, puesto que el radio del movimiento interno es  $R = s/mc$ , un cambio de las escalas de longitud y tiempo corresponde a un cambio de masa, permaneciendo  $s$  y  $c$  constantes. Pero esta transformación de una partícula elemental de espín 1/2 modifica su estructura, su radio interno y su masa y se transforma en un estado de masa diferente pero del mismo espín.

La estructura del operador diferencial  $\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{Z} + \mathbf{W}$ , donde la parte del espín es  $\mathbf{S} = \mathbf{Z} + \mathbf{W}$  posee por valor propio  $s = 1/2$  en el modelo analizado. Esto implica que el valor propio del operador  $W^2$  corresponde a  $w = 1/2$  mientras que para la parte  $\mathbf{Z}^2$  se reduce solamente a las dos posibilidades  $z = 0$  o  $z = 1$ .

Además del grupo  $\mathcal{W}$  vamos a considerar la representación del grupo de rotaciones locales generadas por los  $T_i$  con valores propios  $w = t = 1/2$ . Tenemos por lo tanto un grupo de transformaciones espacio-temporales más amplio que el grupo de Weyl, con una estructura adicional  $SU(2)$  al ser cuantizado.

Los generadores  $T_i$  conmutan con todos los generadores del grupo de Weyl  $\mathcal{W}$ , y este nuevo grupo de simetría lo podemos escribir como  $\mathcal{S} = \mathcal{W} \otimes SU(2)_T$ .

Este nuevo grupo posee solamente dos operadores de casimir  $S^2$  y  $T^2$  con valores propios 1/2. Esto es lo que justifica que nuestra función de onda sea un objeto de cuatro componentes. Al escoger el conjunto completo de observables que conmutan, tomamos los operadores  $T^2 = S^2$ , el operador  $S_3$  y el  $T_3$  que pueden tomar los valores  $\pm 1/2$  y, por ejemplo el operador  $p^\mu p_\mu$  y los operadores  $p^\mu$ . De esta manera, podemos separar en la función de onda las variables de orientación y velocidad de las variables espacio-tiempo,

$$\psi(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{i=4} \phi_i(t, \mathbf{r}) \chi_i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha})$$

donde los cuatro espinores  $\chi_i(\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha})$  se pueden clasificar de acuerdo con los valores propios  $|s_3, t_3\rangle$ . Las funciones  $\phi_i(t, \mathbf{r})$  se pueden escoger como vectores propios del operador de Klein-Gordon

$$p_\mu p^\mu \phi_i(t, \mathbf{r}) = m_i^2 \phi_i(t, \mathbf{r}).$$

Como este operador  $p_\mu p^\mu$  no conmuta con el observable  $D$ , el valor propio de la masa  $m_i$  no es una propiedad intrínseca, y el correspondiente valor depende del estado particular  $\phi_i$  que se considere.

<sup>5</sup>L. Abellanas and L. Martínez Alonso *J. Math. Phys.* **16** 1580 (1975).

Para la clasificación de los espinores  $\chi_i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha})$  podemos considerar también la parte de los operadores de momento angular  $\mathbf{Z}$ . Como  $[Z^2, S^2] = [Z^2, T^2] = [Z^2, p^\mu] = 0$ , podemos tomar  $Z^2$  como un observable que conmuta. Solamente puede tomar valores propios enteros al actuar sobre funciones de las variables de velocidad. Es debido a que en términos de estas variables tiene la estructura de un momento angular orbital. Como el espín total  $\mathbf{S} = \mathbf{Z} + \mathbf{W}$ , y el valor propio de  $S^2$  es  $1/2$ , los posibles valores propios de  $Z^2$  son solamente  $z = 0$  ó  $z = 1$ . Ver el apéndice al final del capítulo para una clasificación posible de las  $\chi_i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha})$ , de acuerdo con  $z = 0$  y que da lugar a las funciones propias (3.77-3.80), y las funciones propias correspondientes a  $z = 1$ , dadas en (4.93-4.96). En este caso, las funciones propias no pueden ser simultáneamente vectores propios de  $Z_3$ . Sin embargo, el valor esperado de  $Z_3$  en la base correspondiente a  $z = 0$ ,  $\Phi_i$ , es 0, mientras que su valor esperado en la base correspondiente a  $z = 1$ ,  $\Psi_i$ , es de  $\pm 2/3$ .

#### 4.4.2. Ampliación del espacio cinemático

Una vez que el grupo cinemático ha sido ampliado incluyendo como simetrías adicionales las dilataciones espacio-temporales, tenemos una nueva variable cinemática adimensional asociada a este nuevo subgrupo uniparamétrico. De esta forma el espacio cinemático, como espacio homogéneo del nuevo grupo, puede ser ampliado. En efecto, si tomamos la derivada temporal de la constante del movimiento (4.73), obtenemos:

$$H = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}.$$

Si lo comparamos con la ecuación (4.19), vemos que falta un término. Esto implica, que desde el punto de vista clásico necesitamos una nueva variable cinemática adimensional  $\beta$ , que transforme bajo estas transformaciones, y que contribuya al nuevo observable  $D$ . El espacio cinemático ampliado transforma ahora:

$$t' = e^{\lambda t}, \quad \mathbf{r}' = e^{\lambda} \mathbf{r}, \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{\alpha}, \quad \beta' = \lambda + \beta.$$

Desde el punto de vista de la teoría de grupos, esta nueva variable adimensional corresponde con sus dimensiones y dominio lo mismo que el parámetro normal del nuevo subgrupo, cuyo generador es  $D$ .

Desde el punto de vista Lagrangiano, la nueva Lagrangiana dependerá también de  $\beta$  y de  $\dot{\beta}$ , con una estructura general de la forma

$$\tilde{L} = \dot{t}T + \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{R} + \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{U} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{W} + \dot{\beta}B,$$

siendo ahora  $B = \partial \tilde{L} / \partial \dot{\beta}$ . La constante del movimiento Noetheriana asociada a la invariancia de las ecuaciones dinámicas bajo las dilataciones espacio-temporales nos lleva a que

$$D = tH - \mathbf{r} \cdot \mathbf{P} - B,$$

y el nuevo generador en la versión cuántica aparece como:

$$D = it\partial/\partial t + i\mathbf{r} \cdot \nabla + i\frac{\partial}{\partial \beta}.$$

De esta forma, el último término de (4.19) está relacionado con la derivada temporal del último término de la ecuación de Dirac:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \cdot \left( \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{u} \right).$$

Este nuevo observable  $B$ , con dimensiones de acción, posee una derivada temporal positiva para las partículas y una derivada temporal negativa para las antipartículas. Este signo está

claramente ligado con el signo de  $H$ . Para el observador del centro de masa  $\mathbf{P} = 0$ ,  $H = \pm mc^2 = dB/dt$ , que da por solución  $B(t) = B(0) \pm mc^2 t$ . En unidades de  $\hbar$  este observable representa la mitad de la fase del movimiento interno de la carga alrededor del centro de masa

$$B(t) = B(0) \pm \frac{1}{2} \hbar \omega t.$$

Una partícula de Dirac necesita dar dos vueltas para que su fase  $B(t)$ , en unidades de  $\hbar$ , incremente en  $2\pi$ .

Debido a que las rotaciones locales generadas por los  $T_i$  conmutan con todo el grupo  $\mathcal{W}$ , las variables cinemáticas anteriores también siguen generando un espacio homogéneo del grupo total  $\mathcal{W} \otimes SU(2)_T$ , y, por lo tanto, también representan las variables cinemáticas de una partícula elemental cuyo grupo de simetrías espacio-temporales sea este nuevo grupo ampliado.

#### 4.4.3. Relación con el modelo estándar

Hemos analizado el grupo de simetrías espacio-temporales de un modelo clásico de partícula elemental que satisface la ecuación de Dirac cuando se cuantiza. La materia descrita por este modelo (estados con  $H > 0$ ), es de izquierdas mientras que es de derechas para la antimateria (estados con  $H < 0$ ). El concepto de derechas e izquierdas, se refiere al movimiento del centro de carga una vez que la dirección del espín ha quedado fijada. Para la materia el movimiento de la carga es en sentido contrario a las agujas del reloj cuando miramos en la dirección del espín. Está contenido en un plano ortogonal a la dirección del espín, con el convenio habitual de signos para formas lineales y multivectores del álgebra geométrica. El movimiento tiene la dirección de las agujas del reloj para la antimateria.

El grupo de simetrías de la Lagrangiana de esta partícula es el  $\mathcal{S} = \mathcal{W} \otimes SO(3)_T$  y es  $\mathcal{W} \otimes SU(2)_T$  en su descripción cuántica. Es más amplio que el grupo de Poincaré que es con el que comenzamos el análisis cinemático. En la versión cuántica, además del grupo de Poincaré contiene un nuevo grupo  $U(1)$ , el cual es la representación unitaria del grupo de dilataciones espacio-temporales. Además contiene un grupo  $SU(2)_T$  que es la representación unitaria del grupo de rotaciones locales del sistema cartesiano ligado al punto. El grupo total posee dos operadores de Casimir:  $S^2$ , el operador de Casimir de  $\mathcal{W}$  y  $T^2$  el operador de Casimir de  $SU(2)_T$ , que toman ambos los valores propios  $s = t = 1/2$  para la partícula de Dirac que acabamos de considerar.

Algunas de estas características poseen ciertas similitudes con el modelo estándar de partículas elementales, por lo que respecta a aspectos cinemáticos. Si, por ejemplo, interpretamos los generadores de las rotaciones locales  $T_i$  como si describiesen el isospín y que las componentes del momento angular  $\mathbf{Z}$ , relacionadas con la parte zitterbewegung del espín, como si describiesen color, entonces una partícula elemental de Dirac, descrita por este formalismo es un objeto masivo de espín  $1/2$ , isospín  $1/2$ , y de masa y carga arbitraria. Admite como estados de espín los  $s_3 = \pm 1/2$  y también para el isospín  $t_3 = \pm 1/2$ . Existen dos representaciones irreducibles no equivalentes correspondientes a la parte zitterbewegung del espín  $z$ . Puede ser una partícula sin color  $z = 0$  (lepton?) descrita por los espinores  $\Phi_i$  de (4.17) o una partícula con color  $z = 1$  descrita por los espinores  $\Psi_i$  de (4.18) en uno cualquiera de los tres posibles estados de color  $z_3 = 1, 0, -1$ , (quark?), pero no admite valores mayores para el valor propio  $z$ . Los estados básicos pueden ser vectores propios de  $\mathbf{Z}^2$  pero no de  $Z_3$ , de tal manera que el correspondiente color no es simultáneamente observable con los demás atributos del espín, y resulta por lo tanto inobservable en estados de espín definido. No existen posibilidades de transición entre partículas con color y sin color, debido a la ortogonalidad de las correspondientes representaciones irreducibles  $\Phi_i$  y  $\Psi_j$ ,  $\langle \Phi_i | \Psi_j \rangle = 0$ .

Como los valores propios de  $Z_3$  son inobservables, podemos rotar entre sus tres estados manteniendo el mismo valor del color  $z = 1$ . Estas rotaciones se reducen a una representación de

un nuevo grupo interno, el grupo unitario  $SU(3)$  que transforma entre sí los tres vectores propios de  $Z_3$  los vectores  $Y_i^j$  de (4.101) entre ellos y que no modifica el valor  $z = 1$  de los espinores  $\Psi_i$ . Sin embargo, esta relación entre este nuevo grupo unitario  $SU(3)$ , el cual no es propiamente un grupo de transformaciones espacio-temporales sino un grupo de transformaciones entre estados  $z = 1$ , y el grupo de simetrías  $\mathcal{W} \otimes SU(2)_T$  no es simplemente un producto directo y su análisis lo vamos a dejar para una futura investigación.

Este formalismo es puramente cinemático. No hemos hecho mención de ningún tipo particular de interacción, electromagnética, débil o fuerte, entre las diferentes clases de partículas. De esta forma, la comparación estricta con el modelo estándar, a pesar de que nos han aparecido como grupos adicionales  $U(1)$ ,  $SU(2)_T$  y  $SU(3)$ , puede parecer un poco artificial.

Desde el punto de vista clásico, el modelo con  $z = 1$ , es el modelo de la portada en el que el movimiento del centro de carga alrededor del centro de masa produce el momento magnético del electrón. El espín es la suma de la parte orbital  $\mathbf{Z}$  y la parte rotativa  $\mathbf{W}$  en la dirección de la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$ . El espín es  $s = 1/2$ , que se compone de los dos valores mínimos para las dos partes. El valor mínimo, no nulo, de  $\mathbf{Z}$ , es  $z = 1$  y en la dirección del espín total  $\mathbf{S}$  y el valor mínimo no nulo de  $\mathbf{W}$ ,  $w = 1/2$ , en sentido contrario, de la parte rotativa.

En el caso  $z = 0$ , la trayectoria del centro de carga no encerraría ningún área, sería un movimiento armónico unidimensional de pulsación  $\omega$  juntamente con un sistema cartesiano de ejes ligado al punto que oscila, y que rotan con la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$ , del mismo valor que la pulsación  $\omega$ . El espín es aquí rotativo  $\mathbf{W}$ , en la misma dirección que la velocidad angular del sistema cartesiano comóvil,  $\boldsymbol{\omega}$ . Al no encerrar área la trayectoria del punto  $\mathbf{r}$ , su momento magnético con respecto al centro de masa sería cero. En este caso el valor del espín es el valor mínimo no nulo del momento angular cuántico asociado a la rotación, es decir  $s = w = 1/2$ .

De acuerdo con esta discusión, como el electrón es una partícula de Dirac que posee momento magnético, es la descripción de la portada, con  $z = 1$ , la que produce, en nuestra opinión, la descripción clásica del electrón. La partícula con  $z = 0$  es también una partícula de Dirac, pero de momento magnético cero. Podría representar a un neutrino, donde el punto  $\mathbf{r}$  representaría la localización de la carga débil del mismo.

## 4.5. Una Lagrangiana de interacción de dos partículas de Dirac

Una partícula elemental puede ser aniquilada por la interacción con su antipartícula. Pero si no es destruida por esta interacción, hemos hecho la hipótesis de que no puede ser modificada, que su estructura no puede cambiar. Como sus propiedades intrínsecas son el espín  $S$  y su proyección en los ejes del cuerpo  $T$ , estas dos propiedades no pueden ser alteradas por ninguna interacción con algún campo externo o con otra partícula.

Consideremos un sistema compuesto por dos partículas elementales con espín y con el mismo espacio cinemático <sup>6</sup>. Vamos a usar el subíndice  $a = 1, 2$  para distinguir a las variables cinemáticas que se refieren a cada partícula. El espacio cinemático del sistema es el producto cartesiano de ambos espacios para cada partícula y formado por las variables  $(t_a, \mathbf{r}_a, \mathbf{u}_a, \boldsymbol{\alpha}_a, \beta_a)$ ,  $a = 1, 2$ . La Lagrangiana del sistema compuesto se podrá escribir como

$$L = L_1 + L_2 + L_I$$

donde las  $L_a$ ,  $a = 1, 2$ , son las Lagrangianas libres de cada partícula y  $L_I$  es la Lagrangiana de la interacción entre ellas, que estamos buscando. Ambas  $L_a$  son invariantes bajo el grupo ampliado  $\mathcal{S} = \mathcal{W} \otimes SO(3)_T$  y lo que pretendemos es buscar una Lagrangiana de interacción  $L_I$  que sea también invariante bajo  $\mathcal{S}$ . La estructura general de cada una de las Lagrangianas  $L_a$  asociadas

<sup>6</sup>M. Rivas, *An interaction Lagrangian for two spin 1/2 elementary Dirac particles*, J. Phys. A: Math. and Theor. **40**, 2541 (2007).

a cada partícula, como solamente dependen de las correspondientes variables cinemáticas, es

$$\tilde{L}_a = T_a \dot{t}_a + \mathbf{R}_a \cdot \dot{\mathbf{r}}_a + \mathbf{U}_a \cdot \dot{\mathbf{u}}_a + \mathbf{W}_a \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_a + B_a \dot{\beta}_a$$

donde  $T_a = \partial \tilde{L}_a / \partial \dot{t}_a$ ,  $\mathbf{R}_a = \partial \tilde{L}_a / \partial \dot{\mathbf{r}}_a$ ,  $\mathbf{U}_a = \partial \tilde{L}_a / \partial \dot{\mathbf{u}}_a$ ,  $\mathbf{W}_a = \partial \tilde{L}_a / \partial \dot{\boldsymbol{\omega}}_a$  y  $B_a = \partial \tilde{L}_a / \partial \dot{\beta}_a$ , debido a la homogeneidad de cada  $\tilde{L}_a$  en términos de las derivadas  $\tau$  de las correspondientes variables cinemáticas. El espín y la proyección del espín sobre los ejes del cuerpo para cada partícula, son

$$\mathbf{S}_a = \mathbf{u}_a \times \mathbf{U}_a + \mathbf{W}_a, \quad T_{ai} = \mathbf{e}_{ai} \cdot \mathbf{W}_a$$

donde  $\mathbf{e}_{ai}$ ,  $i = 1, 2, 3$  son los tres vectores ortogonales con origen en cada punto  $\mathbf{r}_a$ .

La Lagrangiana de interacción entre estas dos partículas  $\tilde{L}_I$ , será en general una función de todas las variables cinemáticas de ambas partículas y de sus derivadas  $\tau$ , y homogénea de grado uno en estas últimas. Pero si ambas propiedades intrínsecas de las dos partículas  $\mathbf{S}_a$  y  $T_a$ , no son modificadas por la interacción, la Lagrangiana no puede ser una función de las derivadas  $\tau$  de aquellas variables cinemáticas que den lugar a estas propiedades, es decir, no puede ser función de las variables  $\dot{\mathbf{u}}_a$  y  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_a$ ,  $a = 1, 2$ . En caso contrario, las funciones  $\mathbf{U}_a$  y  $\mathbf{W}_a$  contendrían términos provenientes de la  $\tilde{L}_I$  y serían diferentes que en el caso libre. Las funciones  $\mathbf{U}_a$  y  $\mathbf{W}_a$ , que dan lugar a la definición del espín, se tienen que obtener solamente a partir de las correspondientes Lagrangianas libres,  $\tilde{L}_a$ .

Entonces, por lo que respecta a la dependencia de la Lagrangiana  $\tilde{L}_I$  de las derivadas con respecto a  $\tau$  de las variables cinemáticas, dependerá solamente de  $\dot{t}_a$ ,  $\dot{\mathbf{r}}_a$  y  $\dot{\beta}_a$ ,  $a = 1, 2$ . Además de esto, será función de las variables cinemáticas  $t_a$ ,  $\mathbf{r}_a$ ,  $\mathbf{u}_a$  y  $\beta_a$ , pero no de las  $\boldsymbol{\alpha}_a$  debido a la invariancia bajo el grupo de rotaciones locales  $SO(3)_L$ . La invariancia bajo dilataciones espacio-temporales implica que la Lagrangiana debe ser función de la diferencia de fase  $\beta_1 - \beta_2$ , y de  $\dot{\beta}_1 - \dot{\beta}_2$ , pero como esas fases son completamente arbitrarias debe ser independiente de estas fases.

Debido a la ligadura  $\mathbf{u}_a = \dot{\mathbf{r}}_a / \dot{t}_a$ , la Lagrangiana de la interacción será finalmente una función

$$\tilde{L}_I = \tilde{L}_I(t_a, \mathbf{r}_a, \dot{t}_a, \dot{\mathbf{r}}_a),$$

y función homogénea de grado uno de las derivadas  $\dot{t}_a$ ,  $\dot{\mathbf{r}}_a$ ,  $a = 1, 2$ .

Si escribimos, como es habitual, el tetravector Minkowskiano  $x_a^\mu \equiv (ct_a, \mathbf{r}_a)$ , la invariancia bajo traslaciones implica que la Lagrangiana debe ser función de  $x_1^\mu - x_2^\mu$ . Los dos siguientes términos  $\eta_{\mu\nu} \dot{x}_1^\mu \dot{x}_2^\nu$  y  $\eta_{\mu\nu} (x_1^\mu - x_2^\mu)(x_2^\nu - x_1^\nu)$ , donde  $\eta_{\mu\nu}$  es el tensor métrico de Minkowski, son invariantes Poincaré. Si consideramos que el parámetro de evolución  $\tau$  no tiene dimensiones, estos términos poseen dimensiones de longitud al cuadrado. Por lo tanto su cociente es adimensional e invariante bajo dilataciones espacio-temporales. La otra condición es que la Lagrangiana sea homogénea de primer grado en las derivadas  $\tau$  de las variables cinemáticas. La raíz cuadrada de lo anterior cumple este requisito. Si ambas partículas son idénticas, y por lo tanto indistinguibles, nos queda una simetría discreta: la Lagrangiana de interacción debe ser invariante bajo el intercambio  $1 \leftrightarrow 2$  entre las etiquetas de ambas partículas. Llegamos, por lo tanto a la Lagrangiana invariante bajo el grupo total  $\mathcal{S}$

$$\tilde{L}_I = g \sqrt{\frac{\eta_{\mu\nu} \dot{x}_1^\mu \dot{x}_2^\nu}{\eta_{\mu\nu} (x_1^\mu - x_2^\mu)(x_2^\nu - x_1^\nu)}} = g \sqrt{\frac{c^2 \dot{t}_1 \dot{t}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2}{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 - c^2 (t_2 - t_1)^2}}$$

donde  $g$  es una constante de acoplamiento con dimensiones de acción.

Otras Lagrangianas alternativas que cumplen estos requisitos, pueden también construirse. Por ejemplo,  $\tilde{L} = g (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^\mu (x_1 - x_2)_\mu / (x_1 - x_2)^2$ , pero es una derivada total con respecto a  $\tau$  de la función  $\log(x_1 - x_2)^2$ . Otra puede ser  $\tilde{L} = g (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^\mu (x_1 - x_2)_\mu / (x_1 - x_2)^2$ , sin dimensiones y lineal en las derivadas de las variables cinemáticas, pero cambia de signo bajo el

intercambio  $1 \leftrightarrow 2$ , y por lo tanto todos los observables de la interacción, como la energía de interacción, cambian de signo, lo cual no tiene sentido físico para dos partículas idénticas.

Otra posibilidad sería

$$\tilde{L}_I = g \frac{\eta_{\mu\nu} \dot{x}_1^\mu \dot{x}_2^\nu}{\eta_{\mu\nu} (\dot{x}_1^\mu - \dot{x}_2^\mu)(\dot{x}_2^\nu - \dot{x}_1^\nu)} = g \frac{c^2 \dot{t}_1 \dot{t}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2}{(\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2) \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - c^2 (\dot{t}_1 - \dot{t}_2)(t_2 - t_1)},$$

que cumple tanto las condiciones de homogeneidad como de invariancia de escala. En una descripción síncrona queda

$$L_I = g \frac{c^2 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)} \quad (4.77)$$

La interacción entre dos partículas de Dirac no es única. Sabemos que entre los leptones y los quarks hay interacciones de corto alcance, como la débil y la fuerte y otra que es tanto de corto como de largo alcance que es la interacción electromagnética. La Lagrangiana que se propone, tiene la ventaja de que describe una interacción que es invariante bajo cambios de escala, y por lo tanto puede describir una interacción tanto de corto como de largo alcance, y que, además posee un comportamiento Coulombiano, cuando se suprimen los espines de las partículas, como veremos en la siguiente sección. De esta forma, suministra una especie de generalización como acción a distancia, de una interacción electromagnética a distancias arbitrarias y a corta distancia el equivalente a la interacción débil. La novedad es que ha sido obtenida suponiendo un grupo de simetrías más amplio que el grupo de Poincaré.

#### 4.5.1. Descripción síncrona

Una vez que un cierto observador inercial queda fijado, consideremos que éste realiza una descripción síncrona, es decir, que usa como parámetro de evolución su tiempo  $t$ , que resulta ser el mismo que los dos tiempos  $t_1$  y  $t_2$  de las dos partículas. En este caso,  $t = t_1 = t_2$ ,  $\dot{t}_1 = \dot{t}_2 = 1$ , y por lo tanto

$$L_I = g \sqrt{\frac{c^2 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2}} = g \frac{\sqrt{c^2 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}}{r} \quad (4.78)$$

donde  $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  es la separación instantánea entre las dos cargas en este sistema de referencia, y  $\mathbf{u}_a = d\mathbf{r}_a/dt$  la velocidad de la carga  $a$ .

Un promedio sobre la posición y velocidad de la carga, en el centro de masa de la partícula 1 implica que  $\langle \mathbf{r}_1 \rangle = \mathbf{q}_1$  y  $\langle \mathbf{u}_1 \rangle = 0$ , de tal manera que la interacción se reduce a la interacción Coulombiana instantánea entre el centro de masa de la primera partícula y el centro de carga de la otra. Un nuevo promedio sobre la otra corresponde finalmente a la interacción Coulombiana instantánea de dos partículas puntuales sin espín, puesto que al eliminar el zitterbewegung estamos suprimiendo la estructura del espín.

Esto está sugiriendo que, en el sistema internacional de unidades, la constante de acoplamiento  $gc = \pm e^2/4\pi\epsilon_0$  en términos de las cargas eléctricas de cada partícula y donde el signo  $\pm$  depende de si las cargas son de signos opuestos o del mismo signo. Si la constante de acoplamiento, que tiene dimensiones de acción, la escribimos como  $g = \alpha\hbar$ , resulta que la constante adimensional  $\alpha$ , es precisamente la constante de estructura fina

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}.$$

De esta forma la interacción es independiente de las masas de las partículas y en la descripción síncrona toma la forma

$$L_I = \alpha\hbar \frac{\sqrt{c^2 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}}{r}.$$

La Lagrangiana del sistema de las dos partículas  $\tilde{L} = \tilde{L}_1 + \tilde{L}_2 + \tilde{L}_I$  no es invariante bajo cambio de escala, pues las  $\tilde{L}_i$ ,  $i = 1, 2$  no lo son, por lo que un cambio de escala espacio-temporal lo que nos describe es la interacción, con la misma  $\tilde{L}_I$  de dos partículas de la misma carga y el mismo espín, pero de masas diferentes de las anteriores. Si inicialmente estábamos describiendo la interacción entre dos electrones, el cambio de escala lo que sugiere es que el sistema material reescalado corresponde a la interacción, con la misma Lagrangiana de interacción  $\tilde{L}_I$ , de dos partículas de la misma carga y espín que las anteriores, ambas de la misma masa, pero distinta de la masa de los electrones. Estaríamos describiendo la interacción entre dos muones o dos partículas tau. Sin embargo, si utilizamos variables adimensionales usando como unidad de longitud  $R_0 = \hbar/2mc$  el radio del zitterbewegung y como unidad de velocidad la constante universal  $c$ , la Lagrangiana de interacción nos queda

$$L_I = \frac{\alpha\hbar c}{\hbar/2mc} \frac{\sqrt{1 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}}{r} = 2\alpha mc^2 \frac{\sqrt{1 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}}{r},$$

donde todas las variables son adimensionales. Si  $L_1$  y  $L_2$  dependen de la masa, reescalando toda la Lagrangiana por el factor  $mc^2$ , nos queda finalmente una Lagrangiana adimensional que en la descripción síncrona queda

$$L = L_1 + L_2 + 2\alpha \frac{\sqrt{1 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}}{r}, \quad (4.79)$$

y que es independiente de las masas de las partículas y donde el único parámetro físico es la constante de estructura fina  $\alpha$ .

La Lagrangiana (4.77) quedaría en la descripción síncrona de la forma

$$L_I = \alpha\hbar \frac{c^2 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)},$$

con la misma constante de acoplamiento. Si hacemos el reescalamiento anterior en términos de la unidad de longitud  $R_0$  la velocidad  $c$ , y después reescalamos toda la Lagrangiana por  $mc^2$ , nos queda

$$L = L_1 + L_2 + 2\alpha \frac{1 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}, \quad (4.80)$$

con todas las variables adimensionales y en términos de la misma constante adimensional  $\alpha$ .

Una primera conclusión de esta descripción síncrona, tanto para la Lagrangiana (4.78) como la (4.77) es que para que haya interacción tiene que ser siempre  $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{u}_2$ , pues en caso contrario no existiría interacción. Un sistema de dos electrones en reposo con espines paralelos y moviéndose al unísono  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ , no interaccionan independientemente de la distancia a que estén separados sus centros de carga  $r$ . Lo mismo un electrón y un positrón con los espines opuestos, se podría tener que  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ , y por lo tanto la Lagrangiana de interacción sería idénticamente nula.

El formalismo es invariante Poincaré mientras que la interacción es además invariante bajo el grupo ampliado  $\mathcal{S}$ , que contiene también cambios de escala y rotaciones locales. La parte libre  $L_0$  describiría partículas de espín 1/2 y diferentes masas, pero la interacción sería independiente de las masas de las partículas. Todos los leptones, o todos los quarks, que poseen masas diferentes, vendría descrita su interacción por la misma  $\tilde{L}_I$ .

La derivada variacional de la  $L$  con respecto a las variables  $\mathbf{r}_a$  nos produce de la parte  $L_a$  el término  $-d\mathbf{p}_a/dt$ ,

$$-\frac{d\mathbf{p}_a}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_a}{\partial \mathbf{u}_a} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial L_a}{\partial \mathbf{a}_a} \right),$$

por ser  $L_a$  independiente de  $\mathbf{r}_a$ , y de la parte  $L_I$  la expresión

$$\frac{\partial L_I}{\partial \mathbf{r}_a} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_I}{\partial \mathbf{u}_a} \right) = \mathbf{F}_a$$

que nos lleva a las ecuaciones

$$\frac{d\mathbf{p}_a}{dt} = \mathbf{F}_a, \quad a = 1, 2.$$

La derivada variacional con respecto a las variables de orientación, es la misma que en el caso libre de cada partícula, pues  $L_I$  es independiente de ellas y resulta

$$\frac{d\mathbf{W}_a}{dt} = \boldsymbol{\omega}_a \times \mathbf{W}_a, \quad a = 1, 2.$$

Como por otra parte, el momento lineal mecánico de cada partícula se puede escribir en términos de la velocidad del centro de masa de cada una, esto es  $\mathbf{p}_a = \gamma(v_a)m\mathbf{v}_a$ ,  $a = 1, 2$ , la primera de las ecuaciones nos definiría la aceleración de los centros de masa de cada partícula, por lo que reescribir el momento lineal de esta forma equivale a incluir, en términos de  $\mathbf{r}_a$  y sus derivadas, la definición del centro de masa de cada partícula, esto es:

$$\mathbf{q}_a = \mathbf{r}_a + \frac{(\mathbf{q}_a - \mathbf{r}_a)^2}{c^2 - \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{u}_a} \frac{d^2 \mathbf{r}_a}{dt^2}$$

o lo que es lo mismo, la ecuación diferencial de segundo orden para la posición del centro de carga de cada partícula, en términos de la posición y velocidad del centro de masa de las mismas:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_a}{dt^2} = \frac{c^2 - \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{u}_a}{(\mathbf{q}_a - \mathbf{r}_a)^2} (\mathbf{q}_a - \mathbf{r}_a), \quad a = 1, 2.$$

Haremos uso de esta forma de describir la interacción de dos electrones, que conduce a la existencia de estados ligados entre ellos, en la sección **6.6**.



#### 4.6. Apéndice: El grupo $\mathcal{S} = \mathcal{W} \otimes SU(2)_T \otimes U(1)_Q$

Vamos a analizar las representaciones de este grupo, en particular las representaciones de los generadores de las diferentes transformaciones infinitesimales. La parte correspondiente a los generadores de las rotaciones, es un duplicado de lo visto en el Apéndice 3.5.

Bajo traslaciones infinitesimales de tiempo y espacio de parámetros  $\delta\tau$  y  $\delta\mathbf{b}$ , respectivamente, las variables cinemáticas transforman:

$$t' = t + \delta\tau, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \delta\mathbf{b}, \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{\alpha}, \quad \beta' = \beta$$

de tal manera que los generadores autoadjuntos de las traslaciones son

$$H = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{P} = -i\nabla, \quad [H, \mathbf{P}] = 0.$$

Bajo una dilatación infinitesimal de parámetro normal  $\delta\lambda$ , transforman como:

$$t' = t + t\delta\lambda, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{r}\delta\lambda, \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{\alpha}, \quad \beta' = \beta + \delta\lambda$$

por lo que el generador adopta la forma ( $\hbar = 1$ )

$$D = it\frac{\partial}{\partial t} + i\mathbf{r} \cdot \nabla + i\frac{\partial}{\partial \beta} = tH - \mathbf{r} \cdot \mathbf{P} - B, \quad [D, H] = -iH, \quad [D, P_j] = -iP_j.$$

Para describir la orientación podemos representar cada elemento del grupo de rotaciones por el trivector  $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{n}$ , donde  $\alpha$  es el ángulo a girar y  $\mathbf{n}$  es el vector unidad a lo largo del eje de rotación. Esta es la parametrización normal o canónica. Alternativamente, podemos representar cada rotación por el trivector  $\boldsymbol{\rho} = \tan(\alpha/2)\mathbf{n}$ . En este caso, cada matriz de rotación toma la forma

$$R(\boldsymbol{\rho})_{ij} = \frac{1}{1 + \rho^2} \left( (1 - \rho^2)\delta_{ij} + 2\rho_i\rho_j + 2\epsilon_{ikj}\rho_k \right).$$

La ventaja de esta parametrización es que la composición de dos rotaciones es especialmente simple.  $R(\boldsymbol{\rho}') = R(\boldsymbol{\mu})R(\boldsymbol{\rho})$  toma la forma

$$\boldsymbol{\rho}' = \frac{\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\rho}}{1 - \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\rho}}.$$

Bajo una rotación infinitesimal de parámetro  $\delta\boldsymbol{\mu} = \delta\boldsymbol{\alpha}/2$ , o en términos del parámetro normal, las variables cinemáticas transforman como

$$\begin{aligned} \delta t &= 0, & \delta\beta &= 0 \\ \delta r_i &= -2\epsilon_{ijk}r_j\delta\mu_k, \\ \delta u_i &= -2\epsilon_{ijk}u_j\delta\mu_k, \\ \delta\rho_i &= (\delta_{ik} + \rho_i\rho_k + \epsilon_{ikl}\rho_l)\delta\mu_k, \end{aligned}$$

de manera que la variación de las variables cinemáticas por unidad de parámetro normal de rotación  $\delta\alpha_k$  es

$$\begin{aligned} \delta t_k &= 0, & \delta\beta_k &= 0, \\ \delta r_{ik} &= -\epsilon_{ijk}r_j, \\ \delta u_{ik} &= -\epsilon_{ijk}u_j, \\ \delta\rho_{ik} &= \frac{1}{2}[\delta_{ik} + \rho_i\rho_k + \epsilon_{ikl}\rho_l], \end{aligned}$$

y así los generadores autoadjuntos  $J_k$ , son, utilizando unidades naturales  $\hbar = 1$  y  $c = 1$ ,

$$J_k = i\epsilon_{ijk}r_j \frac{\partial}{\partial r_i} + i\epsilon_{ijk}u_j \frac{\partial}{\partial u_i} + \frac{1}{2i} \left( \frac{\partial}{\partial \rho_k} + \rho_k \rho_i \frac{\partial}{\partial \rho_i} + \epsilon_{ikl} \rho_l \frac{\partial}{\partial \rho_i} \right).$$

Pueden ser separados en tres partes, de acuerdo a los diferentes operadores diferenciales involucrados, que derivan con respecto a las tres clases de variables cinemáticas  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{u}$  y  $\boldsymbol{\rho}$ , respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{L} + \mathbf{Z} + \mathbf{W}, \\ L_k &= i\epsilon_{ijk}r_j \frac{\partial}{\partial r_i}, \\ Z_k &= i\epsilon_{ijk}u_j \frac{\partial}{\partial u_i}, \quad W_k = \frac{1}{2i} \left( \frac{\partial}{\partial \rho_k} + \rho_k \rho_i \frac{\partial}{\partial \rho_i} + \epsilon_{ikl} \rho_l \frac{\partial}{\partial \rho_i} \right). \end{aligned} \quad (4.81)$$

Todos ellos satisfacen las reglas de conmutación del momento angular y conmutan entre sí:

$$\begin{aligned} [L_j, L_k] &= i\epsilon_{jkl}L_l, \quad [Z_j, Z_k] = i\epsilon_{jkl}Z_l, \quad [W_j, W_k] = i\epsilon_{jkl}W_l, \\ [\mathbf{L}, \mathbf{Z}] &= [\mathbf{L}, \mathbf{W}] = [\mathbf{Z}, \mathbf{W}] = 0. \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$[J_j, J_k] = i\epsilon_{jkl}J_l, \quad [\mathbf{J}, H] = [\mathbf{J}, D] = 0, \quad [J_j, P_k] = i\epsilon_{jkl}P_l.$$

La variable de orientación anterior  $\boldsymbol{\rho}$ , bajo un boost general de velocidad  $\mathbf{v}$ , transforma como

$$\boldsymbol{\rho}' = \frac{\boldsymbol{\rho} + \mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})}{1 + G(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})},$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) &= \frac{\gamma(v)}{1 + \gamma(v)} (\mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{v}(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\rho}) + (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\rho}) \times \mathbf{v}), \\ G(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) &= \frac{\gamma(v)}{1 + \gamma(v)} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\rho})), \quad \gamma(v) = (1 - v^2)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Finalmente, bajo un boost infinitesimal de parámetro  $\delta\mathbf{v}$ ,  $\gamma(v) \approx 1$ , las variables cinemáticas transforman como:

$$\begin{aligned} \delta t &= \mathbf{r} \cdot \delta\mathbf{v} \\ \delta \mathbf{r} &= t\delta\mathbf{v} \\ \delta \mathbf{u} &= \delta\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{v}) \\ \delta \boldsymbol{\rho} &= -[\boldsymbol{\rho}(\mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{v}) + \boldsymbol{\rho}((\mathbf{u} \times \boldsymbol{\rho}) \cdot \delta\mathbf{v}) - \mathbf{u} \times \delta\mathbf{v} - \delta\mathbf{v}(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\rho}) - \\ &\quad (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\rho}) \times \delta\mathbf{v}] / 2, \\ \delta \beta &= 0, \end{aligned}$$

por lo que la variación de estas variables por unidad de parámetro infinitesimal de velocidad  $\delta v_j$ , es

$$\begin{aligned} \delta t_j &= r_j \\ \delta r_{ij} &= t\delta_{ij} \\ \delta v_{ij} &= \delta_{ij} - u_i u_j \\ \delta \rho_{ij} &= -\frac{1}{2} [\rho_j u_i + \rho_i \epsilon_{jkl} u_k \rho_l - \epsilon_{ikj} u_k - \delta_{ij} u_k \rho_k], \\ \delta \beta_j &= 0, \end{aligned}$$

de tal manera que los generadores de los boosts  $K_j$  adoptan la forma

$$K_j = ir_j \frac{\partial}{\partial t} + it \frac{\partial}{\partial r_j} + i \left( \frac{\partial}{\partial u_j} - u_j u_i \frac{\partial}{\partial u_i} \right) + \frac{1}{2i} \left( \rho_j u_i \frac{\partial}{\partial \rho_i} + \rho_i \epsilon_{jkl} u_k \rho_l \frac{\partial}{\partial \rho_i} - \epsilon_{ikj} u_k \frac{\partial}{\partial \rho_i} - u_k \rho_k \frac{\partial}{\partial \rho_j} \right)$$

Análogamente, los generadores  $K_j$  se pueden descomponer en tres partes, de acuerdo con los operadores diferenciales involucrados y los vamos a representar con las mismas letras mayúsculas que en el caso de los operadores de la descomposición de  $\mathbf{J}$  pero con una tilde superpuesta:

$$\mathbf{K} = \tilde{\mathbf{L}} + \tilde{\mathbf{Z}} + \tilde{\mathbf{W}}, \quad \tilde{L}_j = ir_j \frac{\partial}{\partial t} + it \frac{\partial}{\partial r_j}, \quad \tilde{Z}_j = i \left( \frac{\partial}{\partial u_j} - u_j u_i \frac{\partial}{\partial u_i} \right),$$

$$\tilde{W}_j = \frac{1}{2i} \left( \rho_j u_i \frac{\partial}{\partial \rho_i} + \rho_i \epsilon_{jkl} u_k \rho_l \frac{\partial}{\partial \rho_i} + \epsilon_{jki} u_k \frac{\partial}{\partial \rho_i} - u_k \rho_k \frac{\partial}{\partial \rho_j} \right)$$

Satisfacen las reglas de conmutación:

$$[\tilde{L}_j, \tilde{L}_k] = -i \epsilon_{jkl} L_l, \quad [\tilde{Z}_j, \tilde{Z}_k] = -i \epsilon_{jkl} Z_l, \quad [\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{Z}}] = [\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{W}}] = 0,$$

y también

$$[K_j, K_k] = -i \epsilon_{jkl} J_l.$$

Podemos verificar que

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \mathbf{u} \times \mathbf{Z}, \quad \tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{u} \times \mathbf{W}.$$

Si definimos el operador espín con respecto al centro de carga en la forma habitual  $\mathbf{S} = \mathbf{Z} + \mathbf{W}$ , y la parte del momento cinemático  $\tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{Z}} + \tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{u} \times \mathbf{S}$ , satisfacen

$$[S_j, S_k] = i \epsilon_{jkl} S_l, \quad [S_j, \tilde{S}_k] = i \epsilon_{jkl} \tilde{S}_l, \quad [\tilde{S}_j, \tilde{S}_k] = -i \epsilon_{jkl} S_l,$$

donde en esta última expresión hemos utilizado la ligadura de que  $u^2 = 1$ . Generan el álgebra de Lie de un grupo de Lorentz que conmuta con las traslaciones espacio-temporales,  $[\mathbf{S}, p^\mu] = [\tilde{\mathbf{S}}, p^\mu] = 0$ .

Con respecto a la parte  $SU(2)_T$ , calculemos sus generadores. Este grupo, con un elemento infinitesimal de parámetros  $\delta\nu_k$  actúa sobre las variables cinemáticas de la forma:

$$\delta t = 0, \quad \delta \beta = 0, \quad \delta r_i = 0, \quad \delta u_i = 0, \quad \delta \rho_i = (\delta_{ik} + \rho_i \rho_k + \epsilon_{ikl} \rho_l) \delta \nu_k,$$

En la parametrización  $\boldsymbol{\rho}$  del grupo de rotaciones, los vectores unidad de los ejes del cuerpo  $\mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  poseen por componentes:

$$(\mathbf{e}_i)_j = R(\boldsymbol{\rho})_{ji},$$

de manera que los operadores  $T_k = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{W}$  de proyección de la parte rotacional del espín  $\mathbf{W}$  en los ejes del cuerpo, vienen dados por

$$T_k = \frac{1}{2i} \left( \frac{\partial}{\partial \rho_k} + \rho_k \rho_i \frac{\partial}{\partial \rho_i} - \epsilon_{ikl} \rho_l \frac{\partial}{\partial \rho_i} \right). \quad (4.82)$$

Difieren de los  $W_k$  de (4.81) por el cambio de  $\boldsymbol{\rho}$  por  $-\boldsymbol{\rho}$ , seguido de un cambio global de signo. Satisfacen las reglas de conmutación:

$$[T_j, T_k] = -i \epsilon_{jkl} T_l. \quad (4.83)$$

el signo menos del lado derecho de (4.83) corresponde a la diferencia entre la interpretación activa y pasiva de las transformaciones. Una rotación de los ejes del laboratorio (rotación pasiva) posee

por generadores los  $\mathbf{J}$ , que satisfacen  $[J_j, J_k] = i\epsilon_{jkl}J_l$ . Los  $T_i$  corresponden a los generadores de las rotaciones del sistema de referencia ligado a la partícula (rotación activa), así que de esta forma, los generadores  $-T_i$  poseerán reglas de conmutación pasivas  $[-T_j, -T_k] = i\epsilon_{jkl}(-T_l)$ .

En la parametrización normal de las rotaciones  $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{n}$ , si describimos el vector unidad  $\mathbf{n}$  a lo largo del eje de rotación por los ángulos habituales, polar y acimutal  $\theta$  y  $\phi$ , respectivamente, de tal manera que  $\mathbf{n} \equiv (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$ , los anteriores generadores  $W_i$  toman la forma

$$W_1 = \frac{1}{2i} \left[ 2 \sin\theta \cos\phi \frac{\partial}{\partial\alpha} + \left( \frac{\cos\theta \cos\phi}{\tan(\alpha/2)} - \sin\phi \right) \frac{\partial}{\partial\theta} - \left( \frac{\sin\phi}{\tan(\alpha/2) \sin\theta} + \frac{\cos\theta \cos\phi}{\sin\theta} \right) \frac{\partial}{\partial\phi} \right], \quad (4.84)$$

$$W_2 = \frac{1}{2i} \left[ 2 \sin\theta \sin\phi \frac{\partial}{\partial\alpha} + \left( \frac{\cos\theta \sin\phi}{\tan(\alpha/2)} + \cos\phi \right) \frac{\partial}{\partial\theta} - \left( \frac{\cos\theta \sin\phi}{\sin\theta} - \frac{\cos\phi}{\tan(\alpha/2) \sin\theta} \right) \frac{\partial}{\partial\phi} \right], \quad (4.85)$$

$$W_3 = \frac{1}{2i} \left[ 2 \cos\theta \frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{\sin\theta}{\tan(\alpha/2)} \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\phi} \right], \quad (4.86)$$

$$W^2 = - \left[ \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\tan(\alpha/2)} \frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{1}{4 \sin^2(\alpha/2)} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right\} \right], \quad (4.87)$$

$$W_+ = W_1 + iW_2 = \frac{e^{i\phi}}{2i} \left[ 2 \sin\theta \frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\cos\theta}{\tan(\alpha/2)} \frac{\partial}{\partial\theta} + i \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{i}{\tan(\alpha/2) \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \right], \quad (4.88)$$

$$W_- = W_1 - iW_2 = \frac{e^{-i\phi}}{2i} \left[ 2 \sin\theta \frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\cos\theta}{\tan(\alpha/2)} \frac{\partial}{\partial\theta} - i \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{i}{\tan(\alpha/2) \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \right], \quad (4.89)$$

y los generadores pasivos  $T_i$  toman la forma

$$T_1 = \frac{1}{2i} \left[ 2 \sin\theta \cos\phi \frac{\partial}{\partial\alpha} + \left( \frac{\cos\theta \cos\phi}{\tan(\alpha/2)} + \sin\phi \right) \frac{\partial}{\partial\theta} - \left( \frac{\sin\phi}{\tan(\alpha/2) \sin\theta} - \frac{\cos\theta \cos\phi}{\sin\theta} \right) \frac{\partial}{\partial\phi} \right], \quad (4.90)$$

$$T_2 = \frac{1}{2i} \left[ 2 \sin\theta \sin\phi \frac{\partial}{\partial\alpha} + \left( \frac{\cos\theta \sin\phi}{\tan(\alpha/2)} - \cos\phi \right) \frac{\partial}{\partial\theta} - \left( -\frac{\cos\theta \sin\phi}{\sin\theta} - \frac{\cos\phi}{\tan(\alpha/2) \sin\theta} \right) \frac{\partial}{\partial\phi} \right], \quad (4.91)$$

$$T_3 = \frac{1}{2i} \left[ 2 \cos \theta \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\sin \theta}{\tan(\alpha/2)} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \phi} \right]. \quad (4.92)$$

Los  $T_i$  están relacionados ahora con los  $W_i$ , por el cambio  $\alpha$  por  $-\alpha$  (sin cambio global de signo).

Con respecto a la parte  $U(1)_Q$ , de generador  $Q$ , que conmuta con todos los demás, la acción de un elemento infinitesimal  $\delta\chi$  de este grupo sobre las variables cinemáticas es:

$$\delta t = 0, \quad \delta\beta = \delta\chi, \quad \delta r_i = 0, \quad \delta u_i = 0, \quad \delta\rho_i = 0,$$

por lo que el generador en la representación cuántica de este grupo es el

$$Q = -i \frac{\partial}{\partial \beta}$$

Como conmuta con todos los demás, podemos sacar de la función de onda la parte dependiente de esta variable

$$Qf(\beta) = qf(\beta), \quad f(\beta) \sim e^{iq\beta},$$

con lo que la función de onda general es

$$\psi(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}, \beta) = e^{iq\beta} \Psi(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}),$$

donde la variable  $\beta$  aparece dentro de una fase general.

Los vectores propios normalizados de  $W^2 = T^2$ ,  $W_3$  y  $T_3$  para  $w = t = 1/2$ , si los escribimos en la forma  $|w_3, t_3\rangle$ , (que podemos verificar son también vectores propios de  $Z^2$  con  $z = 0$ ) se escriben como  $|0; s_3, t_3\rangle$

$$\Phi_1 = |1/2, 1/2\rangle = \sqrt{2} (\cos(\alpha/2) + i \cos \theta \sin(\alpha/2)), \quad (4.93)$$

$$\Phi_2 = |-1/2, 1/2\rangle = i\sqrt{2} \sin(\alpha/2) \sin \theta e^{-i\phi}, \quad (4.94)$$

$$\Phi_3 = |1/2, -1/2\rangle = -i\sqrt{2} \sin(\alpha/2) \sin \theta e^{i\phi}, \quad (4.95)$$

$$\Phi_4 = |-1/2, -1/2\rangle = \sqrt{2} (\cos(\alpha/2) - i \cos \theta \sin(\alpha/2)). \quad (4.96)$$

Los operadores de subida y bajada  $W_{\pm}$  y los correspondientes  $T_{\pm}$ , los transforman entre sí. Los  $\{\Phi_1, \Phi_2\}$  están ligados por  $W_{\pm}$ , y análogamente los  $\{\Phi_3, \Phi_4\}$ , mientras que los conjuntos  $\{\Phi_1, \Phi_3\}$  y  $\{\Phi_2, \Phi_4\}$  están ligados cada uno de ellos por los  $T_{\pm}$ . Por ejemplo

$$W_- \Phi_1 = \Phi_2, \quad W_- \Phi_2 = 0, \quad W_- \Phi_3 = \Phi_4, \quad W_- \Phi_4 = 0,$$

$$T_- \Phi_1 = 0, \quad T_- \Phi_2 = 0, \quad T_- \Phi_3 = \Phi_1, \quad T_- \Phi_4 = \Phi_2.$$

Forman un conjunto ortonormal con respecto a la medida normalizada e invariante, definida sobre  $SU(2)$

$$dg(\alpha, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi^2} \sin^2(\alpha/2) \sin \theta d\alpha d\theta d\phi,$$

$$\alpha \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [0, \pi], \quad \phi \in [0, 2\pi].$$

$$\int_{SU(2)} dg(\alpha, \theta, \phi) = 1.$$

La función de onda  $\psi$  se puede separar en la forma

$$\psi(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{i=4} \phi_i(t, \mathbf{r}) \chi_i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha})$$

donde las cuatro  $\chi_i$  se pueden clasificar de acuerdo con los valores propios  $|w_3, t_3 \rangle$ . Las funciones  $\phi_i(t, \mathbf{r})$  se pueden escoger como vectores propios del operador de Klein-Gordon

$$p_\mu p^\mu \phi_i(t, \mathbf{r}) = m_i^2 \phi_i(t, \mathbf{r}).$$

Las funciones  $\chi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha})$  se pueden a su vez separar en variables ya que el espín total  $\mathbf{S}$  con  $s = 1/2$ , es la suma de las dos partes  $\mathbf{S} = \mathbf{Z} + \mathbf{W}$ , con  $[\mathbf{Z}, \mathbf{W}] = 0$ , de tal manera que si la parte  $\mathbf{W}$  contribuye con  $w = 1/2$  entonces la parte  $\mathbf{Z}$  contribuye con  $z = 0$  o bien  $z = 1$ . La contribución con  $z = 0$  corresponde a las funciones  $\chi_i(\boldsymbol{\alpha})$  independientes de las variables de velocidad y el conjunto ortonormal son los anteriores  $\Phi_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , de (4.93)-(4.96) que pueden describirse en la forma  $|z; s_3, t_3 \rangle$ , con  $z = 0$ .

Como  $\mathbf{Z} = -i\mathbf{u} \times \nabla_{\mathbf{u}}$ , para la parte  $z = 1$  los vectores propios de  $Z^2$  y  $Z_3$  son los armónicos esféricos  $Y_1^i(\beta, \lambda)$ ,  $i = -1, 0, 1$ . Las variables  $\beta$  y  $\lambda$  representan la dirección del vector velocidad  $\mathbf{u}$ . Como  $[Z_i, W_j] = 0$ , podemos separar de nuevo las variables en las funciones  $\chi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha})$ . En este caso las  $\chi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum \phi_i(\beta, \lambda) \lambda_i(\boldsymbol{\alpha}, \theta, \phi)$ . Lo cuatro vectores ortonormales, vectores propios de  $S_3$ , y  $T_3$ , y de  $Z^2$  con  $z = 1$ ,  $|1; s_3, t_3 \rangle$ , son ahora

$$\Psi_1 = |1; 1/2, 1/2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( Y_1^0(\beta, \lambda) \Phi_1 - \sqrt{2} Y_1^1(\beta, \lambda) \Phi_2 \right), \quad (4.97)$$

$$\Psi_2 = |1; -1/2, 1/2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( -Y_1^0(\beta, \lambda) \Phi_2 + \sqrt{2} Y_1^{-1}(\beta, \lambda) \Phi_1 \right), \quad (4.98)$$

$$\Psi_3 = |1; 1/2, -1/2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( Y_1^0(\beta, \lambda) \Phi_3 - \sqrt{2} Y_1^1(\beta, \lambda) \Phi_4 \right), \quad (4.99)$$

$$\Psi_4 = |1; -1/2, -1/2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( -Y_1^0(\beta, \lambda) \Phi_4 + \sqrt{2} Y_1^{-1}(\beta, \lambda) \Phi_3 \right). \quad (4.100)$$

Los  $\Phi_i$  son los mismos que en (4.93-4.96) y los armónicos esféricos  $Y_1^i(\beta, \lambda)$  son

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \sin(\beta) e^{i\lambda}, \quad Y_1^0 = \sqrt{3} \cos(\beta), \quad Y_1^{-1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sin(\beta) e^{-i\lambda}. \quad (4.101)$$

que son ortonormales con respecto a la medida invariante  $d\mu(\beta, \lambda) = \sin(\beta)/(4\pi) d\beta d\lambda$ . Los operadores  $Z_i$  vienen dados por

$$Z_1 = i \sin \lambda \frac{\partial}{\partial \beta} + i \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \cos \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda}, \quad Z_2 = -i \cos \lambda \frac{\partial}{\partial \beta} + i \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \sin \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda},$$

$$Z_3 = -i \frac{\partial}{\partial \lambda}.$$

y los operadores de subida y bajada  $Z_\pm = Z_1 \pm iZ_2$ , son

$$Z_\pm = e^{\pm i\lambda} \left( \pm \frac{\partial}{\partial \beta} + i \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right),$$

de tal manera que

$$Z_- Y_1^1 = \sqrt{2} Y_1^0, \quad Z_- Y_1^0 = \sqrt{2} Y_1^{-1}, \quad Z_- Y_1^{-1} = 0.$$

Los cuatro espinores  $\Psi_i$  son ortonormales con respecto a la medida invariante

$$dg(\alpha, \theta, \phi; \beta, \lambda) = \frac{1}{16\pi^3} \sin^2(\alpha/2) \sin \theta \sin \beta d\alpha d\theta d\phi d\beta d\lambda$$

$$\alpha \in [0, 2\pi], \quad \beta, \theta \in [0, \pi], \quad \lambda, \phi \in [0, 2\pi].$$

Como anteriormente, los operadores de subida y bajada  $S_{\pm} = Z_{\pm} + W_{\pm}$  y los correspondientes  $T_{\pm}$  transforman las  $\Psi_i$  entre sí.

$$S_- \Psi_1 = \Psi_2, \quad S_- \Psi_2 = 0, \quad S_- \Psi_3 = \Psi_4, \quad S_- \Psi_4 = 0,$$

$$T_- \Psi_1 = 0, \quad T_- \Psi_2 = 0, \quad T_- \Psi_3 = \Psi_1, \quad T_- \Psi_4 = \Psi_2.$$

Esta es la razón por la que el espinor más general en esta representación posee cuatro componentes.

En la base con  $z = 0$ , los  $\Phi_i$  de (4.93-4.96), los operadores de espín y los vectores básicos del cuerpo, toman la forma

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} = \mathbf{Z} + \mathbf{W}, \quad \text{pero } \mathbf{Z} = 0.$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i\mathbb{I} \\ i\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -i\boldsymbol{\sigma} \\ i\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix},$$

en términos de las matrices de Pauli  $\boldsymbol{\sigma}$  y de la matriz unidad  $2 \times 2$ ,  $\mathbb{I}$ .

En la base con  $z = 1$  los  $\Psi_i$  vienen dados en (4.97-4.100), los operadores  $S_i$  y  $T_i$  toman la misma forma matricial que en el caso anterior, mientras que los vectores  $\mathbf{e}_i$  aparecen

$$\mathbf{e}_1 = \frac{-1}{9} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{-1}{9} \begin{pmatrix} 0 & -i\boldsymbol{\sigma} \\ i\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{-1}{9} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}.$$

En todos los casos, las 6 matrices Hermíticas de traza nula  $S_i, T_j$ , junto con las nueve matrices Hermíticas de traza nula  $e_{ij}$  y la matriz unidad  $4 \times 4$ , son linealmente independientes y por lo tanto forman una base completa y Hermítica del álgebra de Dirac, de manera que cualquier otro observable que sea invariante por traslación, se expresará como una combinación lineal real de estas 16 matrices Hermíticas. Hemos hecho uso de este hecho para obtener la ecuación de Dirac en este modelo.

Ambas representaciones son ortogonales entre sí,  $\langle \Phi_i | \Psi_j \rangle = 0$ , y producen dos representaciones irreducibles diferentes, de donde podemos deducir que describen dos tipos distintos de partículas del mismo espín  $1/2$ . ¿Será que una de las representaciones corresponde a la descripción de hadrones, es decir quarks, y la otra lo que describe son los leptones? Esto está sin probar ya que aunque se ha avanzado alguna sugerencia en este sentido en la sección 4.4.3, no queda claro que una de las clases de partículas tenga color y la otra no.

La representación matricial de los operadores  $Z_i$  y  $W_i$  en la base  $\Psi_i$  vienen dados por

$$\mathbf{Z} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix},$$

a pesar de que los vectores  $\Psi_i$  no son vectores propios de  $Z_3$  y  $W_3$ . En la base  $\Phi_i$ , la representación de los  $Z_i$  son las matrices nulas por lo que en este caso  $\mathbf{S} = \mathbf{W}$ . Vemos que  $\mathbf{Z}$  es un múltiplo positivo y mayor que  $\mathbf{S}$  y por lo tanto tiene su misma dirección, mientras que  $\mathbf{W}$  tiene sentido contrario, como corresponde a la representación pictórica del modelo de la portada.

En ambos casos  $z = 0$  y  $z = 1$ , se tiene que

$$T_1 \mathbf{e}_1 + T_2 \mathbf{e}_2 + T_3 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 T_1 + \mathbf{e}_2 T_2 + \mathbf{e}_3 T_3 = \mathbf{W},$$

lo que pone de manifiesto que los operadores  $T_i$  son las componentes del momento angular rotativo  $\mathbf{W}$ , en los correspondientes ejes del cuerpo  $\mathbf{e}_i$ .

## Capítulo 5

# Estructura electromagnética del electrón

### 5.1. Estructura del electrón con espín

Consideremos que un electrón clásico viene descrito por el modelo relativista en el que el centro de carga se mueve en círculos, a la velocidad de la luz, alrededor del centro de masa, y en el sistema de referencia del centro de masa.

Una de las primeras preguntas que uno se plantea es: ¿Cuál es el campo electromagnético producido por esta partícula? Como el centro de carga está acelerado, desde el punto de vista clásico el sistema debería radiar. Sin embargo, desde el punto de vista mecánico el sistema es estable y conserva tanto la energía como sus momentos lineal y angular. La radiación se deberá producir cuando el centro de masa se acelere, es decir, cuando la partícula deje de ser libre.

Existen soluciones no radiativas de las ecuaciones de Maxwell asociadas a puntos cargados que se mueven a la velocidad de la luz. Una posibilidad es considerar soluciones derivadas a partir de los potenciales de Liénard-Wiechert en la forma  $(A_{ret}^\mu + A_{adv}^\mu)/2$ , donde  $A_{ret}^\mu$  y  $A_{adv}^\mu$  son los potenciales retardados y avanzados, respectivamente. Pero incluso aunque el campo eléctrico fuese  $(\mathbf{E}_{ret} + \mathbf{E}_{adv})/2$ , no es ni estático ni siquiera de comportamiento Coulombiano. No parece reproducir lo que habitualmente consideramos que es el campo asociado a un electrón puntual en reposo. Sin embargo, el modelo de partícula puntual es solamente una aproximación a una descripción de una partícula elemental sin espín, ya que no parecen existir este tipo de partículas elementales.

Vamos a calcular el campo electromagnético instantáneo del modelo de partícula con espín y considerar a continuación una solución estática: el promedio temporal del campo retardado durante una vuelta completa de la carga. La sorpresa va a ser su comportamiento Coulombiano en cualquier dirección, cosa que no ocurre con el promedio temporal del campo avanzado.

#### 5.1.1. Formulación covariante

Podemos dar una formulación covariante tanto de los potenciales de Lienard-Wiechert como de los campos y que además sea independiente del parámetro de evolución. Si llamamos  $z^\mu(\tau) \equiv (ct_p(\tau), \mathbf{r}_p(\tau))$ , a las variables cinemáticas que describen el centro de carga de la partícula, sea  $x^\mu \equiv (ct, \mathbf{x})$  el instante y el punto de observación y llamamos  $R^\mu = x^\mu - z^\mu(\tau)$ , la expresión covariante de los potenciales de Lienard-Wiechert que genera la carga en ese punto, se escribe

$$A^\mu(x) = \frac{e}{c} \frac{\dot{z}^\mu(\tau)}{(x - z(\tau))^\nu \dot{z}_\nu(\tau)} = \frac{e}{c} \frac{\dot{z}^\mu}{R^\nu \dot{z}_\nu}, \quad e = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}, \quad A^\mu \equiv \frac{e}{c} \frac{\{1, \boldsymbol{\beta}\}}{R(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})},$$

siendo  $\tau$  el valor del parámetro arbitrario de evolución en el instante retardado,  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{u}_p(\tau)/c$ ,  $R = |\mathbf{R}|$  y  $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ . Los potenciales en ese punto no son independientes pues  $A_\mu R^\mu = e/c$  y



resulta que  $R^\nu R_\nu = 0$  en el instante retardado. Si derivamos esta expresión con respecto a  $x^\mu$ , sabiendo que  $\tau(x)$  es función del punto de observación  $x$ , y usamos la notación más compacta  $(a \cdot b) \equiv a^\mu b_\mu$

$$\partial_\mu(R \cdot R) = 0 = R_\mu - (R \cdot \dot{z}) \frac{\partial \tau}{\partial x^\mu}, \quad \tau_{,\mu} \equiv \frac{\partial \tau}{\partial x^\mu} = \frac{R_\mu}{(R \cdot \dot{z})} \equiv \frac{\{1, -\mathbf{n}\}}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})c\dot{t}_p}.$$

De esta forma, suprimiendo el factor global  $e/c$ ,

$$A_{\mu,\nu} = \frac{\ddot{z}_\mu \tau_{,\nu}}{(R \cdot \dot{z})} - \frac{\dot{z}_\mu}{(R \cdot \dot{z})^2} (\dot{z}_\nu + (R \cdot \ddot{z})\tau_{,\nu} - (\dot{z} \cdot \dot{z})\tau_{,\nu})$$

y substituyendo el  $\tau_{,\nu}$  nos queda

$$A_{\mu,\nu} = \frac{\ddot{z}_\mu R_\nu}{(R \cdot \dot{z})^2} - \frac{\dot{z}_\mu \dot{z}_\nu}{(R \cdot \dot{z})^2} - \frac{\dot{z}_\mu (R \cdot \ddot{z}) R_\nu}{(R \cdot \dot{z})^3} + \frac{\dot{z}_\mu (\dot{z} \cdot \dot{z}) R_\nu}{(R \cdot \dot{z})^3}$$

Si subimos el índice  $\nu$

$$A_{\mu}{}^{\nu} = \frac{\ddot{z}_\mu R^\nu}{(R \cdot \dot{z})^2} - \frac{\dot{z}_\mu \dot{z}^\nu}{(R \cdot \dot{z})^2} - \frac{\dot{z}_\mu (R \cdot \ddot{z}) R^\nu}{(R \cdot \dot{z})^3} + \frac{\dot{z}_\mu (\dot{z} \cdot \dot{z}) R^\nu}{(R \cdot \dot{z})^3}$$

y contrayendo  $\mu$  con  $\nu$ , es fácil ver que el primer término se cancela con el tercero y el segundo con el cuarto, por lo que  $A_{\mu}{}^{\mu} = 0$  y los potenciales verifican la condición de Lorenz.

El campo, sin el factor global  $e/c$ , aparece como

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} = \frac{\dot{z}_\nu R_\mu - \dot{z}_\mu R_\nu}{(R \cdot \dot{z})^3} ((\dot{z} \cdot \dot{z}) - (R \cdot \ddot{z})) + \frac{\ddot{z}_\nu R_\mu - \ddot{z}_\mu R_\nu}{(R \cdot \dot{z})^2}. \quad (5.1)$$

Esta expresión del campo electromagnético también puede ponerse como

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{(R \cdot \dot{z})} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\dot{z}_\nu R_\mu - \dot{z}_\mu R_\nu}{(R \cdot \dot{z})} \right). \quad (5.2)$$

Tanto los potenciales como los campos son funciones homogéneas de grado cero de las derivadas con respecto a  $\tau$  de las variables cinemáticas de la partícula que crea el campo, por lo que el resultado es independiente del tipo de parámetro de evolución  $\tau$  utilizado para la descripción de la evolución de las fuentes del campo.

### Identidades de Jacobi

El campo de una carga puntual (5.1) satisface las identidades de Jacobi

$$R_\alpha F_{\mu\nu} + R_\mu F_{\nu\alpha} + R_\nu F_{\alpha\mu} = 0, \quad \forall \alpha, \mu, \nu.$$

Con  $\alpha = 0$ ,  $\mu = i$  y  $\nu = j$ , se llega a

$$F_{ij} = \frac{R_i F_{j0} - R_j F_{i0}}{R_0}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{E},$$

pues  $F_{12} = -B_z$ ,  $F_{10} = -E_x/c$ .

### Tiempo de la partícula

Si usamos como parámetro el tiempo de la partícula,  $\tau = t_p$ , en el instante retardado, entonces como  $R^\mu \equiv (R, \mathbf{R})$ , tenemos

$$\dot{z}^\mu \equiv (c, \mathbf{u}(t_p)), \quad \ddot{z}^\mu \equiv (0, \mathbf{a}(t_p)), \quad (R \cdot \dot{z}) = cR(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}), \quad (\dot{z} \cdot \dot{z}) = c^2(1 - \beta^2), \quad (R \cdot \ddot{z}) = -\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}.$$

Como  $E_i/c = F_{0i}$ , y  $R_0 = R$ , el primer término de (5.1) da lugar al campo de velocidad, que queda

$$\frac{1}{c} \mathbf{E}_i = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{-u_i R + cR_i}{c^3 R^3 (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} c^2 (1 - \beta^2), \quad \mathbf{E}_\beta = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \beta^2}{R^2 (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}).$$

Los términos de aceleración de (5.1) dan lugar, respectivamente, a

$$\frac{-\mathbf{u}R + c\mathbf{R}}{c^3 R^3 (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}), \quad -\frac{\mathbf{a}}{c^2 R (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2}$$

y produce finalmente en el Sistema Internacional de unidades el campo de aceleración

$$\mathbf{E}_a = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})}{c^2 R (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} - \frac{\mathbf{a}}{c^2 R (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{a})}{c^2 R (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \quad (5.3)$$

### Tiempo del observador

Si usamos como parámetro de evolución el tiempo  $\tau = t$  del observador en el instante retardado  $t_r$ , entonces

$$\dot{z}^\mu \equiv \left( c \frac{dt_p}{dt}, \frac{d\mathbf{r}_p}{dt} \right), \quad \ddot{z}^\mu \equiv \left( c \frac{d^2 t_p}{dt^2}, \frac{d^2 \mathbf{r}_p}{dt^2} \right),$$

Pero de  $R = c(t - t_p)$ , derivando esta expresión con respecto a  $t$ , resulta

$$\frac{dt_p}{dt} = 1 - \frac{1}{c} \frac{dR}{dt}, \quad \frac{d^2 t_p}{dt^2} = -\frac{1}{c} \frac{d^2 R}{dt^2}$$

Por otra parte, si derivamos con respecto a  $t$ ,  $(R \cdot R) = R^2 - \mathbf{R}^2 = 0$ , se tiene:

$$2R \frac{dR}{dt} - 2\mathbf{R} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt} = 0, \quad R \frac{dR}{dt} - \mathbf{R} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt} = 0,$$

y de  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_p$ , derivando con respecto a  $t$ ,

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = -\frac{d\mathbf{r}_p}{dt}, \quad \frac{d^2 \mathbf{r}_p}{dt^2} = -\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2}.$$

y por lo tanto

$$R^\mu = (R, \mathbf{R}), \quad \dot{z}^\mu = \left( c - \frac{dR}{dt}, -\frac{d\mathbf{R}}{dt} \right), \quad \ddot{z}^\mu = \left( -\frac{d^2 R}{dt^2}, -\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} \right).$$

La parte

$$(R \cdot \dot{z}) = Rc - \left( R \frac{dR}{dt} - \mathbf{R} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right) = Rc,$$

pues el término entre paréntesis es idénticamente nulo.

$$(\dot{z} \cdot \dot{z}) = c^2 \left( 1 - \frac{1}{c} \frac{dR}{dt} \right)^2 - \left( \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)^2 = c^2 \left( 1 - \frac{2}{c} \frac{dR}{dt} \right) + \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 - \left( \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)^2$$

$$(R \cdot \ddot{z}) = -R \frac{d^2 R}{dt^2} + \mathbf{R} \cdot \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2}, \quad (\dot{z} \cdot \dot{z}) - (R \cdot \dot{z}) = c^2 \left( 1 - \frac{2}{c} \frac{dR}{dt} \right) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (R^2 - \mathbf{R}^2) = c^2 \left( 1 - \frac{2}{c} \frac{dR}{dt} \right).$$

ya que el último término  $R^2 - \mathbf{R}^2 = 0$ . Como

$$\dot{z}_i R_0 - \dot{z}_0 R_i = -\frac{dr_{pi}}{dt} R + c \frac{dt_p}{dt} R_i = R \frac{dR_i}{dt} + \left( c - \frac{dR}{dt} \right) R_i,$$

$$\ddot{z}_i R_0 - \ddot{z}_0 R_i = -\frac{d^2 r_{pi}}{dt^2} R + c \frac{d^2 t_p}{dt^2} R_i = R \frac{d^2 R_i}{dt^2} - \frac{d^2 R}{dt^2} R_i,$$

con lo que el campo queda:

$$\frac{1}{c} \mathbf{E} = \frac{e}{c} \frac{1}{c^3 R^3} \left( R \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \left( c - \frac{dR}{dt} \right) \mathbf{R} \right) c^2 \left( 1 - \frac{2}{c} \frac{dR}{dt} \right) + \frac{e}{c} \frac{1}{c^2 R^2} \left( R \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} - \frac{d^2 R}{dt^2} \mathbf{R} \right),$$

es decir

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{R}}{R^3} + \frac{eR}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) + \frac{e}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\mathbf{R}}{R} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\mathbf{n}}{R^2} + \frac{R}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{n}}{R^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \mathbf{n}}{dt^2} \right], \quad (5.4)$$

la expresión del campo debida a Heaviside-Feynman.

Para el campo magnético obtenemos

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{E} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[ \frac{1}{R} \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{n}}{dt} + \frac{1}{c} \mathbf{n} \times \frac{d^2 \mathbf{n}}{dt^2} \right] \quad (5.5)$$

### El teorema de Gauss

Que todas las componentes del campo son relevantes lo vemos si calculamos el flujo saliente en cualquier instante del campo eléctrico sobre una esfera de radio  $R$  alrededor de la carga. Todos los puntos de esta superficie poseen, en el instante  $t$ , al mismo punto retardado donde está localizada la carga. Vamos a tomar la velocidad retardada en la dirección de  $OZ$  y el vector unidad  $\mathbf{n}$  desde la carga al punto de observación formando un ángulo  $\theta$  con la velocidad. La parte del término de aceleración (5.3) del campo eléctrico es perpendicular al vector  $\mathbf{n}$ , por lo que no produce flujo. La otra parte tiene dos términos, uno radial que va en la dirección de  $\mathbf{n}$  y otra en la dirección de  $\boldsymbol{\beta}$ , que al proyectar en la dirección normal a la esfera, que tiene la misma dirección que el vector  $\mathbf{n}$  desde el punto retardado, nos queda

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{q(1 - \beta^2)}{4\pi\epsilon_0 R^2 (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}), \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \frac{q(1 - \beta^2)}{4\pi\epsilon_0 R^2 (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2}, \quad dS = R^2 \sin \theta d\phi d\theta$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{q(1 - \beta^2)}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(1 - \beta \cos \theta)^2} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

pues con el cambio  $\cos \theta = u$ ,  $\sin \theta d\theta = -du$  y la

$$\int_1^{-1} \frac{-du}{(1 - \beta u)^2} = \frac{-1}{\beta} \frac{1}{(1 - \beta u)} \Big|_1^{-1} = \frac{2}{1 - \beta^2}.$$

El resultado es independiente del valor de  $\beta$ , por lo que en el caso de una partícula con  $\beta = 1$ , también se cumple. Por lo tanto, en el caso de partículas de Dirac no debemos eliminar esta parte del campo, ya que aunque el numerador se anula, también se anula  $\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}$  y el denominador  $(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})$  en la dirección en que  $\mathbf{n} = \boldsymbol{\beta}$ , haciendo que en el límite el valor del campo no se anula sino que se hace singular. Para el cálculo del campo en el caso de partículas con espín, fuera del plano del zitterbewegung, solamente contribuye el campo de aceleración pero el de velocidad no lo podemos anular en el plano del zitterbewegung. De no incluir este término de velocidad no se satisfaría la ecuación de Maxwell  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ , es decir el teorema de Gauss.

### 5.1.2. Campo de radiación según Dirac

Dirac<sup>1</sup> parte de la idea de que el electrón (el positrón) desde el punto de vista electromagnético tiene un atributo puntual, la carga  $e$  localizada en un punto,  $z^\mu(\tau)$ , caracterizado por las variables cinemáticas de nuestro electrón con espín. Supone que el campo que crea es el campo retardado  $F_{\text{ret}}^{\mu\nu}$ . Este campo proviene de unos potenciales  $A^\mu$  que satisfacen la condición de Lorenz  $\partial_\mu A^\mu = 0$  y la ecuación con fuentes  $\square A^\mu = \mu_0 j^\mu$ , en el Sistema Internacional de unidades. De todas sus posibles soluciones escogemos la solución retardada. Si va a radiar, es necesario que esté sometido a algún campo externo  $A^\mu(x)_{\text{in}}$  que satisface las ecuaciones  $\partial_\mu A^\mu(x)_{\text{in}} = 0$  y  $\square A^\mu_{\text{in}} = 0$ , sin fuentes externas en la región donde se encuentra la partícula, por lo que el campo real en el entorno de la carga es el

$$F_{\text{act}}^{\mu\nu} = F_{\text{ret}}^{\mu\nu} + F_{\text{in}}^{\mu\nu},$$

superposición del campo externo  $F_{\text{in}}^{\mu\nu}$  y del campo retardado que crea la propia partícula. Dirac plantea que de forma simétrica el campo real podría ser la superposición de la solución avanzada  $F_{\text{adv}}^{\mu\nu}$ , más otro campo  $F_{\text{out}}^{\mu\nu}$ ,

$$F_{\text{act}}^{\mu\nu} = F_{\text{adv}}^{\mu\nu} + F_{\text{out}}^{\mu\nu},$$

que representaría la radiación emergente desde la región donde está la carga, incluyendo la que produzca la propia carga. La diferencia

$$F_{\text{rad}}^{\mu\nu} = F_{\text{out}}^{\mu\nu} - F_{\text{in}}^{\mu\nu} = F_{\text{ret}}^{\mu\nu} - F_{\text{adv}}^{\mu\nu},$$

sería un campo sin fuentes y representaría el campo radiado por el electrón. Si el electrón no estuviera solicitado por ningún campo externo, la radiación debería ser nula. Al definir  $A_{\text{rad}}^\mu = A_{\text{ret}}^\mu - A_{\text{adv}}^\mu$ , esto implica que el campo radiado por la partícula satisface la condición de Lorenz  $\partial_\mu A_{\text{rad}}^\mu = 0$  y la ecuación sin fuentes  $\square A_{\text{rad}}^\mu = 0$ , ya que es un campo que deja de estar vinculado a la carga que lo produjo, a la que abandona.

De forma alternativa a lo que hace Dirac, vamos a calcular este campo, como hace Barut<sup>2</sup>, en un punto próximo a la carga pero sobre la trayectoria de la misma  $x = z(\tau)$ , cuyos instantes retardado y avanzado corresponden a los instantes  $\tau_B = \tau - \sigma$ , y  $\tau_A = \tau + \sigma$ , respectivamente. Vamos a usar la expresión (5.1) de los campos que la representamos como

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{(R \cdot \dot{z})^3} (\dot{z}_\nu R_\mu ((\dot{z} \cdot \dot{z}) - (R \cdot \ddot{z})) + \ddot{z}_\nu R_\mu (R \cdot \dot{z})) - \{\nu \longleftrightarrow \mu\}$$

donde  $\{\nu \longleftrightarrow \mu\}$  representa al mismo término pero con  $\nu$  y  $\mu$  intercambiados. Luego hay que determinar

$$F_{\mu\nu}^{\text{rad}}(z(\tau)) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} (F_{\mu\nu}^{\text{ret}}(\tau_B) - F_{\mu\nu}^{\text{adv}}(\tau_A))$$

Para ello vamos a desarrollar a órdenes más bajos los diferentes términos. Para el campo retardado tenemos

$$R(\tau_B) = z(\tau) - z(\tau_B) = \dot{z}(\tau_B)\sigma + \ddot{z}(\tau_B)\sigma^2/2 + \dddot{z}(\tau_B)\sigma^3/6 + \dots$$

$(R \cdot \dot{z})_{\tau_B} = (\dot{z} \cdot \dot{z})_{\tau_B}\sigma + (\dot{z} \cdot \ddot{z})_{\tau_B}\sigma^2/2 + (\dot{z} \cdot \dddot{z})_{\tau_B}\sigma^3/6 + \dots = (\dot{z} \cdot \dot{z})_{\tau_B}\sigma - (\ddot{z} \cdot \ddot{z})_{\tau_B}\sigma^3/6 + \dots$ ,  
 $(R \cdot \ddot{z})_{\tau_B} = (\ddot{z} \cdot \dot{z})_{\tau_B}\sigma + (\ddot{z} \cdot \ddot{z})_{\tau_B}\sigma^2/2 + (\ddot{z} \cdot \dddot{z})_{\tau_B}\sigma^3/6 + \dots = (\ddot{z} \cdot \ddot{z})_{\tau_B}\sigma^2/2 + (\ddot{z} \cdot \dddot{z})_{\tau_B}\sigma^3/6 + \dots$ ,  
ya que para la partícula puntual  $(\dot{z} \cdot \dot{z}) = c^2$ ,  $(\dot{z} \cdot \ddot{z}) = 0$ ,  $(\ddot{z} \cdot \ddot{z}) + (\dot{z} \cdot \dddot{z}) = 0$  y así sucesivamente.

Para el campo avanzado tenemos

$$R(\tau_A) = z(\tau) - z(\tau_A) = -\dot{z}(\tau_A)\sigma + \ddot{z}(\tau_A)\sigma^2/2 - \dddot{z}(\tau_A)\sigma^3/6 + \dots$$

<sup>1</sup>P.A.M. Dirac, *Classical theory of radiating electrons*, Proc. Roy. Soc. **A 167**, 148 (1938)

<sup>2</sup>A.O. Barut, *Electrodynamics and classical theory of fields and particles*, Dover NY (1980).

$$(R \cdot \dot{z})_{\tau_A} = -(\dot{z} \cdot \dot{z})_{\tau_A} \sigma + (\dot{z} \cdot \ddot{z})_{\tau_A} \sigma^2/2 - (\dot{z} \cdot \dddot{z})_{\tau_A} \sigma^3/6 + \dots = -(\dot{z} \cdot \dot{z})_{\tau_A} \sigma + (\ddot{z} \cdot \ddot{z})_{\tau_A} \sigma^3/6 + \dots,$$

$$(R \cdot \ddot{z})_{\tau_A} = (\ddot{z} \cdot \dot{z})_{\tau_A} \sigma + (\ddot{z} \cdot \ddot{z})_{\tau_A} \sigma^2/2 + (\ddot{z} \cdot \dddot{z})_{\tau_A} \sigma^3/6 + \dots = (\ddot{z} \cdot \ddot{z})_{\tau_A} \sigma^2/2 - (\ddot{z} \cdot \dddot{z})_{\tau_A} \sigma^3/6 + \dots,$$

A orden más bajo el campo retardado en el punto intermedio ( $z(\tau)$ ), queda

$$F_{\mu\nu}^{\text{ret}}(z(\tau)) = -\frac{(\dot{z}_\nu \ddot{z}_\mu - \dot{z}_\mu \ddot{z}_\nu)_{\tau_B} + O(\sigma)}{2\sigma(\dot{z} \cdot \dot{z})^2(1 - (\ddot{z} \cdot \ddot{z})/(\dot{z} \cdot \dot{z})\sigma^2/6)^3}.$$

Para el campo avanzado tenemos a orden más bajo

$$F_{\mu\nu}^{\text{adv}}(z(\tau)) = -\frac{(\dot{z}_\nu \ddot{z}_\mu - \dot{z}_\mu \ddot{z}_\nu)_{\tau_A} + O(\sigma)}{2\sigma(\dot{z} \cdot \dot{z})^2(1 - (\ddot{z} \cdot \ddot{z})/(\dot{z} \cdot \dot{z})\sigma^2/6)^3}.$$

Por lo tanto el campo de radiación sobre la partícula queda

$$F_{\mu\nu}^{\text{rad}} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} (F_{\mu\nu}^{\text{ret}} - F_{\mu\nu}^{\text{adv}}) = \frac{1}{(\dot{z} \cdot \dot{z})^2} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{(\dot{z}_\nu \ddot{z}_\mu - \dot{z}_\mu \ddot{z}_\nu)_{\tau_A} - (\dot{z}_\nu \ddot{z}_\mu - \dot{z}_\mu \ddot{z}_\nu)_{\tau_B}}{2\sigma},$$

es decir

$$F_{\mu\nu}^{\text{rad}} = \frac{1}{(\dot{z} \cdot \dot{z})^2} \frac{d}{d\tau} (\dot{z}_\nu \ddot{z}_\mu - \dot{z}_\mu \ddot{z}_\nu) = \frac{\dot{z}_\nu \dddot{z}_\mu - \dot{z}_\mu \dddot{z}_\nu}{(\dot{z} \cdot \dot{z})^2} \quad (5.6)$$

pues  $\tau_A - \tau_B = 2\sigma$ , y que vemos es también homogénea de grado cero en las derivadas de las variables cinemáticas. El resultado de Dirac es este mismo pero con un coeficiente de  $2/3$ .

Si este campo de radiación corresponde a un fotón emitido en ese instante, produce una autofuerza de reacción sobre la propia partícula, esto producirá una variación del momento lineal de valor

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = eF_{\text{rad}}^{\mu\nu} \dot{z}_\nu = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c} \left( \frac{1}{(\dot{z} \cdot \dot{z})} \ddot{z}^\mu + \frac{(\ddot{z} \cdot \ddot{z})}{(\dot{z} \cdot \dot{z})^2} \dot{z}^\mu \right),$$

habiendo puesto  $(\ddot{z} \cdot \ddot{z}) = -(\dot{z} \cdot \dddot{z})$  y restituido el coeficiente constante en el Sistema Internacional  $e/4\pi\epsilon_0 c$ . Esta fuerza tiene sentido contrario a la velocidad del punto, ya que el coeficiente  $(\ddot{z} \cdot \ddot{z}) < 0$ , y la tercera derivada  $\dddot{z}$  tiene sentido contrario a  $\dot{z}$  sugiriendo que el fotón emitido tiene la dirección de la velocidad. Para la partícula con espín tenemos el problema de que el tetravector  $\dot{z}$ , satisface  $(\dot{z} \cdot \dot{z}) = 0$ . Si no tuviéramos este problema, para la partícula libre, si la analizamos en el CM, el término de reacción se anula idénticamente pues la derivada tercera de la posición tiene sentido contrario a la velocidad. Es necesario que el movimiento no sea libre para que se produzca esta radiación.

Por otra parte, como la carga se mueve con  $c$  y describe una trayectoria curvilínea, el campo que crea en un instante cualquiera no alcanza nunca a la carga, por lo que no existiría la autofuerza que preconiza Dirac.

### 5.1.3. El campo instantáneo de una partícula de Dirac

El campo eléctrico retardado(o avanzado) de una carga puntual en el punto de observación  $\mathbf{x}$  y en el instante  $t$  viene dado por

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\beta + \mathbf{E}_a, \quad e \equiv \frac{q}{4\pi\epsilon_0},$$

donde

$$\mathbf{E}_\beta(t, \mathbf{x}) = \frac{e(1 - \beta^2)}{R^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}), \quad (5.7)$$

$$\mathbf{E}_a(t, \mathbf{x}) = \frac{e}{Rc^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{a}), \quad (5.8)$$

son los campos de velocidad y aceleración, respectivamente. Los observables  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$  y  $\mathbf{a} = d\mathbf{u}/dt$ , son la posición, velocidad y aceleración de la carga, evaluados en el instante retardado (o avanzado)  $t_r = t - R/c$ , (o  $t_a = t + R/c$ ). El vector  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{u}/c$ , y

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|}, \quad R = |\mathbf{x} - \mathbf{r}|.$$

El campo magnético es  $\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}/c$ . Como el centro de carga del electrón se mueve a la velocidad de la luz,  $\beta = 1$ , el campo de velocidad  $\mathbf{E}_\beta$  es nulo, salvo en los puntos del plano  $XOY$  donde  $\mathbf{n} = \boldsymbol{\beta}$  en que es singular. De aquí resulta que fuera del plano  $XOY$  la única contribución al campo es la (5.8) que es siempre ortogonal al vector unidad desde la posición retardada  $\mathbf{n}$  y que disminuye a largas distancias como  $1/R$ . Y en el plano  $XOY$  también el campo eléctrico es perpendicular al vector  $\mathbf{n}$ , salvo en aquellos puntos instantáneos en los que desde el correspondiente punto retardado se tiene  $\mathbf{n} = \boldsymbol{\beta}$  en los que el campo se hace infinito.

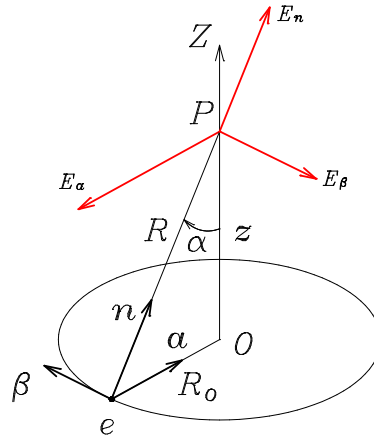


Figura 5.1: Componentes  $\mathbf{E}_n$ ,  $\mathbf{E}_\beta$  y  $\mathbf{E}_a$  del campo eléctrico en el punto  $P$ .  $\mathbf{E}_n$  y  $\mathbf{E}_\beta$  son de la misma intensidad y la parte de  $\mathbf{E}_a$  proyectada a lo largo de  $\mathbf{n}$  cancela a la parte  $\mathbf{E}_n$ , por lo que el campo resultante  $\mathbf{E}$  es siempre ortogonal al vector unidad retardado  $\mathbf{n}$  y forma en el plano normal un ángulo  $\alpha$  con el vector  $\mathbf{E}_{a\perp}$ .

El campo (5.8) tiene tres partes, que como la aceleración  $a = c^2/R_0$  se escribe

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{a}})}{RR_0(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} - \frac{e\boldsymbol{\beta}(\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{a}})}{RR_0(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} - \frac{e\hat{\mathbf{a}}}{RR_0(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} = \mathbf{E}_n + \mathbf{E}_\beta + \mathbf{E}_a.$$

siendo  $\hat{\mathbf{a}}$  un vector unidad en la dirección de la aceleración. En el punto  $P$  del eje  $OZ$  y en las unidades en las que  $e = 1$  y  $R_0 = 1$ , como  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0$ , estos campos valen  $E_n = \sin \alpha/R = E_\beta$  y  $E_a = 1/R$  y vienen representados en la figura 5.1. La componente de  $\mathbf{E}_a$  a lo largo del vector  $\mathbf{n}$  cancela completamente a la componente  $\mathbf{E}_n$ , por lo que el campo resultante está contenido en el plano perpendicular al vector  $\mathbf{n}$ , de intensidad  $1/R$  en estas unidades y formando un ángulo  $\alpha$  con la proyección en este plano de la componente  $\mathbf{E}_a$ .

Efectivamente, la componente perpendicular a  $\mathbf{n}$  de  $\mathbf{E}_a$ , que denominamos  $\mathbf{E}_{a\perp}$  es de intensidad  $\cos \alpha/R$ , que al sumarla con  $\mathbf{E}_\beta$  de intensidad  $\sin \alpha/R$  en el plano perpendicular a  $\mathbf{n}$  nos da un vector final  $\mathbf{E}$  de intensidad  $1/R$  y que forma el mismo ángulo  $\alpha$  con la proyección  $\mathbf{E}_{a\perp}$ .

Si representamos en el punto  $P$  todos los campos durante una vuelta de la carga, obtenemos un cono de revolución, de semiapertura con el eje  $OZ$  de valor  $\pi/2 - \alpha$  y cuya generatriz tiene un

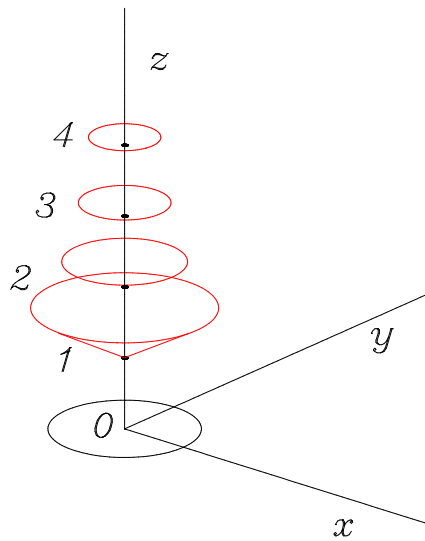


Figura 5.2: Conos de revolución que representan respectivamente los campos eléctricos instantáneos durante una vuelta completa de la carga en los puntos del eje  $OZ$  de coordenadas  $z = 1, 2, 3, 4$ . En el punto 1 el semiángulo del cono que subtiende la trayectoria de la carga es  $\alpha = \pi/4$ , y es el ángulo que forma el campo con el vector  $-a_{\perp}$ , en el instante retardado.

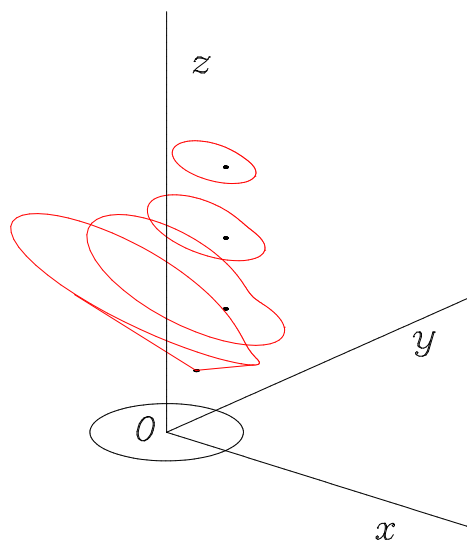


Figura 5.3: Campos eléctricos instantáneos durante una vuelta de la carga cuyos vértices respectivos son los puntos negros de coordenadas  $(x, y, z)$ , respectivamente de abajo a arriba  $(0.5, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 2)$ ,  $(1, 0, 3)$  y  $(1, 0, 4)$ .

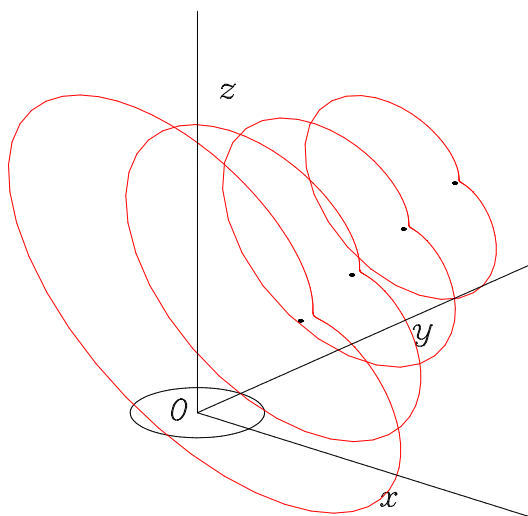


Figura 5.4: Campos eléctricos instantáneos durante una vuelta de la carga cuyos vértices respectivos son los puntos negros de coordenadas  $(x, y, z)$ , a lo largo de la recta  $y = 0, z = x$ , respectivamente de abajo a arriba  $(2, 0, 2)$ ,  $(3, 0, 3)$ ,  $(4, 0, 4)$  y  $(5, 0, 5)$ .

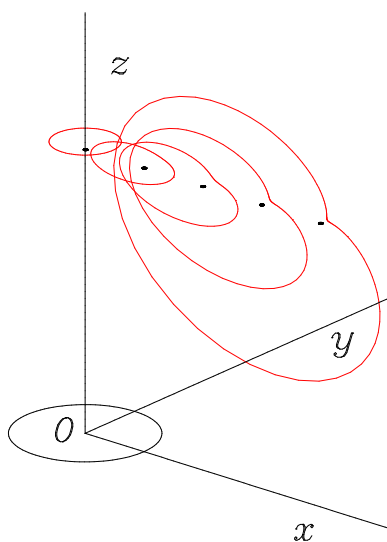


Figura 5.5: Campos eléctricos instantáneos durante una vuelta de la carga cuyos vértices respectivos son los puntos negros de coordenadas  $(x, y, z)$ , a lo largo de la recta  $y = 0, z = 4$ , respectivamente de izquierda a derecha  $(0, 0, 4)$ ,  $(1, 0, 4)$ ,  $(2, 0, 4)$ ,  $(3, 0, 4)$  y  $(4, 0, 4)$ .



tamaño  $1/R$  en estas unidades. En la figura 5.2 representamos los valores del campo resultante en cada punto de coordenada  $z = 1, 2, 3$  y 4 durante una vuelta completa de la carga.

En las figuras 5.3, 5.4 y 5.5 representamos el campo resultante total en los puntos de coordenadas que se indican. La intensidad local instantánea va creciendo pero como veremos su valor medio temporal es radial y decrece con la distancia como  $1/r^2$ , con respecto al origen.

En componentes cartesianas, si es  $\phi$  la fase de la carga en su posición retardada, salvo un factor global  $e/R_0^2$ , las componentes del campo eléctrico son

$$E_x = \frac{(1 - x \cos \phi - y \sin \phi)(x - \cos \phi + R \sin \phi)}{(R + x \sin \phi - y \cos \phi)^3} + \frac{R \cos \phi}{(R + x \sin \phi - y \cos \phi)^2}, \quad (5.9)$$

$$E_y = \frac{(1 - x \cos \phi - y \sin \phi)(y - \sin \phi - R \cos \phi)}{(R + x \sin \phi - y \cos \phi)^3} + \frac{R \sin \phi}{(R + x \sin \phi - y \cos \phi)^2}, \quad (5.10)$$

$$E_x = \frac{z(1 - x \cos \phi - y \sin \phi)}{(R + x \sin \phi - y \cos \phi)^3}, \quad R = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2 - 2x \cos \phi - 2y \sin \phi}. \quad (5.11)$$

En todas estas figuras deberemos imaginarnos el cono, que con origen en el punto de observación, subtiende el círculo de la trayectoria de la carga. Entonces, en el punto de observación deberemos trazar una línea perpendicular a cada generatriz de ese cono hasta dar con la línea que define el extremo del campo eléctrico, que son las curvas de color rojo que hemos dibujado.

#### 5.1.4. El campo promedio temporal de una partícula de Dirac

Supongamos una carga de prueba en el entorno de nuestro electrón. La frecuencia del zitterbewegung es muy alta, del orden de  $\sim 10^{21} \text{ s}^{-1}$ . Si nuestra partícula de prueba se mueve lentamente, entonces el campo eléctrico detectado en una primera aproximación será una especie de promedio temporal del campo durante una vuelta completa de la carga.

La expresión general del campo promedio temporal en un punto cualquiera es difícil de obtener. Para obtener una estimación vamos a calcularlo analíticamente en un punto en la dirección del espín y en un punto cualquiera de forma numérica. Consideremos que el electrón está en reposo, es decir su centro de masa se encuentra en el origen del sistema de referencia. El espín es constante y apunta en la dirección del eje  $OZ$ . Vamos a calcular el campo promedio en un punto  $P$  de coordenada  $z$  en el eje  $OZ$ . En la Figura 5.6, representamos las diferentes magnitudes en el instante retardado  $t_r$ , para hacer el cálculo de la ecuación (5.8).

Para ese punto particular de la figura,  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0$ , y por lo tanto

$$\mathbf{E} = \frac{e}{c^2 R} (\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{a}) - \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{a})) = \frac{e}{c^2 R} (-\mathbf{a}_\perp - \boldsymbol{\beta}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})),$$

donde el vector  $\mathbf{a}_\perp = \mathbf{a} - \mathbf{n}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})$ , es la componente de la aceleración perpendicular al vector unidad  $\mathbf{n}$ . Para el punto de observación  $P$ , la expresión  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}$  es constante en cualquier punto retardado, el valor medio temporal de  $\boldsymbol{\beta}$  durante una vuelta completa de la carga es cero, y el vector  $\mathbf{a}_\perp$  se reduce a su componente  $z$ ,  $a_\perp \sin \alpha$ . Como la aceleración en este sistema de referencia vale  $a = c^2/R_0$ ,  $a_\perp = a \cos \alpha$  y además  $\sin \alpha = R_0/R$  y  $\cos \alpha = z/R$ , el campo eléctrico promedio temporal en el punto  $P$  es

$$\mathbf{E}(z) = \frac{ez}{(R_0^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}, \quad (5.12)$$

donde  $\hat{\mathbf{z}}$  es un vector unidad a lo largo del eje  $OZ$ . El campo promedio avanzado tiene exactamente la misma expresión. Para la antipartícula hay que cambiar  $e$  por  $-e$  y la velocidad  $\boldsymbol{\beta}$  por  $-\boldsymbol{\beta}$ , que en promedio no produce modificación de (5.12).

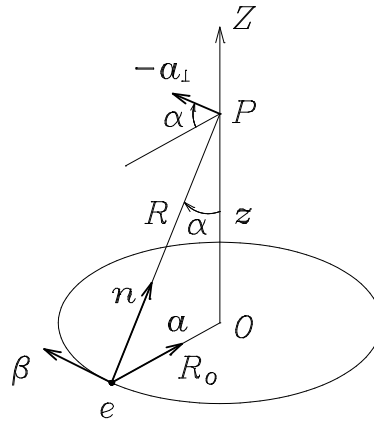


Figura 5.6: El campo eléctrico Instantáneo del electrón en el punto  $P$  posee una componente a lo largo de  $-\alpha_{\perp}$  y  $-\beta$  y comprobamos que es perpendicular a  $\mathbf{n}$ .

Si hubiéramos utilizado la expresión de Heaviside-Feynman (5.4), el campo sería el Coulombiano en el punto  $P$ , y al hacer el promedio a una vuelta de la carga su proyección en la dirección  $OZ$  vale

$$\mathbf{E}(z) = \frac{e}{R^2} \cos \alpha \hat{z},$$

que reproduce de nuevo (5.12), ya que las otras dos contribuciones  $d(\mathbf{n}/R^2)/dt$  y  $d^2\mathbf{n}/dt^2$  son ortogonales a  $OZ$  y su valor promedio a una vuelta es cero.

Es un campo estático y radial a partir del origen del sistema de referencia, con un comportamiento Coulombiano de tipo  $1/z^2$ , para  $z$  grande, pero que además no diverge en el origen. En la Figura 5.7, comparamos este campo con el campo de Coulomb de una carga puntual en el origen. La figura ha sido reescalada de tal manera que la unidad es el radio  $R_0$  del movimiento interno.

Vemos claramente el comportamiento Coulombiano de este campo promedio temporal para  $z$  grande, a partir de  $|z| \geq 5R_0$ . El máximo del campo tiene lugar a la distancia  $z = R_0/\sqrt{2}$ . Si realmente lo que mide una carga de prueba es este campo promedio temporal, su energía no diverge, con lo que la energía electrostática del electrón estaría renormalizada. Para encontrar esta energía tendríamos que encontrar la expresión general del campo e integrarla, pero esta tarea, de momento, va a ser solamente de tipo numérico. De todas formas, el campo instantáneo diverge donde está la carga, pero diverge como  $1/R$ , luego la energía va como  $1/R^2$  y como el elemento de volumen va como  $4\pi R^2 dR$ , resulta que no existe divergencia de la energía del campo instantáneo, en la posición de la carga. Veremos que existen otros puntos, contenidos en el plano del zitterbewegung, en los que el campo instantáneo también diverge, por lo que el proceso de cálculo de la energía, parece conducir a infinitos. Este cálculo está sin hacer.

Sin embargo, si estamos analizando procesos de alta energía y nuestra partícula de prueba se mueve suficientemente rápido con respecto al electrón, entonces el campo que detecta es el campo instantáneo que va como  $1/R$ . Es superior al campo promedio para  $R > 1$ , es menor que el Coulombiano para  $R < 1$ , haciéndose infinito en la posición de la carga. Esto da a entender, que desde el punto de vista integral, la contribución de la energía eléctrica debida al campo instantáneo, para  $R > 1$ , es superior a la energía electrostática Coulombiana y que la del campo promedio temporal. Esta diferencia la podríamos interpretar clásicamente, de forma ingenua, como el exceso de energía en el entorno del electrón debida a la nube de fotones virtuales que rodean a la partícula. En cualquier caso, el cálculo de la energía electromagnética del electrón

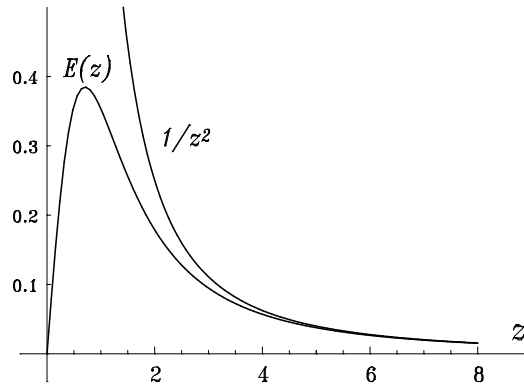


Figura 5.7: Campo eléctrico retardado(o avanzado), promedio temporal (5.12) y campo Coulombiano a lo largo del eje  $OZ$ .

requiere el conocimiento preciso de los campos instantáneos, una tarea que está todavía sin hacer.

Para calcular de forma numérica el campo promedio temporal en un punto arbitrario, consideremos las diferentes magnitudes que aparecen en la Figura 5.8. Vamos a hacer el cálculo en puntos fuera del plano  $XOY$ , por lo que solamente utilizaremos para el cálculo el campo de aceleración (5.8).

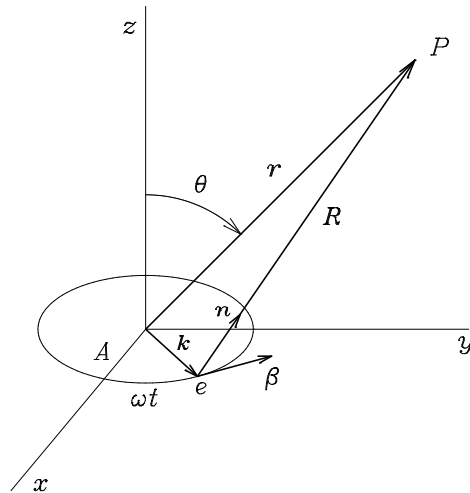


Figura 5.8: Movimiento de la carga y punto de observación  $P$ .

Si en el instante  $t = 0$  la carga se encuentra en el punto  $A$  del eje  $OX$ , entonces, en el instante  $t$ , los observables que se muestran en la figura están expresados en coordenadas cartesianas y para el sistema de referencia del laboratorio, por

$$\mathbf{k} = R_0[\cos \omega t, \sin \omega t, 0] \equiv R_0 \tilde{\mathbf{k}}, \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{u}}{c} = [-\sin \omega t, \cos \omega t, 0],$$

$$\mathbf{r} = [x, y, z], \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{c^2}{R_0}[-\cos \omega t, -\sin \omega t, 0] = \frac{c^2}{R_0} \hat{\mathbf{a}},$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{k} = R_0(\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{k}}), \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad R = |\mathbf{R}| = R_0 \tilde{R}.$$

Con estas definiciones, el campo de aceleración (5.8) se puede escribir como

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \left( \frac{e}{R_0^2} \right) \frac{\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \hat{\mathbf{a}})}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3 \tilde{R}}. \quad (5.13)$$

Vamos a comparar el valor promedio temporal de este campo con el campo Coulombiano instantáneo producido por una carga puntual en reposo  $e$ , en el origen del sistema de referencia

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \left( \frac{e}{R_0^2} \right) \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2},$$

donde  $\hat{\mathbf{r}}$  es un vector unidad en la dirección radial. Vamos a quitar de ahora en adelante el factor constante  $e/R_0^2$  entre corchetes, que aparece al comienzo de estas dos expresiones. De esta manera, la unidad de longitud resulta ser el radio del zitterbewegung,  $R_0$ .

Cuando la carga se encuentra en la posición de la Figura 5.8, el campo retardado que produce en el punto  $P$  se evalúa en el tiempo de observación  $t_o = t + R/c$ . Por lo tanto  $dt_o = dt + d\tilde{R}/\omega$ , ya que  $R_0/c = 1/\omega$ . Como

$$\tilde{R}(t) = \sqrt{(\tilde{x} - \cos \omega t)^2 + (\tilde{y} - \sin \omega t)^2 + \tilde{z}^2}, \quad d\tilde{R} = \frac{\omega}{\tilde{R}} ((\tilde{x} - \cos \omega t) \sin \omega t - (\tilde{y} - \sin \omega t) \cos \omega t) dt$$

con lo que obtenemos  $dt_o = (N(t)/\tilde{R}(t))dt$ , donde  $N$  está explícitamente dado por

$$N(t) = \tilde{R}(t) + \tilde{x} \sin \omega t - \tilde{y} \cos \omega t.$$

Vamos a calcular el campo promedio en  $P$  con respecto al tiempo de observación en ese punto y durante una vuelta completa de la carga de duración  $T$ . Si definimos el tiempo adimensional  $\tau = \omega t$ , entonces  $\omega T = 2\pi$  y por lo tanto

$$\frac{1}{T} \int_0^T E(t_o) dt_o = \frac{1}{T} \int_0^T E(t) \frac{N(t)}{\tilde{R}(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E(\tau) \frac{N(\tau)}{\tilde{R}(\tau)} d\tau. \quad (5.14)$$

En términos del parámetro adimensional  $\tau$ , las diferentes expresiones aparecen como

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{a}}) = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{a}}) - \hat{\mathbf{a}},$$

y

$$\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{a}}) = \frac{1 - \tilde{x} \cos \tau - \tilde{y} \sin \tau}{\tilde{R}^2} [\tilde{x} - \cos \tau, \tilde{y} - \sin \tau, \tilde{z}],$$

$$\hat{\mathbf{a}} = [-\cos \tau, -\sin \tau, 0],$$

mientras que

$$\mathbf{n} \times (\boldsymbol{\beta} \times \hat{\mathbf{a}}) = \frac{1}{\tilde{R}} [\tilde{y} - \sin \tau, -\tilde{x} + \cos \tau, 0],$$

y

$$1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} = \frac{1}{\tilde{R}} (\tilde{R} + \tilde{x} \sin \tau - \tilde{y} \cos \tau).$$

Nos interesan medir las componentes radial y transversales del campo,  $E_r = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{r}}$ ,  $E_\theta = \mathbf{E} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}}$ , y  $E_\phi = \mathbf{E} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}$ , respectivamente. Los vectores  $\hat{\mathbf{r}}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  y  $\hat{\boldsymbol{\phi}}$  son los vectores unidad habituales en coordenadas esféricas. Si consideramos que el punto de observación  $P$  se encuentra en el plano  $XOZ$ , entonces  $\tilde{x} = r \sin \theta$ ,  $\tilde{y} = 0$  y  $\tilde{z} = r \cos \theta$ , donde  $r$  es la distancia radial al origen en unidades de  $R_0$ .

Las expresiones finales para las distintas componentes del campo son

$$E_r(r, \theta, \tau) = \frac{(\tilde{R}^2 - r^2 - 1) \sin \theta \cos \tau + \tilde{R} \sin \theta \sin \tau + r(1 + \sin^2 \theta \cos^2 \tau)}{(\tilde{R} + r \sin \theta \sin \tau)^3},$$

$$E_\theta(r, \theta, \tau) = \frac{[(\tilde{R}^2 - 1) \cos \tau + \tilde{R} \sin \tau + r \sin \theta \cos^2 \tau] \cos \theta}{(\tilde{R} + r \sin \theta \sin \tau)^3},$$

$$E_\phi(r, \theta, \tau) = \frac{(\tilde{R}^2 - 1) \sin \tau + \tilde{R}(r \sin \theta - \cos \tau) + r \sin \theta \sin \tau \cos \tau}{(\tilde{R} + r \sin \theta \sin \tau)^3},$$

con

$$\tilde{R} = \sqrt{r^2 - 2r \sin \theta \cos \tau + 1}.$$

Para calcular el promedio temporal de estos campos tenemos que realizar la integración (5.14) de tal manera que estas expresiones de  $E_r$ ,  $E_\theta$  y  $E_\phi$ , deben ser multiplicadas por  $N(\tau)/\tilde{R}(\tau)$ , siendo ahora

$$N(\tau) = \tilde{R} + r \sin \theta \sin \tau.$$

El campo eléctrico radial promedio para  $\theta = 0$  está ya dibujado en la Figura 5.7, pero lo hemos recalculado numéricamente en la siguiente Figura 5.9. Vemos el comportamiento Coulombiano de la componente radial en las direcciones  $\theta = 0, \pi/3, \pi/4, \pi/6$ . Para direcciones próximas al plano  $XOY$ , en la región  $r < 1$  el campo promedio temporal cambia de signo, se dirige hacia el origen, en el que se anula.

Análogamente, en la Figura 5.10 se representa la componente transversal del campo eléctrico promedio retardado  $\langle E_\theta(r, \theta) \rangle$  en las mismas direcciones, que vemos que tiende a cero muy rápidamente. Para  $\theta = \pi/2$ , es claro que  $\langle E_\theta(r, \pi/2) \rangle = 0$ . El campo promedio  $\langle E_\phi(r, \theta) \rangle$  se anula por doquier para todo  $\theta \neq \pi/2$ . Sobre el plano  $\theta = \pi/2$  la rutina numérica no funciona.

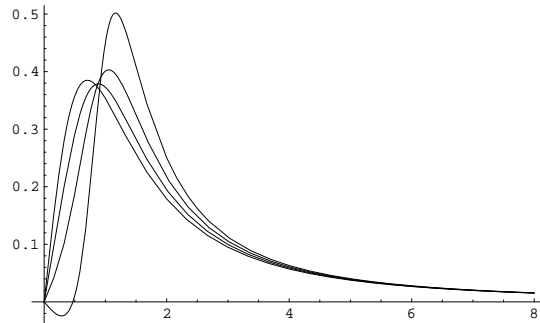


Figura 5.9: Promedio temporal de la componente radial  $\langle E_r(r) \rangle$  del campo eléctrico retardado en las direcciones  $\theta = 0, \pi/3, \pi/4$  y  $\pi/6$ .

El campo magnético promedio se calcula de la misma manera. Vamos a considerar solamente el campo retardado y lo vamos a comparar con el campo magnético producido por un momento dipolar magnético  $\boldsymbol{\mu}$ , situado en el origen del sistema de referencia. El campo de este dipolo es <sup>3</sup>

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \frac{3\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\mu}) - \boldsymbol{\mu}}{c^2 r^3}.$$

<sup>3</sup> J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley and Sons, NY 3rd. ed. (1998).

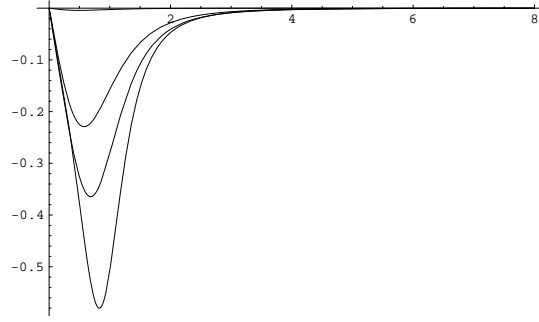


Figura 5.10: **Promedio temporal de la componente transversal  $\langle E_\theta(r) \rangle$  del campo eléctrico retardado en las direcciones  $\theta = 0, \pi/3, \pi/4$  and  $\pi/6$ . Tiende a cero muy rápidamente. Para  $\theta = \pi/2$ , se anula por doquier.**

Para esta corriente, el momento magnético producido por la carga es de valor  $ecR_0/2$  en la dirección  $OZ$ , de tal manera que en unidades de  $R_0$  se puede escribir como

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \left( \frac{e}{2cR_0^2} \right) \frac{3\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{z}}) - \hat{\mathbf{z}}}{\tilde{r}^3}.$$

Las componentes no nulas de este campo son

$$B_{0r}(r, \theta) = \left( \frac{e}{cR_0^2} \right) \frac{\cos \theta}{\tilde{r}^3}, \quad B_{0\theta}(r, \theta) = \left( \frac{e}{cR_0^2} \right) \frac{\sin \theta}{2\tilde{r}^3}. \quad (5.15)$$

En este modelo, el campo magnético instantáneo es  $\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}/c$ . Sus diferentes componentes, una vez que el factor constante  $e/cR_0^2$ , ha sido suprimido, se escriben como:

$$B_r(r, \theta, \tau) = \frac{(1 - r \sin \theta \cos \tau) \cos \theta}{(\tilde{R} + r \sin \theta \sin \tau)^3},$$

$$B_\theta(r, \theta, \tau) = \frac{r \cos \tau (1 + \sin^2 \theta) - (1 + r^2) \sin \theta - \tilde{R} r \sin \tau}{(\tilde{R} + r \sin \theta \sin \tau)^3},$$

$$B_\phi(r, \theta, \tau) = \frac{(\tilde{R} \cos \tau + \sin \tau) r \cos \theta}{(\tilde{R} + r \sin \theta \sin \tau)^3}.$$

Para el cálculo del promedio temporal del campo retardado, tenemos que multiplicar estas componentes por  $N(t)/\tilde{R}(t)$ , como en el caso anterior. La integración numérica se compara con la expresión de las componentes del campo de dipolo (5.15) en las diferentes direcciones.

El campo del dipolo (5.15) va a infinito cuando  $r \rightarrow 0$ . En las Figuras 5.11-5.13 comparamos las componente de  $B_{0r}(r)$  con la componente del campo promedio temporal  $\langle B_r(r, \theta) \rangle$ , para  $r > R_0$  y en las direcciones  $\theta = \pi/6, \pi/4$  y  $\pi/3$ . Análogamente, en las Figuras 5.14-5.16, las componentes  $B_{0\theta}(r, \theta)$  y  $\langle B_\theta(r, \theta) \rangle$ .

Los promedios temporales  $\langle B_r(r) \rangle$  y  $\langle B_\theta(r) \rangle$  no divergen en el origen sino que tienen el comportamiento que se describe en las figuras 5.17 y 5.18, respectivamente, cuando los representamos a lo largo de las direcciones  $\theta = 0, \pi/3, \pi/4$  and  $\pi/6$ , y toman los valores  $\cos \theta$  y  $-\sin \theta$  respectivamente, en el punto  $r = 0$ .

El promedio temporal de la componente transversal  $\langle B_\phi(r, \theta) \rangle$  se anula en todas las direcciones.

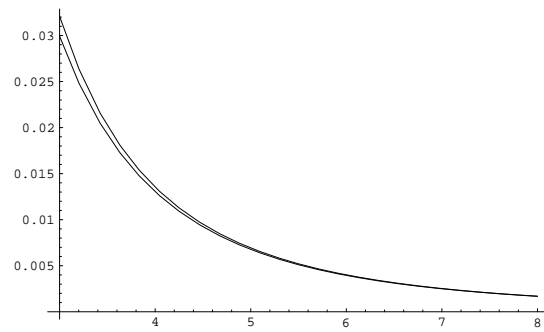


Figura 5.11: Componentes radiales del campo de dipolo  $B_{0r}(r)$  y del campo magnético promedio temporal retardado  $\langle B_r(r) \rangle$ , en la dirección  $\theta = \pi/6$ .

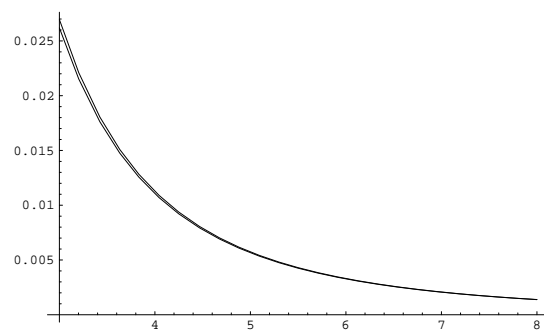


Figura 5.12: Componentes radiales del campo de dipolo  $B_{0r}(r)$  y del campo magnético promedio temporal retardado  $\langle B_r(r) \rangle$ , en la dirección  $\theta = \pi/4$ .

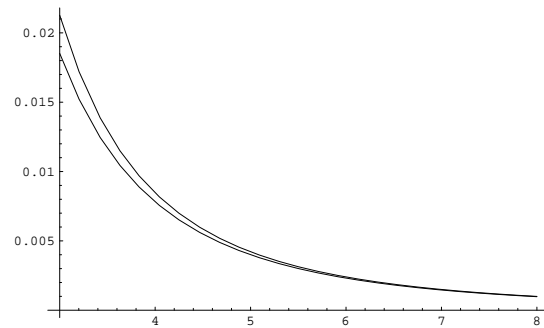


Figura 5.13: Componentes radiales del campo de dipolo  $B_{0r}(r)$  y del campo magnético promedio temporal retardado  $\langle B_r(r) \rangle$ , en la dirección  $\theta = \pi/3$ .

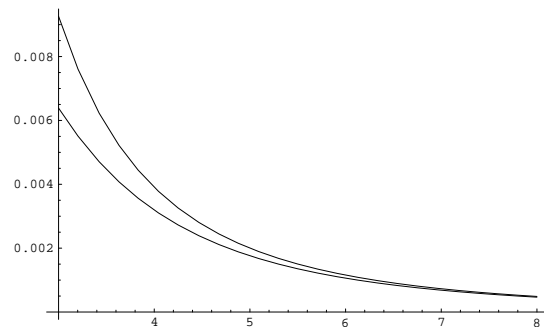


Figura 5.14: Componente promedio temporal retardada  $\langle B_\theta(r) \rangle$  y componente  $B_{0\theta}(r)$  del campo de dipolo, en la dirección  $\theta = \pi/6$ .

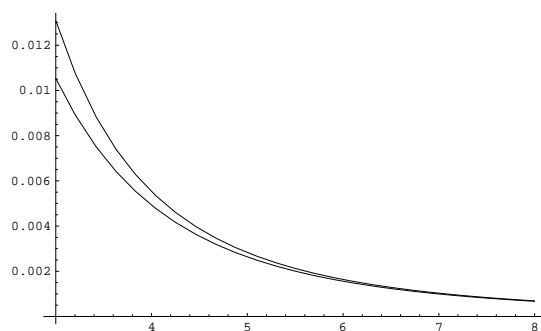


Figura 5.15: Componente promedio temporal retardada  $\langle B_\theta(r) \rangle$  y componente  $B_{0\theta}(r)$  del campo de dipolo, en la dirección  $\theta = \pi/4$ .

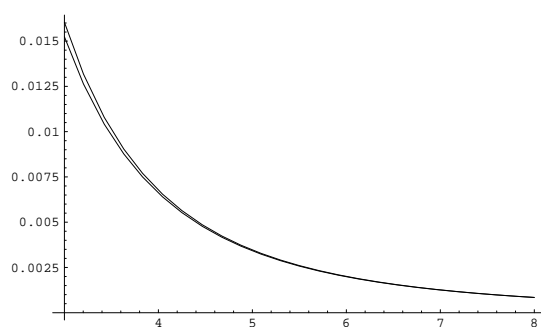


Figura 5.16: Componente promedio temporal retardada  $\langle B_\theta(r) \rangle$  y componente  $B_{0\theta}(r)$  del campo de dipolo, en la dirección  $\theta = \pi/3$ .

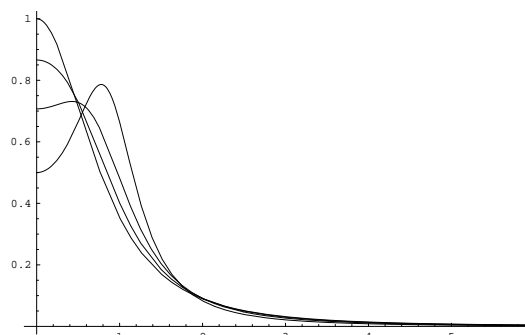


Figura 5.17: Componente promedio temporal retardada  $\langle B_r(r) \rangle$  en las direcciones  $\theta = 0, \pi/3, \pi/4$  y  $\pi/6$  y su comportamiento en  $r = 0$ . Para  $\theta = \pi/2$  se anula por doquier.

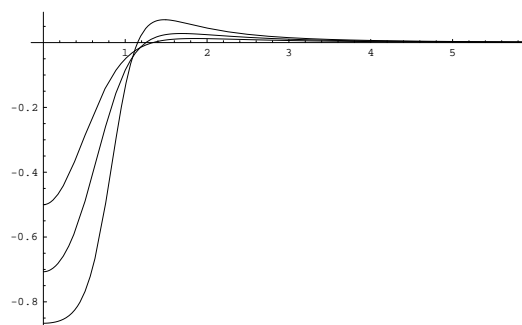


Figura 5.18: Componente promedio temporal retardada  $\langle B_\theta(r) \rangle$  en las direcciones  $\theta = 0, \pi/3, \pi/4$  y  $\pi/6$  y su comportamiento en  $r = 0$ .



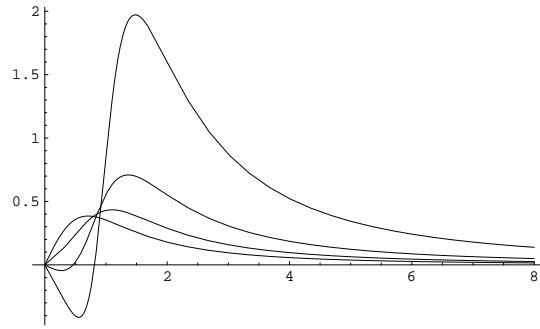


Figura 5.19: **Componente promedio temporal  $\langle E_r(r) \rangle$  del campo eléctrico avanzado, en las direcciones  $\theta = 0, \pi/3, \pi/4$  y  $\pi/6$ . No posee un comportamiento Coulombiano como el campo retardado.**

Para terminar esta sección vamos a hacer el mismo cálculo, pero para los campos avanzados en vez de los retardados.

En este caso, el tiempo de observación y el tiempo del laboratorio están relacionados por  $t_o = t - R/c$ , y por lo tanto  $dt_o = (M(t)/\tilde{R}(t))dt$ , donde  $\tilde{R}(t)$  es el mismo de antes, pero

$$M(t) = \tilde{R}(t) - \tilde{x} \sin \omega t + \tilde{y} \cos \omega t.$$

Si representamos en la figura 5.19, el promedio temporal del campo eléctrico radial avanzado, en las mismas direcciones que el de la Figura 5.9, vemos un comportamiento diferente de estas componentes avanzadas, y aunque el campo decrece a largas distancias, no tiene un comportamiento Coulombiano.

### 5.1.5. Energía y momento angular electromagnético

#### Energía electromagnética

Si calculamos la energía electromagnética asociada al campo en el instante  $t_o$ , como  $\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}/c$ , resulta que la densidad de energía

$$h(t_o) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \epsilon_0 E^2 - \frac{1}{2} \epsilon_0 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})^2,$$

por lo que la energía en cualquier instante del tiempo de observación  $t_o$  vale

$$\mathcal{E}(t_o) = \int_{\mathbb{R}^3} h(t_o) dV.$$

El valor del campo, debe ser evaluado a partir de la localización de la carga en el correspondiente tiempo retardado  $t_r$ , con  $t_o = t_r + R/c$ .

Como hemos analizado en el teorema de Gauss, es necesario considerar los dos campos, aunque el  $\mathbf{E}_\beta$  se anula salvo en los puntos singulares del plano  $XOY$  cuando  $\beta \rightarrow 1$ . Como  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\beta + \mathbf{E}_a$ ,

$$\mathbf{E}^2 = E_\beta^2 + E_a^2 + 2\mathbf{E}_\beta \cdot \mathbf{E}_a.$$

Como

$$\mathbf{E}_\beta = \frac{e(1 - \beta^2)}{R^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}),$$

$$\mathbf{E}_a = \frac{e}{Rc^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{a}).$$

Los vectores que aparecen, en términos de un valor arbitrario de  $\beta$  son

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \frac{1}{\tilde{R}}[\tilde{x} - \cos \omega t, \tilde{y} - \sin \omega t, \tilde{z}], \\ \boldsymbol{\beta} &= \beta[-\sin \omega t, \cos \omega t, 0], \\ \mathbf{a} &= \frac{\beta^2 c^2}{R_0}[-\cos \omega t, -\sin \omega t, 0].\end{aligned}$$

Los productos escalares

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} &= \frac{\beta^2 c^2}{R_0 \tilde{R}}(1 - \tilde{x} \cos \omega t - \tilde{y} \sin \omega t) \\ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} &= \frac{\beta}{\tilde{R}}(-\tilde{x} \sin \omega t + \tilde{y} \cos \omega t), \\ 1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} &= \frac{1}{\tilde{R}}(\tilde{R} + \beta \tilde{x} \sin \omega t - \beta \tilde{y} \cos \omega t)\end{aligned}$$

La parte  $E_\beta^2$ ,  $(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})^2 = (1 + \beta^2 - 2\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})$ , con lo que

$$E_\beta^2 = \frac{e^2 (1 - \beta^2)^2 (1 + \beta^2 - 2\beta(-\tilde{x} \sin \omega t + \tilde{y} \cos \omega t) / \tilde{R})}{R_0^4 \tilde{R}^4 (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^6}. \quad (5.16)$$

La parte de  $\mathbf{E}_a^2$ ,

$$[\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{a})]^2 = a^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - (1 - \beta^2)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})^2,$$

por lo que  $\mathbf{E}_a^2$  se escribe

$$\begin{aligned}E_a^2 &= \frac{e^2 (a^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - (1 - \beta^2)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})^2)}{R^2 c^4 (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^6}, \\ E_a^2 &= \frac{e^2 \beta^4 [\tilde{R}^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - (1 - \beta^2)(1 - \tilde{x} \cos \omega t - \tilde{y} \sin \omega t)^2]}{R_0^4 \tilde{R}^4 (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^6}\end{aligned} \quad (5.17)$$

habiendo definido la distancia adimensional  $\tilde{R} = R/R_0$ . Finalmente la parte  $2\mathbf{E}_\beta \cdot \mathbf{E}_a$  contiene la parte

$$(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \cdot [\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{a})] = (\beta^2 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}),$$

ya que el término  $\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{a} = 0$ . Por lo tanto

$$2\mathbf{E}_\beta \cdot \mathbf{E}_a = \frac{e^2 2\beta^2(1 - \beta^2)(\beta^2 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})(1 - \tilde{x} \cos \omega t - \tilde{y} \sin \omega t)}{R_0^4 \tilde{R}^4 (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^6}. \quad (5.18)$$

Para la parte  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})^2$  solamente contribuye  $\mathbf{E}_\beta$ ,

$$-\frac{1}{2}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})^2 = -\frac{e^2 (1 - \beta^2)^2 (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2}{R_0^4 2\tilde{R}^4 (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^6}, \quad (5.19)$$

Vamos a eliminar de estos términos el factor dimensional  $\epsilon_0 e^2 / R_0^4$ , y para reescribirlo en el Sistema Internacional de Unidades, deberemos reemplazar  $e \rightarrow e/4\pi\epsilon_0$ .

La densidad de energía que hay que integrar, en variables adimensionales es la suma de los cuatro términos (5.16), (5.17), (5.18) y (5.19), y resulta ser:

$$h(x, y, z, t_o) =,$$

y la energía

$$\mathcal{E}(t_o) = \frac{\epsilon_0 e^2 R_0^3}{(4\pi\epsilon_0)^2 R_0^4} \int_{\mathbb{R}^3} h(x, y, z, t_o) d\tilde{V}$$

donde en la integral, el elemento de volumen  $dV = R_0^3 d\tilde{V}$  se hace en términos de variables adimensionales y por lo tanto el resultado de la integración es un número finito y adimensional  $M$ . La integral depende del valor de  $\beta$  y una vez realizada la integral hay que hacer el límite  $\beta \rightarrow 1$ . Como el centro de masa del electrón está en reposo,  $R_0 = \hbar/2mc$  y si suponemos que toda su energía es puramente electromagnética, podemos identificar esta energía con la energía en reposo,

$$mc^2 = \frac{e^2 2mc}{4\pi\epsilon_0 4\pi\hbar} M, \quad 1 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 hc} M = \frac{\alpha}{2\pi} M, \quad \alpha \simeq \frac{1}{137}, \quad (5.20)$$

siendo  $\alpha$  la constante de estructura fina, por lo que el valor de  $e^2$  quedaría unívocamente determinado (salvo un signo) una vez realizada la anterior integral, que no está exenta de dificultades, y que si esto fuera correcto nos debería dar el valor  $M = 2\pi/\alpha \approx 861.009$ .

$$e^2 = \frac{4\pi\epsilon_0 hc}{M}.$$

Una partícula cuya estructura fuera puramente electromagnética, tendría un único valor de la carga eléctrica salvo un signo, lo que correspondería a que electrones, muones y partículas tau, y sus correspondientes antipartículas, que solamente interaccionan de forma electro-débil, poseerían la misma carga eléctrica, independientemente de su masa. En el caso de un quark, no toda la estructura es puramente electromagnética, ya que también interacciona de forma fuerte, por lo que en la ecuación (5.20) implicaría una energía electromagnética fracción  $k$  de su energía total en reposo  $mc^2$ , con lo que

$$e^2 = k \frac{4\pi\epsilon_0 hc}{M}, \quad k < 1.$$

Los quarks tendrían una carga eléctrica, independiente de su masa, y menor que la de los objetos que solamente interaccionan de forma electrodébil. De hecho la teoría nos debería llevar a que  $k = 1/9$  o bien  $4/9$  para los quarks down y up, respectivamente.

El valor de la energía debe ser independiente del tiempo de observación  $t_o$ , ya que el movimiento de la carga es estacionario, por lo que también debe coincidir con su valor medio temporal,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E}(t_o) dt_o = \frac{\epsilon_0}{T} \int_{\mathbb{R}^3} dV \int_0^T E^2 dt_o,$$

para cualquier valor de  $T$ , en particular para el período de una vuelta completa.

### Momento angular electromagnético

Si calculamos el momento angular electromagnético con respecto al origen, lo proyectamos en la dirección  $OZ$  y lo identificamos con el momento angular mecánico de la partícula  $-\hbar/2$ , obtenemos otra ecuación

$$-\frac{\hbar}{2} = \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{r} \times \mathbf{g})_z dV,$$

$$\mathbf{g} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}/c) = \frac{\epsilon_0}{c} (E^2 \mathbf{n} - \mathbf{E}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_\beta)),$$

ya que  $\mathbf{E}_a$  es perpendicular a  $\mathbf{n}$ . La parte

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{n})_z = \frac{R_0}{R} (\tilde{y} \cos \omega t - \tilde{x} \sin \omega t),$$

va multiplicada por  $E^2$ , que es la suma de los tres términos (5.16), (5.17) y (5.18) y por  $\epsilon_0/c$ . La parte  $\mathbf{r} \times \mathbf{E} = \mathbf{r} \times \mathbf{E}_\beta + \mathbf{r} \times \mathbf{E}_a$ , por lo que tenemos dos términos

$$(\mathbf{r} \times (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}))_z = \frac{R_0}{\tilde{R}} (\tilde{y} \cos \omega t - \tilde{x} \sin \omega t) - \beta x \cos \omega t - \beta y \sin \omega t,$$

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{a})_z = \beta^2 c^2 (\tilde{y} \cos \omega t - \tilde{x} \sin \omega t),$$

los cuales aparecen multiplicados por

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_\beta = \frac{e(1 - \beta^2)}{R^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2}.$$

Como  $(\mathbf{r} \times \mathbf{E})_z = xE_y - yE_x$ ,

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{E}_\beta)_z = \frac{e(1 - \beta^2)}{R^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \left( \frac{1}{\tilde{R}} (y \cos \omega t - x \sin \omega t) - \beta x \cos \omega t - \beta y \sin \omega t \right),$$

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{E}_a)_z = \frac{e}{Rc^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{r} \times (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}))_z - (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})(\mathbf{r} \times \mathbf{a})_z],$$

con lo que

$$-\frac{\epsilon_0}{c} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_\beta)(\mathbf{r} \times \mathbf{E}_\beta)_z = -\frac{\epsilon_0 e^2 (1 - \beta^2)^2 R_0}{cR^4(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5} \left( \frac{1}{\tilde{R}} (\tilde{y} \cos \omega t - \tilde{x} \sin \omega t) - \beta \tilde{x} \cos \omega t - \beta \tilde{y} \sin \omega t \right).$$

Análogamente

$$-\frac{\epsilon_0}{c} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_\beta)(\mathbf{r} \times \mathbf{E}_a)_z = -\frac{\epsilon_0 e^2 (1 - \beta^2) \beta^2}{cR^3 \tilde{R} (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5} \times$$

$$\left[ (1 - \tilde{x} \cos \omega t - \tilde{y} \sin \omega t) \left( \frac{1}{\tilde{R}} (\tilde{y} \cos \omega t - \tilde{x} \sin \omega t) - \beta \tilde{x} \cos \omega t - \beta \tilde{y} \sin \omega t \right) - \right.$$

$$\left. - \left( \tilde{R} + \beta \tilde{x} \sin \omega t - \beta \tilde{y} \cos \omega t \right) (\tilde{y} \cos \omega t - \tilde{x} \sin \omega t) \right]$$

$$-\frac{\hbar}{2} = \int_{\mathbb{R}} S_z dV,$$

siendo

$$S_z =$$

Supongamos que hacemos la evaluación en el instante de observación  $t_0 = 0$ , cuando la carga se encuentra en el punto  $A \equiv (1, 0, 0)$ . Para este punto, la distancia retardada hasta la carga es  $\tilde{R} = 0$ . Para otro punto cualquiera  $P \equiv (x, y, z)$  el correspondiente punto retardado es el  $B \equiv (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ , que como el radio del círculo es 1, el  $\theta = -\tilde{R}$ , como se muestra en la figura.

Vamos a hacer el siguiente cambio de variables

$$x = R \sin \lambda \cos \phi + \cos R, \quad y = R \sin \lambda \sin \phi - \sin R, \quad z = R \cos \lambda, \quad R \in [0, \infty], \quad \lambda \in [0, \pi] \quad \phi \in [0, 2\pi].$$

El Jacobiano de la transformación es

$$J = R^2 \sin \lambda (1 - \sin \lambda \sin(R + \phi)),$$

y  $R = \tilde{R}$ .

La integral que da lugar al valor  $M$ , queda en el límite  $\beta \rightarrow 1$

$$M = \int_0^\infty dR \int_0^\pi d\lambda \int_0^{2\pi} d\phi \frac{8 \sin \lambda}{(2 - \cos(R - \lambda + \phi) + \cos(R + \lambda + \phi))^3},$$

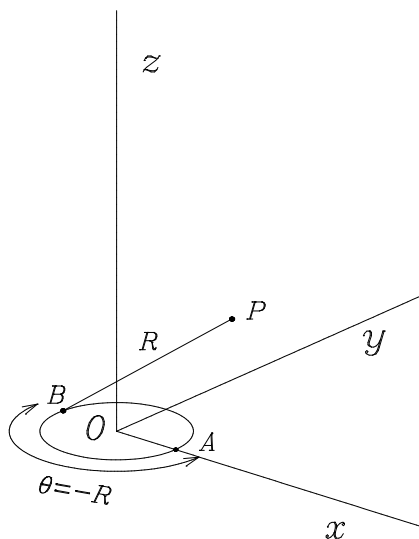


Figura 5.20: La distancia adimensional  $R$  desde el punto  $P$  al punto retardado  $B$  es la misma que la longitud del arco  $AB$ .

Para la otra integral

$$\frac{-R \sin \lambda \sin(R + \phi) R^2 \sin \lambda (1 - \sin \lambda \sin(R + \phi))}{R^4 (1 - \sin \lambda \sin(R + \phi))^4}$$

$$N = \int_0^\infty dR \int_0^\pi d\lambda \int_0^{2\pi} d\phi \frac{-\sin^2 \lambda \sin(R + \phi)}{R(1 - \sin \lambda \sin(R + \phi))^3}.$$

Ambas integrales hechas con Mathematica dan 0, pero si se hace el cálculo de forma numérica da valores oscilantes muy altos fijando la integral en  $R$  hasta ciertos valores finitos.

## Capítulo 6

# Propiedades y efectos asociados con el espín

### 6.1. Relación giromagnética

Si tenemos un punto cargado de masa  $m$  y carga  $e$  que se mueve en el espacio, su momento angular  $\mathbf{J}$  y su momento magnético  $\boldsymbol{\mu}$  respecto de un punto, satisfacen la relación

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2m}\mathbf{J},$$

pues de su definición  $\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ,  $\boldsymbol{\mu} = e\mathbf{r} \times \mathbf{v}/2 = e\mathbf{r} \times m\mathbf{v}/2m$ .

En el caso del electrón, la relación entre su espín con respecto al centro de masa y su momento magnético, resulta ser

$$\boldsymbol{\mu} = g\frac{e}{2m}\mathbf{S}, \quad g = 2.$$

A la magnitud adimensional  $g$  es a lo que se denomina relación giromagnética, por ser un número que relaciona la capacidad de producir campo magnético con la propiedad mecánica ligada con la rotación.

Uno de los éxitos de la ecuación de Dirac fue el que predecía el valor  $g = 2$  de la relación giromagnética del electrón <sup>1</sup>. Más tarde, Levy-Leblond <sup>2</sup> obtuvo también la predicción  $g = 2$  pero para un objeto no relativista de espín  $s = 1/2$ , con lo que zanjaba la cuestión de que  $g = 2$  no era una propiedad exclusivamente relativista. Proca <sup>3</sup> predijo que para partículas con espín 1, tendría que ser  $g = 1$ , lo que condujo a Belinfante <sup>4</sup> a conjeturar que la relación giromagnética de las partículas elementales estaría ligada con el espín por la regla  $g = 1/s$ , cualesquiera que fuera  $s$ , a pesar de que el factor  $g$  es adimensional. Encontró modelos cuánticos teóricos de espín 3/2 en que esto se cumplía y unos años más tarde Moldauer y Case <sup>5</sup> desarrollaron un formalismo donde corroboraban esto para cualquier espín semientero. Tumanov <sup>6</sup> encontró esto mismo pero para el valor entero  $s = 2$ . En todas estas predicciones teóricas se supuso que la interacción electromagnética venía dada por el acoplamiento mínimo.

Sin embargo, Weinberg <sup>7</sup> al estudiar la interacción electrodébil hizo la predicción de que  $g = 2$  para los bosones intermedios de espín 1 que median en la interacción débil. Lo obtuvo

<sup>1</sup> P.A.M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. London* **A117**, 610 (1928).

<sup>2</sup> J.M. Levy-Leblond, *Comm. Math. Phys.* **6**, 286 (1967).

<sup>3</sup> A. Proca, *Compt. Rend.* **202**, 1420 (1936); *Journ. Phys. Radium*, **49**, 245 (1988).

<sup>4</sup> F.J. Belinfante, *Phys. Rev.* **92**, 997 (1953).

<sup>5</sup> P.A. Moldauer and K.M. Case, *Phys. Rev.* **102**, 279 (1956)

<sup>6</sup> V.S. Tumanov, *Sov. Phys. JETP*, **19**, 1182 (1964).

<sup>7</sup> S. Weinberg, in *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory*, edited by S. Deser, M. Grisaru and H. Pendleton, MIT press, Cambridge, MA (1970), p. 283.

al analizar la interacción de los bosones  $W$  con el campo electromagnético, requiriendo que la amplitud de dispersión del proceso tuviera un buen comportamiento a altas energías. Cuando se descubren experimentalmente en 1983 en el CERN, los bosones cargados  $W^\pm$  de espín 1 y se encuentra que para ellos  $g = 2$ , contrario a la conjetura de Belinfante y corroborando la predicción de Weinberg, se planteó la cuestión de hasta qué punto el valor de  $g$  sería siempre 2 para cualquier tipo de partícula elemental, independientemente del valor de su espín.

Jackiw<sup>8</sup> ha dado otro argumento de tipo dinámico, confirmando que para campos vectoriales de espín 1, la relación giromagnética debe ser  $g = 2$ , aceptando una invariancia gauge de tipo no electromagnético. Da también, algunos argumentos *ad hoc* para campos de espín  $s = 2$ , que también son consistentes con la predicción  $g = 2$ .

Por encima de todo esto, las únicas partículas cuya relación giromagnética se haya medido con precisión, encontrándose que  $g = 2$ , además de las correcciones radiativas, son los leptones cargados ( $e^\pm$ ,  $\mu^\pm$  y  $\tau^\pm$ ) y los bosones  $W^\pm$ . Por otra parte, el modelo estándar no prevé la existencia de partículas elementales de espín superior a 1, con lo que conjeturas del tipo de la de Belinfante, carecen de sentido.

El objeto de esta sección es dar argumentos no de tipo dinámico, como en estos trabajos previos, sino argumentos de tipo cinemático, aprovechando la estructura del espín de los modelos que surgen del formalismo<sup>9</sup>. Estos argumentos están basados en la doble estructura del espín con una parte rotativa y otra, en sentido contrario, debida al movimiento orbital del centro de carga con respecto al centro de masa y que sería la que produciría o estaría relacionada con el momento magnético, según la figura de la portada, que hemos visto satisface la ecuación de Dirac al ser cuantizada.

El operador momento angular de una partícula elemental más general, con respecto al origen del sistema de referencia, tanto relativista como no relativista, es

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \frac{\hbar}{i} \nabla + \mathbf{S} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{S}, \quad (6.1)$$

donde el operador espín es

$$\mathbf{S} = \mathbf{Z} + \mathbf{W}, \quad (6.2)$$

con  $\mathbf{Z} = \mathbf{u} \times \frac{\hbar}{i} \nabla_u$ , siendo  $\nabla_u$  el operador gradiente con respecto a las variables de velocidad, y  $\mathbf{W}$  es un operador diferencial lineal que deriva con respecto a las variables de orientación  $\boldsymbol{\alpha}$ , y que por lo tanto, conmuta con el otro. Por ejemplo, en la parametrización de la orientación dada por  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{n} \tan(\alpha/2)$ , el operador  $\mathbf{W}$  se escribe como

$$\mathbf{W} = \frac{\hbar}{2i} [\nabla_\rho + \boldsymbol{\rho} \times \nabla_\rho + \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\rho} \cdot \nabla_\rho)], \quad (6.3)$$

y otras parametrizaciones pueden verse en el Apéndice 3.5.

La parte primera del espín  $\mathbf{Z}$ , que está relacionada con el movimiento orbital de la carga, solamente posee valores propios enteros, sus funciones propias son los armónicos esféricos, ya que su estructura diferencial es la de un momento angular orbital que en realidad deriva solo sobre las variables de orientación del vector velocidad  $\mathbf{u}$ . La parte de espín semientero proviene del operador (6.3). Este operador  $\mathbf{W}$ , que deriva con respecto a las variables de orientación del triedro ligado a la carga, lo que tiene en cuenta es la rotación de la partícula.

Hemos visto tanto en los ejemplos relativistas como en los no relativistas que si la contribución al espín es de naturaleza orbital, relacionada con la parte del zitterbewegung,  $\mathbf{Z}$ , entonces la relación entre el espín y el momento magnético viene dada por

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2} \mathbf{k} \times \frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\frac{e}{2m} \mathbf{Z}, \quad (6.4)$$

<sup>8</sup> R. Jackiw, *Phys. Rev. D* **57**, 2635 (1998).

<sup>9</sup> M. Rivas, J.M. Aguirregabiria and A. Hernández, *Phys. Lett. A* **257**, 21 (1999).

donde  $\mathbf{k} = \mathbf{r} - \mathbf{q}$ , es decir con una relación giromagnética normal  $g = 1$ . Si el electrón tiene una relación giromagnética  $g = 2$ , esto implica que debe existir otra parte del espín proveniente de la velocidad angular, pero que no produzca contribución al momento magnético.

De aquí resulta que, para el electrón, ambas partes  $\mathbf{W}$  y  $\mathbf{Z}$  contribuyen al espín total. La parte  $\mathbf{W}$  está relacionada con las variables angulares que describen la orientación del electrón y que no contribuye a la separación  $\mathbf{k}$  entre el centro de masa y el centro de carga. Si el momento magnético está relacionado con este movimiento por la fórmula (6.4), está relacionado con la parte  $\mathbf{Z}$  pero no con el espín total  $\mathbf{S}$ . Es precisamente cuando tratamos de expresarlo en términos del espín total cuando surge el concepto de relación giromagnética.

Supongamos ahora que las dos partes  $\mathbf{Z}$  y  $\mathbf{W}$  contribuyen al espín total  $\mathbf{S}$  con sus valores cuánticos no nulos, más bajos y que además deben ser únicos, ya que al no poseer estados excitados, una partícula elemental solamente posee unos valores fijos de sus propiedades. Para partículas de Dirac hemos encontrado que el espín total es  $s = 1/2$  y que las dos partes tienen orientaciones opuestas, teniendo el espín  $\mathbf{S}$  la misma orientación que la parte  $\mathbf{Z}$ . La parte orbital no puede tener un momento angular nulo porque el movimiento del centro de carga no pasa por el centro de masa, y su valor no nulo más bajo es desde el punto de vista cuántico,  $z = 1$  y para la parte rotativa  $w = 1/2$  en sentido contrario. Al expresar el momento magnético en términos del espín total, como resulta que  $\mathbf{Z} = 2\mathbf{S}$ , es donde nos aparece que  $g = 2$ .

El valor experimental de  $g$  para leptones es

$$g_e = 2,00231930436182, \quad g_\mu = 2,0023318418, \quad g_\tau = 2,00235442,$$

hasta el mayor número de cifras decimales verificadas. Vemos que es superior al valor teórico predicho por la ecuación de Dirac  $g = 2$ . La razón estriba en que una cosa es la predicción del modelo libre y otra la medida. Cuando medimos debemos interaccionar con la partícula y la interacción modifica la cinemática. Al introducir la partícula en un campo magnético, el movimiento del centro de carga se modifica, y como básicamente el momento magnético es la intensidad de la corriente asociada a la carga multiplicada por el área encerrada por su trayectoria, y ésta se modifica, el valor del momento magnético medido no es el predicho y dependerá de la intensidad del campo magnético utilizado.

Hay una corrección cuántica radiativa que es independiente del campo magnético, y que fue determinada por Schwinger (1948), que toma el valor  $\alpha/\pi = 0.0023228$ , en términos de la constante de estructura fina, de tal manera que el valor experimental resulta ser

$$g = 2 + \frac{\alpha}{\pi} + g(B),$$

donde la parte  $g(B)$  es función del campo magnético externo.

En el caso de los protones y neutrones, la relación entre su momento magnético y espín vale:

$$\boldsymbol{\mu}_p = g_p \frac{e}{2m_p} \mathbf{S}, \quad g_p = 5,585694, \quad \boldsymbol{\mu}_n = g_n \frac{e}{2m_p} \mathbf{S}, \quad g_n = -3,826085,$$

donde  $m_p$  es la masa del protón. A pesar de ser dos partículas de espín  $1/2$  no satisfacen la ecuación de Dirac, ya que ésta predice que el correspondiente objeto cuántico debe necesariamente ser de relación giromagnética  $g = 2$ . Protones y neutrones no son partículas elementales, y es el movimiento de los quarks cargados el que suministra el momento magnético de los mismos. Esto es más claro en el neutrón que al ser de carga total cero, posee sin embargo momento magnético.



## 6.2. El reloj del electrón

De Broglie en su tesis <sup>10</sup> postula que: Toda porción de materia aislada posee un movimiento periódico de naturaleza sin precisar, cuya frecuencia viene dada por  $\nu = mc^2/h$ . Dirac sin embargo encuentra que la posible frecuencia asociada al movimiento del punto  $\mathbf{r}$  en el caso del electrón, es el doble que la que le asocia De Broglie. Esta frecuencia es la del movimiento a la velocidad de la luz del centro de carga alrededor del centro de masa en el análisis clásico y que describe un objeto de espín 1/2 al ser cuantizado y que además satisface la ecuación de Dirac. Este modelo se describe en la figura de la portada para el observador del centro de masa. El centro de carga efectúa un movimiento circular a la velocidad de la luz, de radio  $R = \hbar/2mc$  y frecuencia  $\nu_0 = 2mc^2/h$ , en este sistema de referencia.

### 6.2.1. Midiendo el reloj del electrón

Si efectivamente el electrón tuviera un movimiento interno periódico del estilo que hemos mencionado, al desplazarse con velocidad constante obtendríamos una trayectoria del centro de carga que poseería también una periodicidad espacial. Se podría hablar de su *longitud de onda* como el valor de su período espacial, o bien la longitud que su centro de masa recorre durante una vuelta de su centro de carga. Pero la periodicidad temporal depende de la velocidad de su centro de masa. En efecto, supongamos que vemos moverse al centro de masa con velocidad  $\mathbf{v}$  como se indica en la figura 6.1. Como el centro de carga se sigue moviendo a la velocidad de la luz, su velocidad transversal  $u_{\perp} = \sqrt{c^2 - v^2}$ , por lo que un electrón en movimiento tarda más tiempo en completar una vuelta, el reloj del electrón en movimiento va más despacio. Si llamamos  $T_0 = 2\pi R/c$  al tiempo que tarda en dar una vuelta para el observador del centro de masa, entonces para el que lo ve moverse con la velocidad  $\mathbf{v}$  tarda  $T = 2\pi R/u_{\perp} = \gamma(v)T_0$ , siendo  $\gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ .

Si lanzamos un haz de electrones con una velocidad de su centro de masa  $\mathbf{v}$  a través de un cristal, por ejemplo de Silicio, y la velocidad es la adecuada de tal manera que la periodicidad espacial del haz  $\lambda = vT$  y la periodicidad espacial de la red,  $d = 3,84\text{Å}$  para el Si, sean comensurables, esto es, o bien  $d = k\lambda$ , o bien  $\lambda = nd$ , con  $k$  y  $n$  sendos enteros, entonces puede tener lugar una dispersión resonante con los átomos. Si en la interacción de cada electrón con un átomo de la red, recibe un impulso transversal  $\Delta p$  y un impulso longitudinal despreciable frente a  $p$ , cuando haya atravesado una longitud que contenga  $N$  átomos y  $d$  y  $\lambda$  sean commensurables, el impulso transversal total recibido será  $N\Delta p$ . Por lo tanto este electrón se desviará un ángulo del orden de  $N\Delta p/p$ . Si, como proponen y realizan Gouanère et al.<sup>11</sup>, medimos la intensidad del haz que atraviesa el cristal en la propia dirección de incidencia, existirán unos momentos lineales para los que se detectará una disminución de esta intensidad, debido a la dispersión resonante transversal. Si  $d$  y  $\lambda$  no son commensurables, la interacción del electrón con cada átomo puede recibir impulsos laterales  $\Delta p$  en ambos sentidos y el haz no se desvía.

En la figura 6.2 tenemos un cristal de Silicio. En la figura 6.3 se representa el movimiento de dos electrones polarizados longitudinalmente y transversalmente con respecto al movimiento de su centro de masa. Se compara esta descripción con la red de átomos de silicio con los que va a interactuar.

Cuando  $d = k\lambda$ , el electrón interactúa con cada átomo que se encuentra en su camino, mientras que en el caso  $\lambda = nd$ , sufrirá una interacción resonante cada  $n$  átomos. Una mayor  $\lambda$  implica también un mayor momento lineal, y por lo tanto el ángulo de dispersión será menor.

<sup>10</sup>L. de Broglie, Thèse de doctorat (1924). Sommaire: ... nous admettons dans le présent travail l'existence d'un phénomène périodique d'une nature encore à préciser qui serait lié à tout morceau isolé d'énergie et qui dépendrait de sa masse propre par l'équation de Planck-Einstein.

<sup>11</sup>M Gouanère, M. Spighel, N. Cue, M.J. Gaillard, R. Genre, R. Kirsch, J.C. Poizat, J. Remillieux, P. Catillon and L. Roussel *Found. Phys.* **38**, 659, (2008) y en *Annales Fondation Louis de Broglie* **30**, 109 (2005).

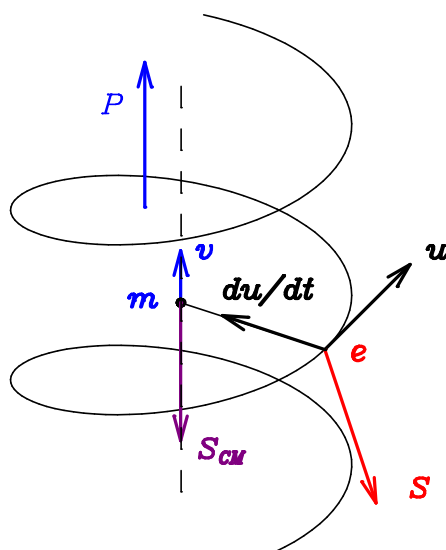


Figura 6.1: Movimiento del centro de masa con velocidad  $v$  y movimiento helicoidal a la velocidad de la luz del centro de carga de un electrón libre. Se representan los dos momentos angulares  $S$  y  $S_{CM}$ , que muestran que  $S_{CM}$  es conservado, mientras que  $S$  precesa alrededor del momento lineal. La velocidad transversal del centro de carga  $u_{\perp} = \sqrt{c^2 - v^2}$ , por lo que tarda más en dar una vuelta. El reloj del electrón móvil va más despacio.

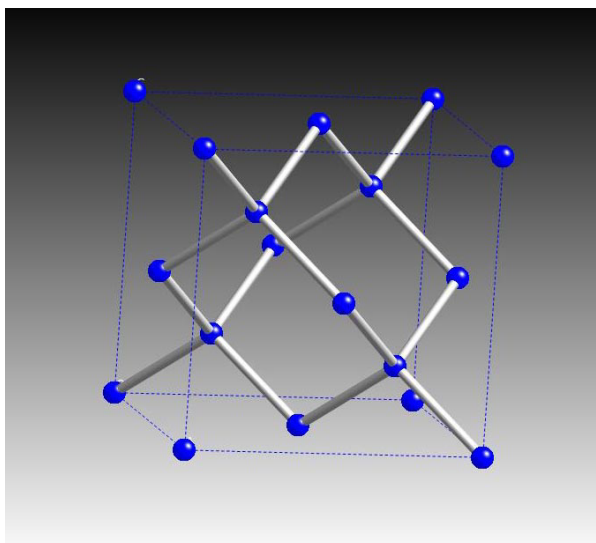


Figura 6.2: Estructura de un cristal de Silicio.

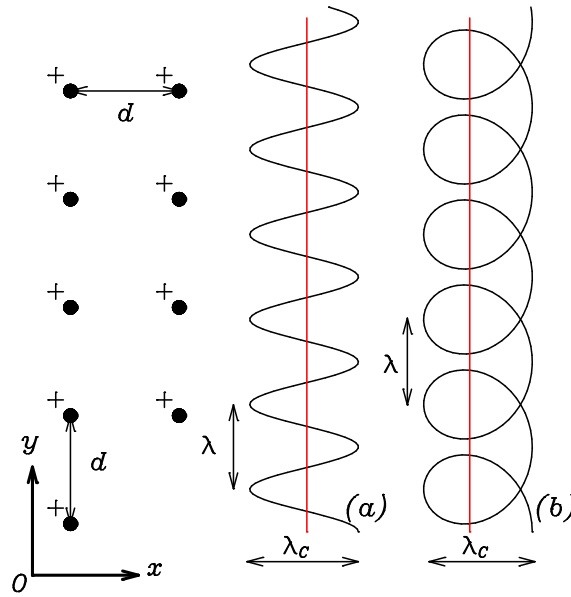


Figura 6.3: En la izquierda de la figura se representa la red de átomos de silicio, cuyos núcleos están separados una distancia  $d = 3,84\text{Å}$ . A la derecha tenemos la proyección sobre el plano  $XOY$  de los movimientos del centro de carga de dos electrones polarizados, (a) longitudinalmente y (b) transversalmente, al movimiento de su centro de masa. En rojo aparece la correspondiente trayectoria de su centro de masa. Ambas descripciones no están a la misma escala que la red de átomos de Si.  $\lambda_c = 2R \sim 10^{-13}\text{m}$  es la oscilación transversal del centro de carga, y  $\lambda = vT$  es lo que recorre el centro de masa durante una vuelta de la carga.

Como

$$d = k\lambda = kvT = k\gamma(v)vT_0 = \frac{k\gamma(v)v}{\nu_0} = \frac{km\gamma(v)v}{m\nu_0} = \frac{kp}{m\nu_0}$$

existirán unos momentos lineales resonantes

$$p_{Dk} = \frac{m\nu_0 d}{k} = \frac{161,748}{k} \text{MeV}/c, \quad k = 1, 2, \dots \text{(frecuencia de Dirac)}$$

para los que se detectará una disminución en la intensidad del haz de salida en la dirección frontal. En el mencionado experimento de Gouanère et al., utilizaron un detector situado a 3 m del cristal de silicio con una ventana de  $3 \times 3$  mm, por lo que los electrones desviados un ángulo superior a 0.001 rad no se detectaban. Pretendían medir la frecuencia de De Broglie que es la mitad que la de Dirac, para la que los momentos lineales resonantes satisfacen

$$p_{Bk} = \frac{m\nu_0 d}{k} = \frac{80,874}{k} \text{MeV}/c, \quad k = 1, 2, \dots \text{(frecuencia de De Broglie)}$$

por lo que establecieron en el experimento el rango de su momento lineal entre 54 y 110 MeV/c, es decir  $80 \pm 30$  MeV/c, alrededor de la primera frecuencia resonante  $p_1$ . Lo que obtuvieron fue un pico resonante para el valor de  $p = 81.1$  MeV/c en vez del valor esperado de  $p = 80.874$  MeV/c, (ver figura 6.6) que es el correspondiente a  $k = 2$  para el caso de que la frecuencia del electrón fuera la de nuestro modelo. En este caso, el pico resonante correspondiente a  $k = 3$ , de un momento lineal  $p_3 = 53.916$  MeV/c está muy próximo al límite inferior de la energía del experimento y podría haber sido detectado si hubieran ampliado el rango.

Si el reloj del electrón tuviera la frecuencia de De Broglie  $\nu_0 = mc^2/h$ , entonces los picos resonantes que se obtendrían son los de la figura 6.4, mientras que en el supuesto de que la frecuencia fuera la de Dirac y del modelo que presentamos, que es el doble que la de De Broglie, se obtendrían los picos de la figura 6.5. Todos los picos inferiores asociados a la frecuencia de

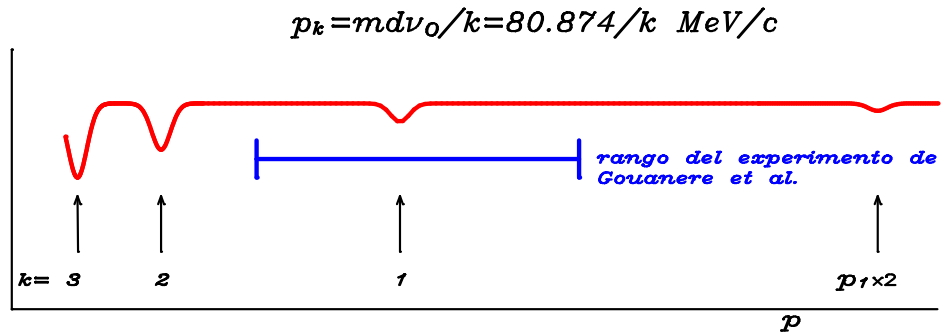


Figura 6.4: Diferentes picos de la dispersión resonante del haz de electrones en el supuesto de que la frecuencia interna del movimiento del centro de carga fuera la de De Broglie  $\nu_0 = mc^2/h$ .

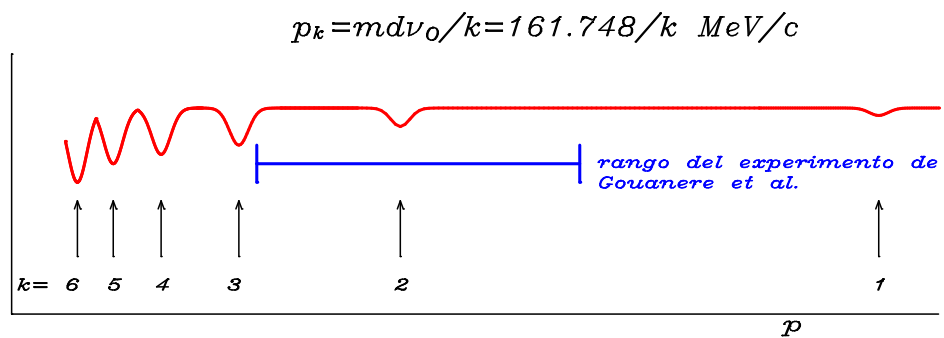


Figura 6.5: Diferentes picos de la dispersión resonante del haz de electrones en el supuesto de que la frecuencia interna fuera el doble que la de De Broglie  $\nu_0 = 2mc^2/h$ . Los picos correspondientes a  $p_3, p_5 \dots$ , no aparecen en el caso anterior.

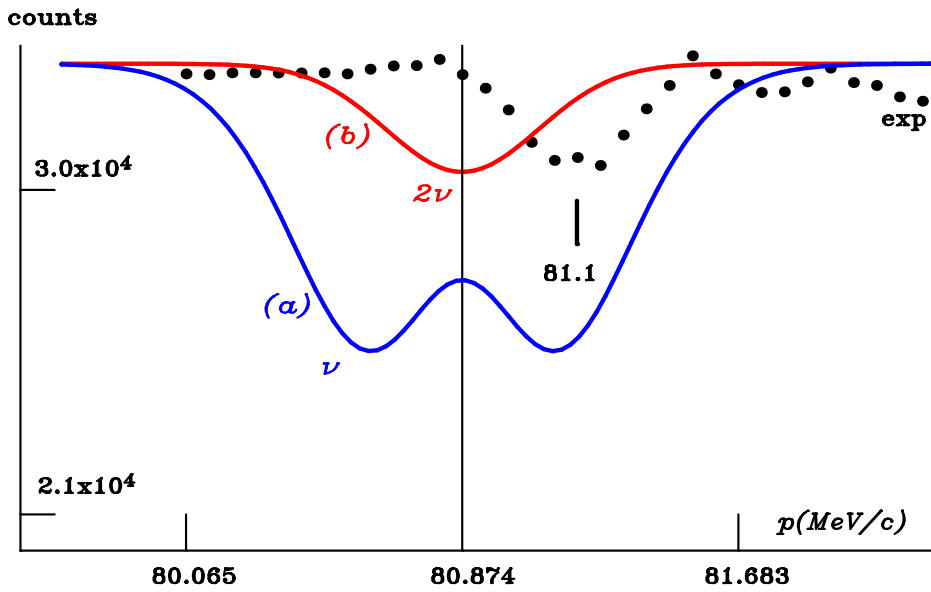


Figura 6.6: La línea de puntos es la medida del número de electrones detectados después de atravesar el cristal de Si, en el experimento realizado por Gouanère et al. (a) La línea azul representa el análisis numérico realizado por el método de Montecarlo, en el supuesto de que la frecuencia interna fuera la de De Broglie  $\nu_0$ . (b) La curva de color rojo por su parte, representa el análisis numérico realizado por el método de Montecarlo, en el supuesto de que la frecuencia interna fuera la de Dirac, el doble que la de De Broglie  $2\nu_0$ . El resultado experimental es más consistente con este análisis a frecuencia doble, solo que el pico aparece un poco desplazado hacia la derecha. Este desplazamiento de la energía de resonancia podría estar ligado con la temperatura de la muestra, y por lo tanto con una pequeña dilatación del parámetro  $d$  de la red.

De Broglie aparecen en el caso de la frecuencia doble de Dirac, pero no a la inversa. La presencia de unos u otros permitirá discernir en un primer momento, entre estas dos posibles frecuencias. Una medida precisa de estos picos representa una medida precisa de la frecuencia interna del electrón  $\nu_0$ . Sería deseable, ampliar el rango del experimento de Gouanère et al. para permitir detectar los picos inferiores a 80.874 MeV/c. Se pondría de manifiesto la existencia de este movimiento periódico interno y nos permitiría determinar la frecuencia del reloj del electrón.

La medida precisa de esta frecuencia podría ser usada para definir una unidad natural de tiempo asociada a fenómenos físicos en los que intervienen los electrones. Juntamente con la constante universal  $c$ , nos permite tener también una unidad natural de longitud, por lo que todas las variables cinemáticas usadas en la descripción clásica del electrón se pueden tomar como adimensionales, en este sistema natural de unidades.

### 6.3. Dipolo eléctrico instantáneo

El movimiento interno de la carga para el observador del centro de masa es un círculo a la velocidad de la luz. La posición de la carga está relacionada con el espín por la ecuación

$$\mathbf{k} = \frac{1}{mc^2} \mathbf{S} \times \mathbf{u}, \quad (6.5)$$

donde  $\mathbf{S}$  es el espín constante en este referencial y  $\mathbf{u} = d\mathbf{k}/dt$ , con  $u = c$  es la velocidad de la carga. Además de este movimiento del centro de carga, existe la rotación de un sistema de referencia local que produce una velocidad angular, pero esta rotación no tiene efecto en el momento dipolar de la partícula. (Ver la Fig. 6.7 donde no se han dibujado ni la velocidad angular ni el sistema de referencia local).

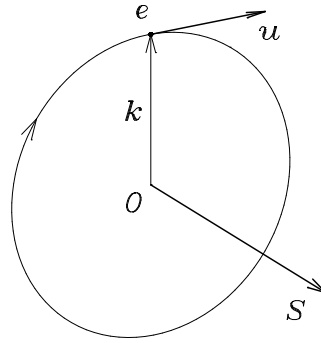


Figura 6.7: Movimiento de la carga del electrón en el sistema de referencia del C.M.

Desde el punto de vista del observador del centro de masa, la partícula se comporta como si tuviera un momento magnético producido por la corriente asociada a la carga y expresado por la expresión clásica habitual

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2} \int \mathbf{k} \times \mathbf{j} d^3\mathbf{r} = \frac{e}{2} \mathbf{k} \times \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \frac{e}{2m} \mathbf{k} \times m \frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\frac{e}{2m} \mathbf{Z},$$

donde  $e$  es el valor de la carga y  $\mathbf{j}(\mathbf{r} - \mathbf{k}) = e d\mathbf{k}/dt \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{k})$  es la densidad de corriente. El término orbital  $\mathbf{k} \times d\mathbf{k}/dt$  está relacionado con la parte del espín asociada al zitterbewegung, la cual cuantiza con valores enteros, y que para las partículas de Dirac es dos veces el valor del espín total, como hemos visto en la sección 6.1.

Pero para el observador del centro de masa, la partícula posee un momento dipolar eléctrico oscilante con respecto al centro de masa de valor  $\mathbf{d} = e\mathbf{k}$ . Está relacionado con el espín mediante

$$\mathbf{d} = \frac{e}{mc^2} \mathbf{S} \times \mathbf{u}. \quad (6.6)$$

En su artículo original, Dirac<sup>12</sup> obtiene que el Hamiltoniano del electrón contiene, en presencia de un campo electromagnético externo, además de la parte libre dos términos

$$\frac{e\hbar}{2m} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B} + \frac{ie\hbar}{2mc} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}, \quad (6.7)$$

donde

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\alpha} = \gamma_0 \boldsymbol{\gamma},$$

se expresa en términos de las matrices  $\boldsymbol{\sigma}$  de Pauli y  $\boldsymbol{\alpha}$  es la matriz de Dirac que nos produce el operador velocidad.

Demostraremos que la versión cuántica de la expresión (6.6) es en efecto el dipolo eléctrico de Dirac (6.7).

La dificultad de relacionar la expresión clásica del momento dipolar con su versión cuántica consiste en interpretar adecuadamente cómo se expresa el producto vectorial de (6.6) que fue introducido por J. Willard Gibbs en 1884, en términos de las matrices de Dirac o en términos

<sup>12</sup> P.A.M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. London*, **A117**, 610 (1928).

del producto matricial (o geométrico) de los elementos del álgebra de Dirac. Vamos a ver que como el álgebra de Dirac es un álgebra de Clifford dicho producto vectorial se va a interpretar en términos del producto interior y exterior de este álgebra.

El operador velocidad  $\mathbf{u} = c\boldsymbol{\alpha}$  y el operador espín  $\mathbf{S}$  son bivectores del álgebra de Dirac considerados como elementos del álgebra geométrica del espacio-tiempo, en el sentido de Hestenes<sup>13</sup>.

De hecho las matrices alfa de Dirac se escriben como productos de pares de matrices gamma  $\alpha_i = \gamma_0\gamma_i$  y lo mismo las componentes del espín  $S_j = (i\hbar/2)\gamma_k\gamma_l$ ,  $j, k, l$  cíclico 1, 2, 3. Este álgebra geométrica está generada por las cuatro matrices  $\gamma^\mu$  de Dirac,  $\mu = 0, 1, 2, 3$  que se interpretan como los cuatro vectores base del espacio-tiempo de Minkowski. Satisfacen la regla  $\gamma_\mu \cdot \gamma_\nu = \eta_{\mu\nu}$ , es decir,  $\gamma_0^2 = 1$  y las  $\gamma_i^2 = -1$ , donde el punto representa el producto interior en el álgebra de Clifford. Vemos por lo tanto que tanto la velocidad como el espín pertenecen a la subálgebra par, o álgebra de Pauli del espacio tridimensional. Bajo inversiones espaciales  $\gamma_0 \rightarrow \gamma_0$  y  $\gamma_i \rightarrow -\gamma_i$ , por lo que el operador velocidad cambia de signo, por lo que es un vector espacial, pero no así el espín, que es invariante y por lo tanto es y corresponde a un bivector espacial o pseudovector.

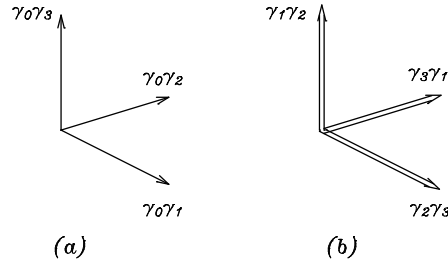


Figura 6.8: Base para los vectores (a) y bivectores (pseudovectores) (b) del álgebra de Pauli.

La relación entre el producto vectorial y el producto exterior e interior de dos vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  en el álgebra de Pauli es,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -i\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot (i\mathbf{a}), \quad (6.8)$$

donde  $\wedge$  representa el símbolo del producto exterior, el punto  $\cdot$  representa al producto interior y la unidad imaginaria  $i$  representa al vector unidad pseudoescalar y  $i\mathbf{a}$  es el bivector dual del vector  $\mathbf{a}$ .

El producto interior de un vector  $\mathbf{b}$  y un bivector  $A$  se expresa en términos del producto geométrico en la forma

$$\mathbf{b} \cdot A = \frac{1}{2}(\mathbf{b}A - A\mathbf{b}) \quad (6.9)$$

y tanto en el álgebra de Dirac como en la de Pauli, el producto geométrico  $\mathbf{b}A$  viene dado por el producto matricial ordinario.

Si escogemos como bases de los vectores y pseudovectores las de la Fig. 6.8, donde los objetos con doble raya de la parte (b) representan los vectores duales de los correspondientes bivectores espaciales, y expresamos en estas bases los observables de la Fig. 6.7, entonces el vector espacial velocidad es  $\mathbf{u} = c\gamma_0\gamma_2$  y el pseudovector espacial  $\mathbf{S} = (\hbar/2)\gamma_2\gamma_3$  y por lo tanto, usando (6.8) y (6.9) obtenemos

$$\mathbf{S} \times \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot (i\mathbf{S}) = \frac{i\hbar}{2} \left( \frac{1}{2} (\gamma_0\gamma_2\gamma_2\gamma_3 - \gamma_2\gamma_3\gamma_0\gamma_2) \right) = \frac{-i\hbar}{2} \gamma_0\gamma_3.$$

<sup>13</sup> D. Hestenes, *Space-Time algebra*, Gordon and Breach, NY (1966); D. Hestenes and G. Sobczyk, *Clifford Algebra to Geometric Calculus*, D. Reidel Pub. Co. Dordrecht, (1984).

El vector  $\mathbf{k} = R\gamma_0\gamma_3$  donde  $R = \hbar/2mc$ , y haciendo la substitución en (6.6) obtenemos finalmente, el resultado deseado,

$$d_3 = -\frac{i\hbar}{2mc}\alpha_3.$$

De esta relación, si utilizamos el reescalamiento espacial usando como unidad de longitud el radio  $R_0$ , resulta que desde el punto de vista cuántico, la separación entre el CC y el CM, en unidades adimensionales resulta ser

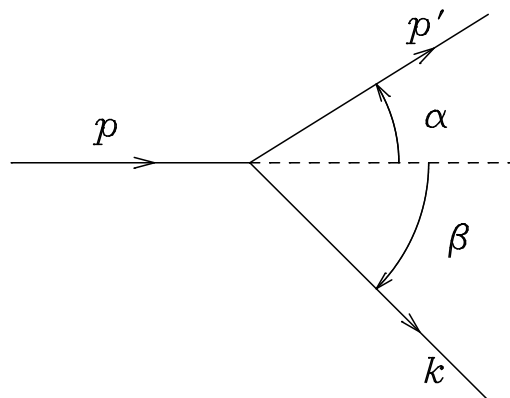
$$\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{q}} = -i\boldsymbol{\alpha}.$$

Desde el punto de vista algebraico, el operador velocidad de Dirac en unidades adimensionales es  $\tilde{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\alpha}$ . Como hemos visto en la sección 4.2.2, una rotación de valor  $\pi/2$  en la fase del movimiento interno,  $e^{i\pi/2} = i$  equivale a girar  $\pi/2$  el vector velocidad, pero eso nos define un vector adimensional en la dirección del CC al CM, por lo que el vector opuesto resulta ser  $\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{q}} = -i\boldsymbol{\alpha}$ .

## 6.4. Efecto Compton

La luz polarizada circular corresponde a un haz de fotones en el que todos los fotones tienen su espín orientado, bien hacia adelante o bien hacia atrás<sup>14</sup>. En la interacción de una onda electromagnética plana con un electrón puntual en reposo (ver Sec.??) vemos que el electrón sale dispersado siempre hacia adelante, formando un cierto ángulo con la dirección del movimiento de la onda. La onda le comunica un momento lineal que tiene una parte en la dirección de propagación de la onda. Si, como se interpreta habitualmente, la dirección de propagación de la onda electromagnética corresponde con la dirección del movimiento de los fotones del haz, podemos intentar hacer el análisis relativista de la interacción corpuscular entre un fotón y un electrón, considerados como partículas puntuales. Lo planteó Arthur H. Compton en 1923.

En efecto, supongamos un electrón en reposo y un fotón incidente a lo largo del eje  $OZ$  de momento lineal  $p$  y energía  $H = pc = hf$ . Después de la colisión, el fotón sale con un momento lineal  $p'$  formando un ángulo  $\alpha$  con la dirección de incidencia y el electrón lo hace con un momento lineal de valor  $k$  en la dirección  $\beta$ , como se indica en la figura. La conservación del



<sup>14</sup>R. A. Beth, *Mechanical Detection and Measurement of the Angular Momentum of Light*, Phys. Rev. **50**, 115 (1936).



momento lineal y de la energía nos lleva a:

$$p' \cos \alpha + k \cos \beta = p, \quad p' \sin \alpha = k \sin \beta, \quad cp + mc^2 = cp' + \sqrt{m^2c^4 + c^2k^2}, \quad (6.10)$$

un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas,  $\alpha, \beta, p', k$ , que no posee solución única, pero que fijada la dirección de salida del fotón  $\alpha$ , nos brinda una solución única para  $p', k$  y  $\beta$ . Como  $\mathbf{k} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$ ,

$$k^2 = p^2 + p'^2 - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' = \frac{1}{c^2} (H^2 + H'^2 - 2HH' \cos \alpha)$$

sustituyendo esto en

$$c(p - p') + mc^2 = \sqrt{m^2c^4 + c^2k^2}$$

y elevando al cuadrado, llegamos a

$$mc^3(p - p') = mc^2(H - H') = HH'(1 - \cos \alpha), \quad \frac{1}{H'} - \frac{1}{H} = \frac{1 - \cos \alpha}{mc^2}$$

y para las frecuencias de los fotones involucrados en la dispersión

$$\frac{1}{f'} - \frac{1}{f} = \frac{h}{mc^2}(1 - \cos \alpha) \quad (6.11)$$

y para las longitudes de onda

$$\lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos \alpha), \quad \lambda_C = \frac{h}{mc} = 2,426 \cdot 10^{-12} \text{m},$$

donde a  $\lambda_C$  se le denomina la longitud de onda Compton del electrón. En los modelos de electrón con espín, la separación entre el centro de carga y el centro de masa es  $R_0 = \hbar/2mc = 1.93 \cdot 10^{-13} \text{m}$ .

La variación de la energía del fotón dispersado en términos del ángulo de dispersión viene dada por

$$hf' = \frac{hf}{1 + \frac{hf}{mc^2}(1 - \cos \alpha)} = hfA(\alpha), \quad A(\alpha) = \frac{1}{1 + q(1 - \cos \alpha)},$$

siendo  $q = p/mc$  y que se representa en la figura:

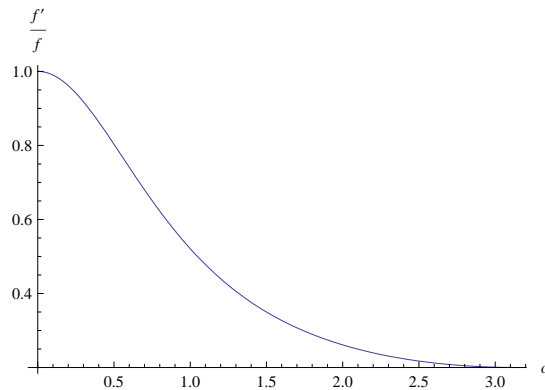


Figura 6.9: Representación de la función  $A(\alpha) = f'/f$ , para un fotón incidente de  $hf = 2mc^2$ .

En esta figura, cuando  $\alpha = \pi$ , el fotón sale hacia atrás,  $f'/f = 0.2$ , lo que corresponde a haber utilizado fotones de energía  $hf = 2mc^2 \approx 1 \text{ MeV}$ , el doble de la energía en reposo del electrón.

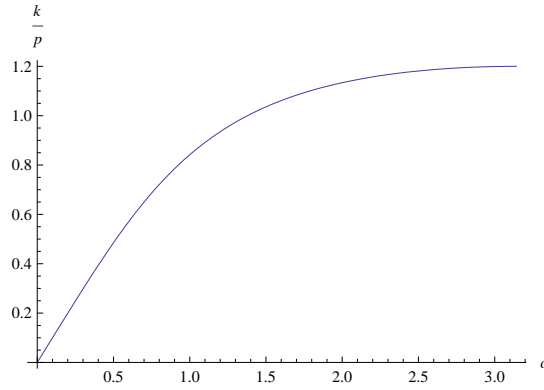


Figura 6.10: Variación con  $\alpha$  del momento lineal  $k$  del electrón saliente.

El momento lineal del fotón y del electrón saliente:

$$p' = \frac{pmc}{mc + p(1 - \cos \alpha)} = pA(\alpha), \quad k = p\sqrt{1 + A(\alpha)^2 - 2A(\alpha) \cos \alpha}, \quad (6.12)$$

y el ángulo de dispersión del electrón

$$\sin \beta = \frac{A(\alpha) \sin \alpha}{\sqrt{1 + A(\alpha)^2 - 2A(\alpha) \cos \alpha}}, \quad \cos \beta = \frac{1 - A(\alpha) \cos \alpha}{\sqrt{1 + A(\alpha)^2 - 2A(\alpha) \cos \alpha}}. \quad (6.13)$$

Vemos en las figuras 6.11 y 6.12 que para ángulos de dispersión del fotón muy bajos,  $\alpha \approx 0$ ,

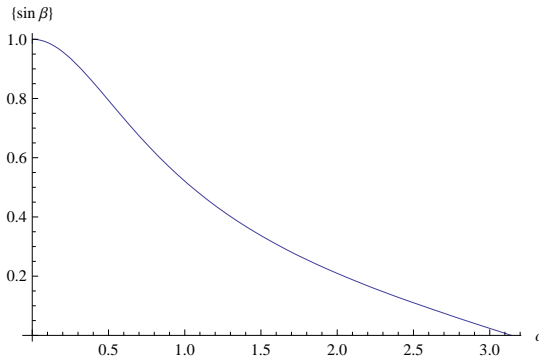


Figura 6.11: Variación del ángulo de dispersión  $\beta$  del electrón saliente en términos del ángulo de dispersión del fotón, en el caso  $H \approx 1\text{MeV} = 2mc^2$ .

$\sin \beta \approx 1$ , el electrón sale prácticamente a  $90^\circ$  del fotón incidente. Solamente sale hacia adelante  $\sin \beta = 0$  cuando el fotón dispersado tiene la dirección opuesta al incidente. Para  $\alpha \approx \pi/2$ ,  $\sin \beta \approx 0.3$  y  $0.62$ , respectivamente.

#### 6.4.1. Contribución del espín

Si tenemos en cuenta los espines del fotón  $Z$  y del electrón  $S$ , la interacción conserva también el momento angular del sistema. Tomemos como eje  $OZ$  la dirección del fotón incidente y como plano  $XOZ$  el que subtienden los momentos lineales de las partículas dispersadas. Sea  $\theta$  y  $\phi$  la orientación inicial del espín del electrón, y  $\theta'$  y  $\phi'$  su orientación final. Como el espín del fotón tiene la dirección del momento lineal, salvo tal vez un signo, la conservación de las tres componentes del momento angular total nos lleva a:

$$S \sin \theta \cos \phi = Z_2 \sin \alpha + S \sin \theta' \cos \phi', \quad S \sin \theta \sin \phi = S \sin \theta' \sin \phi',$$

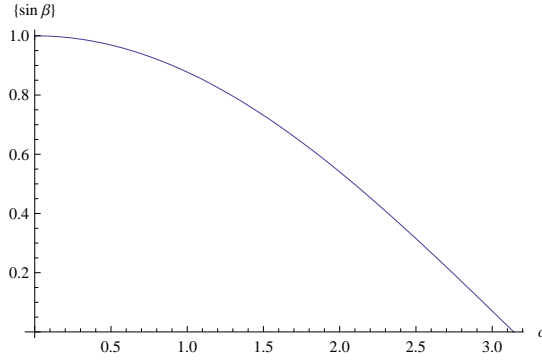


Figura 6.12: Variación del ángulo de dispersión  $\beta$  del electrón saliente en términos del ángulo de dispersión del fotón, en el caso de un fotón incidente de energía 5 eV,  $H \approx 10^{-5}mc^2$ .

$$Z_1 + S \cos \theta = Z_2 \cos \alpha + S \cos \theta',$$

es decir

$$\begin{aligned} \sin \theta \cos \phi &= (Z_2/S) \sin \alpha + \sin \theta' \cos \phi', & \sin \theta \sin \phi &= \sin \theta' \sin \phi', \\ (Z_1/S) + \cos \theta &= (Z_2/S) \cos \alpha + \cos \theta', \end{aligned}$$

siendo  $Z_1$  y  $Z_2$  las componentes del espín del fotón en la dirección de su movimiento, que sabemos vale  $Z_1 = Z_2 = \pm \hbar$ . Este es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas  $\alpha$ ,  $\theta'$  y  $\phi'$ , que nos brindará finalmente la orientación final del espín del electrón y la dirección de salida del fotón. Juntamente con las ecuaciones del apartado anterior nos establece que la dirección de salida del fotón dispersado depende de la orientación inicial del espín del electrón, la cual puede ser controlada por un simple campo magnético.

De las dos primeras ecuaciones llegamos a

$$\sin^2 \theta' = (Z_2/S)^2 \sin^2 \alpha - 2(Z_2/S) \sin \alpha \sin \theta \cos \phi + \sin^2 \theta.$$

Si de la última dejamos a un lado el término de  $\theta'$  y lo elevamos al cuadrado,

$$\cos^2 \theta' = (Z_1/S + \cos \theta - (Z_2/S) \cos \alpha)^2$$

sumándolos, obtenemos una ecuación con una sola incógnita,  $\alpha$ , el ángulo de salida del fotón:

$$\sin \alpha \sin \theta \cos \phi = (Z_1/Z_2 - \cos \alpha)(Z_1/S + \cos \theta).$$

Si  $Z_1$  y  $Z_2$  tienen la misma orientación con respecto al momento lineal del fotón,  $Z_1/Z_2 = +1$ , y en términos del ángulo mitad, nos da

$$\cot(\alpha/2) = \frac{Z_1/S + \cos \theta}{\sin \theta \cos \phi}, \quad Z_1/Z_2 = +1,$$

pero si  $Z_1$  y  $Z_2$  tienen la orientación opuesta  $Z_1/Z_2 = -1$

$$\tan(\alpha/2) = -\frac{Z_1/S + \cos \theta}{\sin \theta \cos \phi}, \quad Z_1/Z_2 = -1.$$

Como  $\cot(z/2) = \sqrt{(1 + \cos z)/(1 - \cos z)} = 1/\tan(z/2)$ , resulta

$$\cos \alpha = \frac{(Z_1/S + \cos \theta)^2 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi}{(Z_1/S + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta \cos^2 \phi}, \quad Z_1/Z_2 = 1. \quad (6.14)$$

$$\cos \alpha = \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi - (Z_1/S + \cos \theta)^2}{(Z_1/S + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta \cos^2 \phi}, \quad Z_1/Z_2 = -1. \quad (6.15)$$

la opuesta de la anterior. Para el ángulo  $\phi'$  se obtiene:

$$\tan \phi' = \frac{\tan \phi}{1 - \frac{Z_2 \sin \alpha}{S \sin \theta \cos \phi}} \quad (6.16)$$

en tanto que  $\theta'$  se saca de la última ecuación

$$\cos \theta' = \cos \theta + Z_1/S - Z_2/S \cos \alpha. \quad (6.17)$$

Si el módulo del espín del electrón lo tomamos como  $S = \sqrt{(1/2 + 1)/2\hbar}$ ,  $Z_1/S = \pm 2/\sqrt{3}$ . Si representamos gráficamente el valor del  $\cos \alpha$ , se obtienen las figuras 6.13. Para saber donde

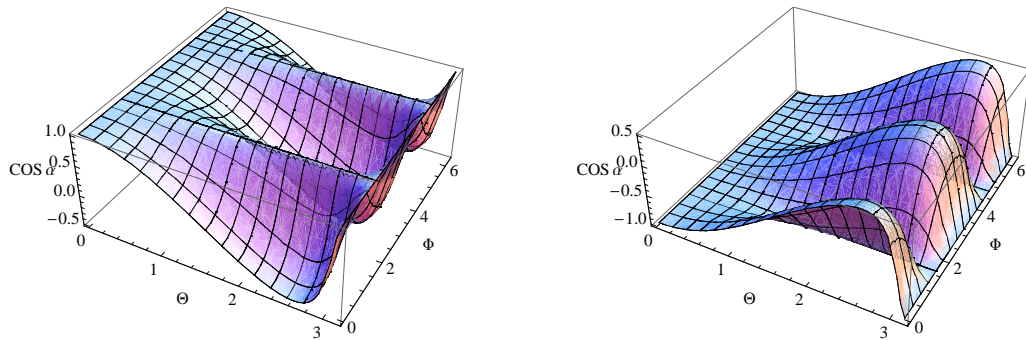
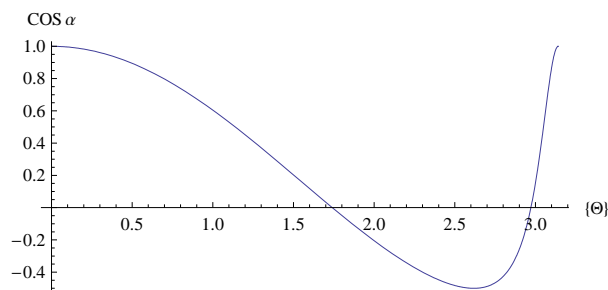


Figura 6.13: Variación del  $\cos \alpha$  en el caso de que  $Z_1/Z_2 = 1$ ,  $Z_1/S = 2/\sqrt{3}$  y  $Z_1/Z_2 = -1$ , respectivamente.

el  $\cos \alpha$  alcanza sus máximos y mínimos, basta con derivar con respecto a  $\theta$  y  $\phi$  la expresión (6.14), igualarlas a cero, lo que nos lleva al sistema de ecuaciones

$$\sin \theta \cos^2 \phi (Z_1/S + \cos \theta)(1 + Z_1/S \cos \theta) = 0, \quad \sin^2 \theta \sin 2\phi (Z_1/S + \cos \theta) = 0,$$

de tal manera que el mínimo se alcanza para  $\cos \theta = -S/Z_1 = -\sqrt{3}/2$ ,  $\theta = 5\pi/6$ ,  $\phi = 0, \pi$ , resultando  $\cos \alpha = -1/2$ . Para este valor el fotón dispersado sale en la dirección  $\alpha = 2\pi/3$ , ó  $120^\circ$ , que es la dirección de retroceso mayor que puede alcanzar un fotón. Cualquier otra dirección de retroceso mayor implicaría que el electrón se estuviera moviendo hacia el fotón. Para  $\phi = \pi$ , la variación de  $\cos \alpha$  con  $\theta$  de (6.14) es la de la figura



Si  $Z_1$  está orientado hacia atrás, entonces se alcanza esta misma dirección máxima de salida, pero el espín del electrón debe tener la orientación  $\cos \theta = \sqrt{3}/2$ ,  $\theta = \pi/6$ ,  $\phi = 0, \pi$ .

En el primer caso, si  $\theta = 0$ , o aproximadamente tome ese valor, cualesquiera que sea  $\phi$ , resulta  $\alpha = 0$  y el fotón no es desviado. Lo mismo sucede en el segundo caso si  $\theta = \pi$ . Los electrones polarizados en la dirección del movimiento de los fotones resultan ser invisibles.

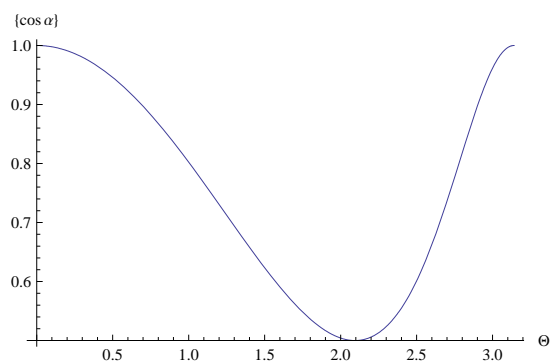


Figura 6.14: Si  $Z_1/S = 2$ , la variación del coseno de  $\alpha$  con la orientación del espín nos lleva para  $\phi = \pi$  a que el fotón dispersado solamente lo sería dentro de un ángulo de valor  $\pm 60^\circ$  con respecto a la dirección de incidencia.

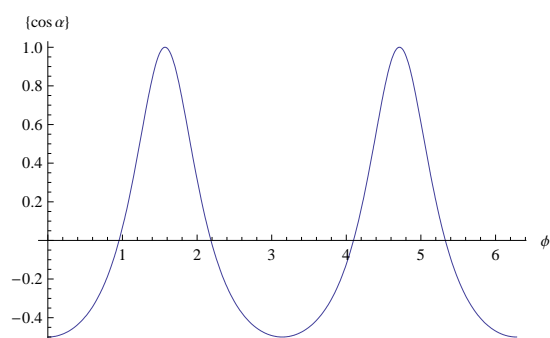


Figura 6.15: Variación de  $\cos \alpha$  con  $\phi$ , para el valor de  $\theta = 5\pi/6$  en el primer caso, o bien  $\theta = \pi/6$  en el segundo.

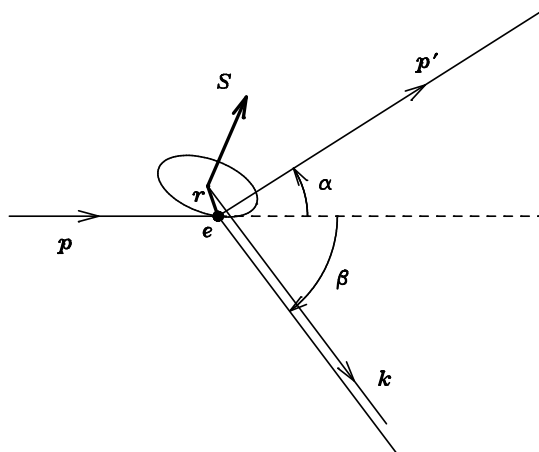
Hemos tomado como plano  $ZOX$  el plano que contiene a los fotones inicial y dispersado, y en este plano el ángulo de dispersión  $\alpha$  viene determinado por la orientación del espín del electrón  $(\theta, \phi)$ . Recíprocamente, si lo que controlamos es la orientación del espín del electrón entonces el plano de dispersión viene rotado un ángulo  $-\phi$ , arbitrario, en el que el fotón dispersado forma un ángulo  $\alpha$  con la dirección inicial. O lo que es lo mismo, si en el laboratorio controlamos  $\theta$ , la orientación del fotón dispersado es  $(\alpha, -\phi)$  con respecto al plano que subtienden la dirección del fotón incidente y la dirección del espín del electrón.

Si la dispersión no es con electrones libres, sino con electrones formando parte de átomos, la interacción puede elevar a los átomos a estados excitados y el problema es diferente. Por ser el electrón una partícula elemental, no es posible modificar el valor absoluto de su espín, que es lo que hemos considerado en este análisis.

Experimentalmente se encuentran fotones que salen a  $150^\circ$  y más con respecto a la dirección de incidencia, cuando según este análisis lo más atrás que podrían salir es hasta un ángulo de  $120^\circ$ . En todo este cálculo hemos supuesto un electrón estrictamente puntual, y este hecho experimental invalida esta parte del cálculo, lo que hace que se contemple que el electrón tenga algún tipo de estructura. Sin embargo, si el electrón tiene estructura en la que su centro de carga y centro de masa son puntos distintos y además, el fotón colisiona con el centro de carga del electrón, hay que rehacer todos estos cálculos porque además de la ley de conservación anterior hay que tener en cuenta el momento angular del electrón móvil con respecto a su centro de carga.

### 6.4.2. Modelo de electrón con espín

Vamos a suponer que la interacción del fotón puntual lo es con el centro de carga del electrón situado en el instante de la interacción en el origen del sistema de referencia, de acuerdo con el esquema de la figura: La dirección del fotón incidente lo es a lo largo del eje  $OZ$ , el fotón



dispersado está en el plano  $XOZ$  formando un ángulo  $\alpha$  con  $OZ$  y el espín del electrón en reposo  $\mathbf{S}$  posee la orientación habitual  $\theta$  y  $\phi$ . El electrón dispersado posee un momento lineal  $\mathbf{k}$  contenido también en el plano  $XOZ$  y que forma un ángulo  $\beta$  con  $OZ$ .

En la figura distinguimos la estructura del electrón en el sentido de que su centro de masa y su centro de carga son puntos diferentes. El vector  $\mathbf{r}$  representa la posición relativa del centro de carga con respecto al centro de masa. Vamos a llamar  $\psi$  a la fase del movimiento del centro

de carga y  $R_0 = S/mc$ , al radio de este movimiento interno que se realiza a la velocidad de la luz.

Si el espín del electrón estuviera orientado a lo largo de  $OZ$ , el vector  $\mathbf{r}$  vendría dado por

$$\mathbf{r}_0 = R_0 \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix},$$

pero como está orientado los ángulos  $\theta$  y  $\phi$ , resulta:

$$\mathbf{r} = \mathcal{R}_z(\phi)\mathcal{R}_y(\theta)\mathbf{r}_0 = R_0 \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi \\ \cos \theta \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi \\ -\sin \theta \cos \psi \end{pmatrix}$$

Antes de la colisión, el momento angular del sistema con respecto al centro de carga, es decir con respecto al origen, vale la suma de los espines de ambas partículas, ya que el electrón se encuentra en reposo,  $\mathbf{J}_1 = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{S}$  que por componentes se expresa:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} S \sin \theta \cos \phi \\ S \sin \theta \sin \phi \\ Z_1 + S \cos \theta \end{pmatrix}$$

Después de la colisión, el fotón posee un espín  $\mathbf{Z}_2$  y el electrón posee su espín orientado los ángulos  $\theta'$  y  $\phi'$ , y además un momento lineal  $\mathbf{k}$ . El momento angular con respecto al centro de carga después de la colisión es

$$\mathbf{J}_2 = \mathbf{Z}_2 + \mathbf{S}' - \mathbf{r} \times \mathbf{k}, \quad \mathbf{k} = k \begin{pmatrix} -\sin \beta \\ 0 \\ \cos \beta \end{pmatrix},$$

que por componentes nos queda:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{k} = R_0 k \begin{pmatrix} (\cos \theta \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi) \cos \beta \\ \sin \theta \cos \psi \sin \beta - (\cos \theta \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi) \cos \beta \\ (\cos \theta \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi) \sin \beta \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Z}_2 = Z_2 \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}' = S \begin{pmatrix} \sin \theta' \cos \phi' \\ \sin \theta' \sin \phi' \\ \cos \theta' \end{pmatrix}.$$

De la conservación del momento lineal y de la energía seguimos manteniendo la relación entre  $\beta$  y  $\alpha$  de la sección anterior (6.13). Si el momento angular total se conserva, despejando como antes, los ángulos primados en términos de los demás, se llega a un sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{S}' = \mathbf{J}_1 - \mathbf{Z}_2 + \mathbf{r} \times \mathbf{k}$$

$$S \sin \theta' \cos \phi' = S \sin \theta \cos \phi - Z_2 \sin \alpha + R_0 k (\cos \theta \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi) \cos \beta,$$

$$S \sin \theta' \sin \phi' = S \sin \theta \sin \phi + R_0 k (\sin \theta \cos \psi \sin \beta - (\cos \theta \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi) \cos \beta),$$

$$S \cos \theta' = Z_1 + S \cos \theta - Z_2 \cos \alpha + R_0 k (\cos \theta \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi) \sin \beta.$$

Si definimos las magnitudes  $a = Z_1/S$ ,  $b = Z_2/S$  y  $R = R_0 k/S$ , las ecuaciones quedan:

$$\sin \theta' \cos \phi' = \sin \theta \cos \phi - b \sin \alpha + R (\cos \theta \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi) \cos \beta$$

$$\sin \theta' \sin \phi' = \sin \theta \sin \phi + R (\sin \theta \cos \psi \sin \beta - (\cos \theta \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi) \cos \beta)$$

$$\cos \theta' = a + \cos \theta - b \cos \alpha + R (\cos \theta \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi) \sin \beta.$$

Aquí tenemos que sustituir el  $\sin \beta$  y  $\cos \beta$  en términos de  $A(\alpha)$  y como  $R_0 = S/mc$ , el coeficiente

$$R = \frac{R_0 k}{S} = q \sqrt{1 + A(\alpha)^2 - 2A(\alpha) \cos \alpha},$$

con  $q = p/mc$ , con lo que los términos

$$R \cos \beta = q(1 - A(\alpha) \cos \alpha), \quad R \sin \beta = qA(\alpha) \sin \alpha.$$

Las ecuaciones finales para obtener la orientación final del espín del electrón son

$$\sin \theta' \cos \phi' = \sin \theta \cos \phi - b \sin \alpha + q(\cos \theta \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi)(1 - A(\alpha) \cos \alpha),$$

$$\sin \theta' \sin \phi' = \sin \theta \sin \phi + q(A(\alpha) \sin \theta \cos \psi \sin \alpha - (\cos \theta \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi)(1 - A(\alpha) \cos \alpha)),$$

$$\cos \theta' = a + \cos \theta - b \cos \alpha + qA(\alpha)(\cos \theta \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi) \sin \alpha.$$

Si tomamos la fase  $\psi = 0$ , en el instante en el que el fotón alcanza al centro de carga del electrón, las anteriores ecuaciones se simplifican:

$$\sin \theta' \cos \phi' = \sin \theta \cos \phi - b \sin \alpha + q \cos \theta \sin \phi (1 - A(\alpha) \cos \alpha), \quad (6.18)$$

$$\sin \theta' \sin \phi' = \sin \theta \sin \phi + q(A(\alpha) \sin \theta \sin \alpha - \cos \theta \cos \phi (1 - A(\alpha) \cos \alpha)), \quad (6.19)$$

$$\cos \theta' = a + \cos \theta - b \cos \alpha + qA(\alpha) \cos \theta \sin \phi \sin \alpha. \quad (6.20)$$

Son tres ecuaciones extra que junto con las tres (6.10) nos suministran un sistema de seis ecuaciones para determinar  $\alpha, \beta, p', k, \theta'$  y  $\phi'$ , conocida la orientación inicial del espín del electrón  $\theta, \phi$ .

Controlando la orientación inicial del espín del electrón, es decir los valores  $\theta$  y  $\phi$ , quedaría determinada la dirección  $\alpha$  y energía  $p'$  de los fotones dispersados, por lo que dispondríamos de un sintonizador fino de las frecuencias de los fotones dispersados, que emergerían en un cono de semiángulo  $\alpha$  alrededor del centro de dispersión, sin más que someter a la muestra de electrones libres (por ejemplo electrones dentro de una jaula de Penning) a un campo magnético externo.

## 6.5. Efecto túnel clásico

Una consecuencia de la separación entre el centro de carga y el centro de masa de una partícula con espín, es que va a poder atravesar una barrera de potencial, a pesar de que su energía cinética sea inferior a la de la barrera. Esto no es posible para la partícula puntual sin espín.

Consideremos una partícula no relativista con espín de tipo (anti)orbital, como la descrita en la Sección 2.2, bajo una barrera de potencial. La Langrangiana de este sistema es:

$$\tilde{L} = \frac{m \dot{\mathbf{r}}^2}{2} - \frac{m \dot{\mathbf{u}}^2}{2\omega^2} - eV(\mathbf{r})\dot{t}. \quad (6.21)$$

Como las barreras de potencial cuadradas, usadas habitualmente en mecánica cuántica son útiles para la resolución sencilla de algunos problemas, sin embargo, desde el punto de vista dinámico corresponden a dispositivos que producen una fuerza infinita en los bordes, lo cual no nos permite utilizarlas para estudios dinámicos clásicos. Debemos usar barreras de potencial que conduzcan a fuerzas finitas. Una barrera sencilla que da lugar a fuerzas finitas y constantes, puede ser del tipo de la de la figura Fig. 6.16, donde  $V_0$  representa el valor máximo del potencial.

La fuerza externa que produce sobre la partícula  $F(x)$ , es constante y dirigida hacia la izquierda en la region  $x \in (-a, 0)$  y hacia la derecha en  $x \in (0, b)$ , siendo nula fuera de estas zonas.



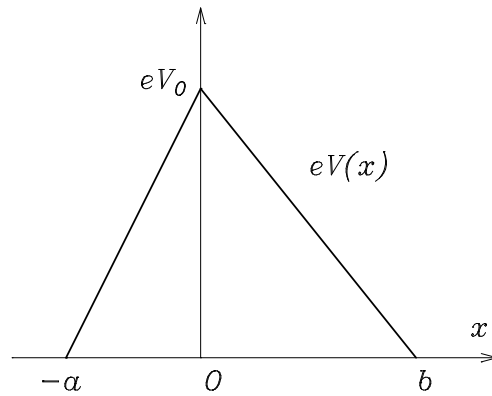


Figura 6.16: Barrera de Potencial Triangular.

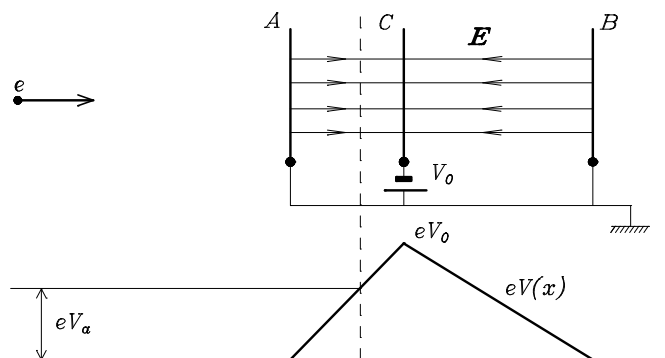


Figura 6.17: Haz de electrones sobre una barrera de potencial. Un electrón puntual sin espín con  $V_a < V_0$  no puede pasar de la línea de puntos. Un electrón con espín, polarizado transversalmente, y de la misma energía, puede cruzar la barrera.

Potenciales de este tipo se pueden construir como en el experimento que se indica en la figura 6.17, en el cual un haz de electrones, que ha sido acelerado con un potencial de aceleración  $V_a$ , se lanza sobre la región del campo, de potencial  $V_0$  contenido entre las placas  $A$ ,  $C$  y  $B$ .

En la Figura 6.17, desde un punto de vista clásico, un electrón puntual sin espín (el centro de carga y el centro de masa son el mismo punto) se detiene en la línea de puntos y la fuerza hacia la izquierda lo expulsa. Pero un electrón con espín de naturaleza (anti)orbital puede cruzar la barrera, si está polarizado perpendicularmente al campo y si su energía cinética es mayor que un cierto valor mínimo, que está por debajo del máximo del potencial. Este potencial mínimo depende de la separación entre placas.

Supongamos una partícula polarizada con el espín hacia arriba o hacia abajo, en la dirección  $OZ$ . El movimiento de la carga tiene lugar en el plano  $XOY$ . Sean  $q_x, q_y, q_z = 0$ , las coordenadas del centro de masa y  $x, y$  and  $z = 0$ , las del centro de carga.

Las ecuaciones dinámicas son

$$\frac{d^2 q_x}{dt^2} = \frac{1}{m} F(x), \quad \frac{d^2 q_y}{dt^2} = 0, \quad (6.22)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2(x - q_x) = 0, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2(y - q_y) = 0, \quad (6.23)$$

donde

$$F(x) = \begin{cases} -eV_0/a, & \text{para } x \in (-a, 0), \\ eV_0/b, & \text{para } x \in (0, b), \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Las ecuaciones (6.22) son no lineales y no hemos encontrado de ellas una solución analítica. Vamos a hacer el cálculo de forma numérica. Vamos a definir diferentes variables adimensionales. Sea  $R$  el radio del movimiento interno. Entonces definimos

$$\hat{q}_x = q_x/R, \quad \hat{q}_y = q_y/R, \quad \hat{x} = x/R, \quad \hat{y} = y/R, \quad \hat{a} = a/R, \quad \hat{b} = b/R.$$

La nueva variable temporal  $\alpha = \omega t$  es la fase del movimiento interno, siendo  $\omega$  la pulsación de este movimiento. Las ecuaciones en las nuevas variables quedan:

$$\frac{d^2 \hat{q}_x}{d\alpha^2} = A(\hat{x}), \quad \frac{d^2 \hat{q}_y}{d\alpha^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 \hat{x}}{d\alpha^2} + \hat{x} - \hat{q}_x = 0, \quad \frac{d^2 \hat{y}}{d\alpha^2} + \hat{y} - \hat{q}_y = 0,$$

donde  $A(\hat{x})$  es

$$A(\hat{x}) = \begin{cases} -eV_0/\hat{a}m\omega^2 R^2, & \text{para } \hat{x} \in (-\hat{a}, 0), \\ eV_0/\hat{b}m\omega^2 R^2, & \text{para } \hat{x} \in (0, \hat{b}), \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Para el electrón relativista la velocidad de la carga es  $c$ , de tal manera que  $\omega R = c$ , y el parámetro  $e/mc^2 = 1,9569 \times 10^{-6} \text{V}^{-1}$ , tal que para potenciales del orden de 1 voltio podemos tomar el parámetro adimensional  $eV_0/m\omega^2 R^2 = 1,9569 \times 10^{-6}$ .

Si tomamos como condiciones iniciales para el centro de masa

$$\hat{q}_y(0) = 0, \quad d\hat{q}_y(0)/d\alpha = 0,$$

entonces el centro de masa se mueve en línea recta a lo largo del eje  $OX$ . El sistema anterior se reduce al análisis de un sistema unidimensional, donde las únicas incógnitas son  $\hat{q}_x$  y  $\hat{x}$ .

Denominemos a estas variables por  $q$  y  $x$ , quitando todos los sombreros de las demás variables. Las ecuaciones a resolver quedan:

$$\frac{d^2 q}{d\alpha^2} = A(x), \quad \frac{d^2 x}{d\alpha^2} + x - q = 0, \quad (6.24)$$

donde  $A(x)$  es

$$A(x) = \begin{cases} -1,9569 \times 10^{-6} a^{-1} V_0, & \text{para } x \in (-a, 0), \\ 1,9569 \times 10^{-6} b^{-1} V_0, & \text{para } x \in (0, b), \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases} \quad (6.25)$$

La integración numérica ha sido hecha con el programa *Dynamics Solver*<sup>15</sup>, y debido a que las ecuaciones son adimensionales, las energías quedan reescaladas tomando la máxima energía potencial de valor 1.

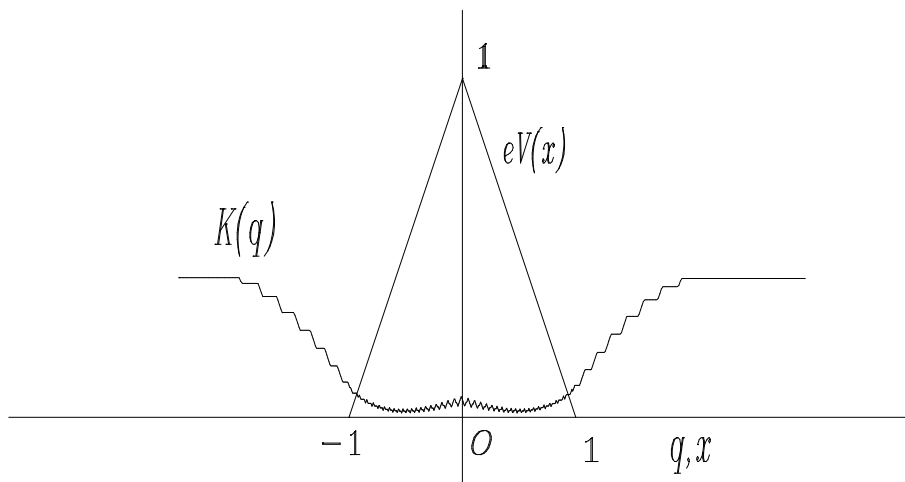


Figura 6.18: Energía cinética durante el cruce para  $a = b = 1$ .

Con  $a = b = 1$ , y suponiendo que la altura de la barrera es 1, tomando la energía cinética de la partícula  $K$ , por debajo de este valor,  $K = m\dot{q}(0)^2/2eV_0 = 0,41$ , es decir  $K = 0,41eV_0$  para cualquier otro potencial, obtenemos para el movimiento del centro de masa la gráfica de la figura. 6.18, donde se indica la variación de la energía cinética  $K(q)$ , con la posición del centro de masa, durante el cruce de la barrera. Existe siempre cruce de la barrera con una energía cinética por encima de este valor. En la Figura 6.19, se dibuja la misma evolución pero con una barrera de anchuras  $a = 1$  y  $b = 10$  y  $K = 0,9055$ . Por debajo de una energía cinética de valores 0,4 y 0,9, en ambos ejemplos, las partículas nunca cruzan la barrera y son rechazadas hacia atrás.

Si en ambos ejemplos la anchura  $a$  se toma entre 1 y 0.05, haciendo que la pendiente, y por lo tanto la fuerza, sea mayor, no hay un cambio apreciable en la energía mínima de cruce. Por eso, con la anchura  $a = 1$  fija, vamos a calcular las energías mínimas de cruce  $K_c(b)$  para diversos valores de la anchura de la derecha  $b$ .

Este análisis clásico para barreras triangulares produce el mismo resultado para barreras más anchas del tipo de las de la figura 6.20 mientras las anchuras  $a$  y  $b$  sean las mismas, cualesquiera que sea la magnitud intermedia  $c$  en la que el potencial permanece constante.

Para comparar estos resultados con el efecto túnel cuántico, vamos a cuantizar el sistema. La función de onda de este sistema es una función compleja de cuadrado integrable, de las variables

<sup>15</sup> J.M. Aguirregabiria, *Dynamics Solver*, disponible en la página web de su autor en el servidor del departamento de Física Teórica de la UPV/EHU, <<http://tp.lc.ehu.es/jma.html>>

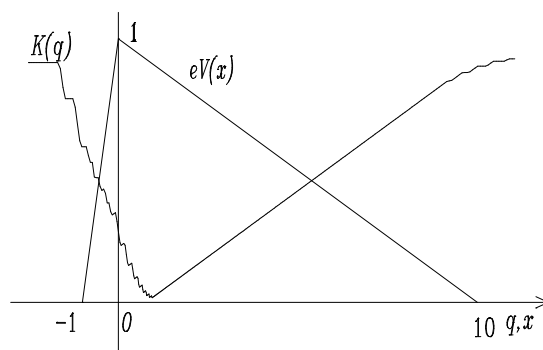


Figura 6.19: Energía cinética de la partícula durante el cruce con  $a = 1$  y  $b = 10$ .

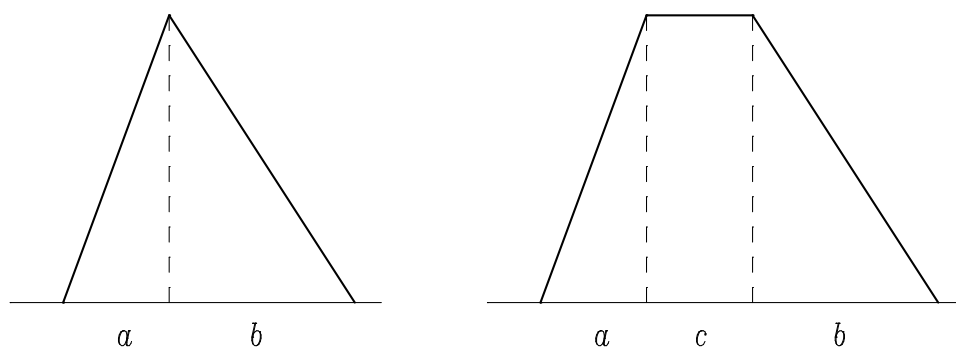


Figura 6.20: Dos barreras de potencial cuyas energías mínimas de cruce son aproximadamente las mismas. Para la de la derecha, siempre que las regiones de variación del potencial  $a$  y  $b$  sean las mismas, cualesquiera que sea el espesor intermedio  $c$ , la energía de cruce es la misma.

cinemáticas,  $\psi(t, \mathbf{r}, \mathbf{u})$ . Los generadores del grupo de Galileo en esta representación son

$$H = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{P} = -i\hbar \nabla, \quad \mathbf{K} = m\mathbf{r} - t\mathbf{P} + i\hbar \nabla_u, \quad \mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{Z}, \quad (6.26)$$

donde  $\nabla_u$  es el operador gradiente con respecto a las variables  $\mathbf{u}$ . Estos generadores satisfacen las reglas de conmutación del grupo de Galileo extendido <sup>16</sup>, y el operador espín está dado por  $\mathbf{Z} = -i\hbar \mathbf{u} \times \nabla_u$ .

Uno de los operadores de Casimir del grupo de Galileo extendido es la energía interna  $\mathcal{E}$ , que en presencia de un campo electromagnético externo y con un acoplamiento mínimo se escribe como la diferencia entre la energía mecánica  $H - eV$  menos la energía cinética

$$\mathcal{E} = H - eV - \frac{1}{2m}(\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2, \quad (6.27)$$

donde  $V$  y  $\mathbf{A}$  son los potenciales escalar y vectorial externos y donde  $\mathbf{P} - e\mathbf{A}$  es el momento lineal mecánico.

En este caso no hay campo magnético,  $\mathbf{A} = 0$ , y  $V$  es únicamente función de  $x$ . Podemos buscar soluciones del siguiente conjunto completo de observables que conmutan: El operador de Casimir (6.27),  $H$ ,  $P_y$ ,  $P_z$ ,  $Z^2$  y  $Z_z$ . La partícula se mueve a lo largo del eje  $OX$ , con el espín en la dirección  $OZ$ , por lo que podemos buscar soluciones que sean funciones propias de los operadores anteriores, en la forma:

$$\left( H - eV(x) - \frac{1}{2m} \mathbf{P}^2 \right) \psi = \mathcal{E} \psi, \quad H\psi = E\psi, \quad P_y\psi = 0, \quad P_z\psi = 0, \quad (6.28)$$

$$Z^2\psi = s(s+1)\hbar^2\psi, \quad Z_z\psi = \pm s\hbar\psi. \quad (6.29)$$

Vemos que  $\psi$  es independiente de  $y$  y de  $z$ , y su dependencia temporal es de la forma  $\exp(-iEt/\hbar)$ . Como el operador espín deriva con respecto a las variables de velocidad, podemos buscar soluciones en variables separadas en la forma

$$\psi(t, x, \mathbf{u}) = e^{-iEt/\hbar} \phi(x) \chi(\mathbf{u}),$$

y por lo tanto

$$\left( \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + E - eV(x) - \mathcal{E} \right) \phi(x) = 0, \quad (6.30)$$

$$Z^2 \chi(\mathbf{u}) = s(s+1)\hbar^2 \chi(\mathbf{u}), \quad Z_z \chi(\mathbf{u}) = \pm s\hbar \chi(\mathbf{u}). \quad (6.31)$$

La parte espacial  $\phi(x)$ , está desacoplada de la parte del espín  $\chi(\mathbf{u})$ , y  $E - eV(x) - \mathcal{E}$  representa la energía cinética de la partícula. La parte espacial satisface la ecuación de Schroedinger unidimensional, y la parte del espín es independiente de la interacción, por lo que la probabilidad cuántica del efecto túnel está contenida en la parte espacial y no depende de la orientación particular del espín.

Si la partícula se encuentra inicialmente a la izquierda de la barrera, con una energía cinética inicial  $E_0 = E - \mathcal{E}$ , podemos entonces determinar la probabilidad de cruce para  $a = 1$  y diferentes valores de la anchura del potencial  $b$ .

Este problema unidimensional con el potencial triangular de la figura Fig. 6.16 está resuelto en el libro de Landau: <sup>17</sup>

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-ikx}, & x \leq -a, \\ C_1 \text{Ai}(D(1 - G + \frac{x}{a})) + C_2 \text{Bi}(D(1 - G + \frac{x}{a})), & -a \leq x \leq 0, \\ C_3 \text{Ai}(L(1 - G - \frac{x}{b})) + C_4 \text{Bi}(L(1 - G - \frac{x}{b})), & 0 \leq x \leq b, \\ Te^{ikx}, & x \geq b, \end{cases} \quad (6.32)$$

<sup>16</sup> J.M. Levy-Leblond, *Galilei Group and Galilean Invariance*, in E.M. Loeb, *Group Theory and its applications*, Acad. Press, NY (1971), vol. 2, p. 221.

<sup>17</sup> L. Landau and E. Lifchitz, *Mécanique quantique*, Mir Moscow (1988), 3rd. edition.

donde  $x$  es la misma variable adimensional que en el análisis clásico, y las constantes son

$$k = \sqrt{\frac{E}{2mc^2}}, \quad D = \sqrt[3]{\frac{eV_0 a^2}{2mc^2}}, \quad L = \sqrt[3]{\frac{eV_0 b^2}{2mc^2}}, \quad G = \frac{E}{eV_0}. \quad (6.33)$$

Las funciones  $\text{Ai}(x)$  y  $\text{Bi}(x)$  son las funciones de Airy de  $x$ . Las seis constantes de integración  $R$ ,  $T$ , y  $C_i, i = 1, 2, 3, 4$ , se pueden obtener requiriendo la continuidad de las funciones y de sus primeras derivadas en los puntos de discontinuidad de la fuerza, esto es en  $x = -a$ ,  $x = 0$  y  $x = b$ . El coeficiente  $|R|^2$  representa la probabilidad de que la partícula sea reflejada por la barrera y  $|T|^2$  es la probabilidad de que se encuentre a la derecha de la barrera, esto es, que la cruce.

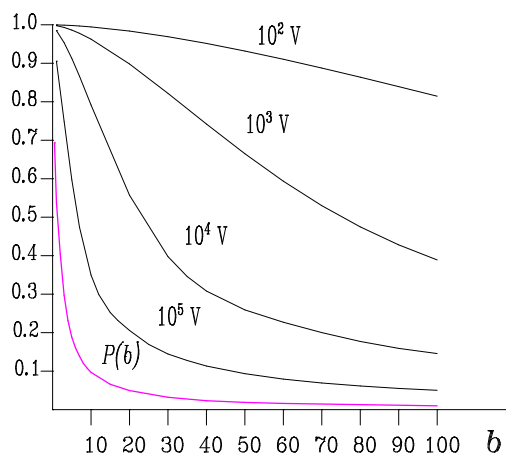


Figura 6.21: Probabilidad clásica  $P(b)$  y cuántica de cruce de la barrera, para diferentes valores del potencial  $V_0$ .

Si calculamos la amplitud  $T$  para  $a = 1$  y diferentes valores de la anchura  $b$ , y para energías por debajo del umbral de la barrera  $eV_0$ , vemos en la Fig. 6.21, la probabilidad media del efecto túnel cuántico para cuatro valores diferentes del potencial  $V_0$ , de  $10^2$ ,  $10^3$ ,  $10^4$  y  $10^5$  Voltios. Esta probabilidad media se ha calculado suponiendo que a la izquierda de la barrera tenemos una distribución uniforme de partículas con energía inferior a  $eV_0$ .

La correspondiente partícula clásica con espín, o pasa o no pasa. Para hacer una comparación probabilística, definimos la función  $P(b) = 1 - K_c(b)$ , donde  $K_c(b)$  es la energía mínima de cruce calculada anteriormente, para cada valor de  $b$ . Este valor, si la distribución de partículas es uniforme en energía por debajo del umbral de la barrera, representa la probabilidad de que una partícula clásica escogida al azar, esté por encima de la energía de cruce y por lo tanto cruce la barrera.

Hemos representado también la función  $P(b)$  en la Fig. 6.21. Vemos que la probabilidad clásica de cruce es siempre inferior a la probabilidad cuántica media, pero para potenciales altos se aproximan, por lo que la contribución al efecto túnel proveniente del espín, empieza a ser relevante. Podríamos justificar que la contribución cuántica es mayor que la clásica, ya que la energía media posee una incertidumbre  $\Delta E$  ligada con el tiempo de cruce  $\Delta t$ , por la relación de Heisenberg  $\Delta E \Delta t \geq \hbar$ , con lo que la imprecisión  $\Delta E$  en el conocimiento de la energía hace que esta pueda caer en la zona clásica de cruce aunque la energía media fuera inferior a  $K_c$ . Habría más casos cuánticos de cruce con energías inferiores a  $K_c$ , mientras que desde el punto de vista clásico no lo cruzarían.

Como el efecto túnel es una función de  $\hbar$  y el espín de las partículas elementales también es del orden de  $\hbar$ , es muy difícil separar en un experimento real qué parte del resultado que es de orden  $\hbar$  proviene de un efecto estrictamente cuántico o viene de la contribución del espín.

Si la partícula clásica estuviera polarizada longitudinalmente, es decir la orientación del espín fuera en la dirección del momento lineal o en sentido contrario, nunca cruzaría la barrera con energías inferiores al máximo  $eV_0$ . Vemos que la orientación sí influye en el caso clásico pero no en el cuántico, ya que de (6.30) y (6.31) se ve que la probabilidad de cruce es independiente del espín.

De hecho sí existe una influencia que no ha sido considerada en el análisis cuántico. Por tener la partícula separados el centro de masa del centro de carga, posee un momento dipolar eléctrico  $\mathbf{d} = e\mathbf{k}$ , y por lo tanto una energía de interacción de este dipolo de valor  $-\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}$ . Si la partícula está polarizada longitudinalmente,  $\mathbf{d}$  y  $\mathbf{E}$  son ortogonales y esta contribución es nula. Si, como en el caso clásico analizado, la polarización es transversal al movimiento, el anterior producto escalar produce una energía de interacción de valor  $-eER \cos \omega t$ , donde  $E$  es el campo eléctrico uniforme de cada zona y  $R$  es el radio del movimiento interno o zitterbewegung. En la parte de la ecuación cuántica hay que reemplazar

$$H - eV_0 \quad \Rightarrow \quad H - eV_0 + eER \cos \omega t$$

y resolver la correspondiente función de onda. Este término es del orden de la separación  $R$  entre el centro de masa y el centro de carga, y por lo tanto de orden  $\hbar$ . Aunque este término puede ser pequeño, debido a que es oscilante y de valor temporal medio nulo, puede ser relevante en casos en los que los gradientes del campo sean grandes. Veremos en la sección siguiente una aplicación de este efecto túnel, en la que la polarización sí es importante.

### 6.5.1. Efecto túnel de polarización del espín

Vamos a ver que la estructura que hemos encontrado del electrón, nos permite hacer una interpretación de la denominada magnetoresistencia gigante de películas policristalinas<sup>18</sup>. Esto se conoce en la literatura como el **Efecto túnel de polarización del espín**<sup>19</sup>.

La cuestión de que si el efecto túnel es un efecto puramente cuántico o puede ser clásico, es un tema carente de sentido. Hemos visto que existe un efecto túnel clásico, pero para partículas con espín, en las que sus centros de masa y de carga sean puntos diferentes. De todas formas, la materia elemental debe ser interpretada bajo las reglas de la mecánica cuántica, ya que es el cálculo cuántico el que produce un mejor acuerdo con las medidas experimentales.

La conducción eléctrica en materiales sinterizados es completamente diferente de la conducción en conductores ordinarios. Un material sinterizado no es un medio continuo. Está formado por pequeños granos que permanecen unidos al ser sometidos a compresión. La conducción eléctrica es pues, el salto de electrones de grano en grano, en un proceso túnel a través de un potencial efectivo en la región fronteriza entre los granos. Estos materiales presentan por lo tanto una alta resistividad, cuando se les compara con los conductores normales.

La forma del potencial en el intersticio es desconocida, pero podemos aproximarla mediante un potencial de tipo triangular como los de la sección anterior. Cuando un electrón se aleja de un grano, éste queda positivamente cargado y atrae al electrón. Cuando éste se ha alejado y queda más próximo al otro grano, induce un dipolo que lo atrae. En ambos casos no sabemos cómo son estas fuerzas, pero la aproximación anterior de suponerlas constantes justifica un potencial triangular en el intersticio. De todas formas, lo que hemos visto es que para cada

<sup>18</sup>Premio Nobel de Física 2007 a Albert Fert y Peter Grünberg por el descubrimiento en 1988 de la Magnetoresistencia Gigante.

<sup>19</sup>V.N. Dobrovolsky, D.I. Sheka and B.V. Chernyachuk, Surface Science **397**, 333 (1998); P. Raychaudhuri, T.K. Nath, A.K. Nigam and R. Pintor, cond-mat/9805258, preprint.

barrera de potencial existe un mínimo de energía, por debajo del máximo del potencial, tal que electrones polarizados transversalmente por encima de esa energía la cruzan, incluso desde el punto de vista clásico. Este efecto no es predicho por la mecánica cuántica 'ordinaria', ya que la probabilidad de cruce por efecto túnel es independiente del espín.

Si tenemos un hilo de este material sometido a un potencial eléctrico, cuando introducimos un campo magnético externo transversal a la dirección de la corriente, los electrones de conducción se polarizan de forma transversal al campo eléctrico, y si el nivel de Fermi de estos electrones está por encima de la energía mínima de cruce, todos aquellos electrones por encima de esta energía la cruzarán, incluso clásicamente, como si fuera un verdadero conductor. La resistencia del material ha sido alterada por la presencia de un campo magnético externo transversal. Podemos diseñar dispositivos electrónicos en los que el control de las corrientes no se efectúa con campos eléctricos sino controlando la orientación del espín. Un dispositivo de este tipo se dice que pertenece a la nueva técnica de la **espintrónica**, pues se utiliza el control del espín para producir efectos electrónicos.

Se podría argumentar que la presencia del campo magnético externo que polariza a los electrones, pudiera modificar la probabilidad de cruce. Incluso con un campo externo del orden de 1 Tesla, y en una barrera potencial de 1 Voltio, el término de interacción magnética  $-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$  contribuye con una energía del orden de  $\pm 5,7 \times 10^{-5}$  eV, la cual no modifica la probabilidad cuántica de cruce.

## 6.6. Formación de pares de electrones ligados

Hemos visto en la sección 2.6.2, que las ecuaciones que describen la dinámica del electrón relativista con espín, son un sistema de ecuaciones diferenciales de cuarto orden para el centro de carga  $\mathbf{r}$ , que se puede descomponer en un sistema de ecuaciones de segundo orden acopladas, para el centro de masa  $\mathbf{q}$  y el centro de carga  $\mathbf{r}$ . Son de la forma de (2.196):

$$\ddot{\mathbf{q}} = 0, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \frac{1 - \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{(\mathbf{q} - \mathbf{r})^2} (\mathbf{q} - \mathbf{r}),$$

donde el punto representa la derivada temporal. La primera representa el movimiento libre del centro de masa, y la segunda, una especie de movimiento armónico relativista del punto  $\mathbf{r}$  alrededor del punto  $\mathbf{q}$ , manteniéndose constante para todo observador el valor absoluto de la velocidad  $u = c$ .

Es precisamente el factor  $(1 - \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{r}})/(\mathbf{q} - \mathbf{r})^2$  el que previene de que si tomamos una solución con un valor de contorno tal que  $\dot{\mathbf{r}}(0) = 1$ , la solución no modifica el valor absoluto de la velocidad de la carga. Si no imponemos esta condición inicial, el valor absoluto de la velocidad de cualquier otra solución no tiene por qué conservarse. En el caso de interacción entre dos partículas, tendríamos un sistema de ecuaciones del tipo anterior, donde  $\mathbf{r}_a$  y  $\mathbf{q}_a$ ,  $a = 1, 2$ , serían las posiciones de cada una de ellas. Las segundas ecuaciones no se modifican, es decir el movimiento interno de cada partícula elemental no es alterado por ninguna interacción. La primera ecuación queda reemplazada por  $d\mathbf{p}_a/dt = \mathbf{F}_a$  donde  $\mathbf{p}_a$  es el momento lineal de la partícula  $a$  que se expresa como es habitual, en términos de la velocidad de su centro de masa,

$$\mathbf{p}_a = \gamma(\dot{\mathbf{q}}_a) m \dot{\mathbf{q}}_a, \quad \gamma(\dot{\mathbf{q}}_a) = (1 - \dot{\mathbf{q}}_a^2)^{-1/2},$$

y la fuerza  $\mathbf{F}_a$  la podemos calcular por una Lagrangiana de interacción del tipo (4.78)

$$\mathbf{F}_a = \frac{\partial L_I}{\partial \mathbf{r}_a} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_I}{\partial \mathbf{u}_a} \right)$$

Para la partícula 1 toma la forma:

$$\mathbf{F}_1 = -g \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \sqrt{1 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2} + \frac{d}{dt} \left( \frac{g \mathbf{u}_2}{2|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \sqrt{1 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}} \right), \quad (6.34)$$



donde  $g = \pm\alpha\hbar c$ .

Explícitamente se escribe:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 = & -\frac{g\sqrt{1-\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2}}{[(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)^2]^{3/2}} \left( (\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) + \frac{\mathbf{u}_2(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\cdot(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)}{1-\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2} \right) + \\ & + \frac{g}{2[(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)^2]^{1/2}} \left( \mathbf{u}_2 \frac{\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{a}_2}{(1-\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2)^{3/2}} + \frac{\mathbf{a}_2}{\sqrt{1-\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2}} \right). \end{aligned}$$

Contiene términos de velocidad que van como  $1/r^2$  y términos de aceleración que van como  $1/r$  en términos de la distancia instantánea entre cargas  $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ . En esta notación, en la descripción síncrona,  $\mathbf{u}_a = \dot{\mathbf{r}}_a$ .

La fuerza sobre la partícula 2 se obtiene sin más que reemplazar  $1 \longleftrightarrow 2$  en esta expresión.

El sistema de ecuaciones se puede hacer en términos de variables adimensionales. En efecto si hacemos  $\mathbf{u} = c\tilde{\mathbf{u}}$ ,  $\mathbf{v} = c\tilde{\mathbf{v}}$ ,  $\mathbf{r} = R_0\tilde{\mathbf{r}}$ ,  $\mathbf{q} = R_0\tilde{\mathbf{q}}$  y  $\tilde{t} = \omega_0 t$ , la ecuación

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \omega_0^2 R_0 \frac{d^2\tilde{\mathbf{r}}}{d\tilde{t}^2} = \frac{c^2}{R_0} \frac{1 - \tilde{\mathbf{q}}\cdot\tilde{\mathbf{u}}}{(\tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{r}})^2} (\tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{r}})$$

y como  $\omega_0 R_0 = c$ , los coeficientes de escala se cancelan y esta ecuación queda en términos de variables adimensionales. Lo mismo sucede a la

$$m \frac{d\gamma(v)\mathbf{v}}{dt} = mc\omega_0 \frac{d\gamma(v)\tilde{\mathbf{v}}}{d\tilde{t}} = -\frac{\alpha\hbar c}{R_0^2} \frac{\tilde{\mathbf{r}}_1 - \tilde{\mathbf{r}}_2}{|\tilde{\mathbf{r}}_1 - \tilde{\mathbf{r}}_2|^3} \sqrt{1 - \tilde{\mathbf{u}}_1\cdot\tilde{\mathbf{u}}_2} + \dots$$

y el coeficiente adimensional

$$\frac{\alpha\hbar c}{mc\omega_0 R_0^2} = 2\alpha, \quad \text{pues } \omega_0 R_0 = c, \quad R_0 = \frac{\hbar}{2mc}.$$

El sistema de ecuaciones a resolver es

$$\ddot{\mathbf{q}}_a = \frac{2\alpha}{\gamma(\dot{\mathbf{q}}_a)} (\mathbf{F}_a - \dot{\mathbf{q}}_a(\mathbf{F}_a \cdot \dot{\mathbf{q}}_a)) \quad (6.35)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_a = \frac{1 - \dot{\mathbf{q}}_a \cdot \dot{\mathbf{r}}_a}{(\mathbf{q}_a - \mathbf{r}_a)^2} (\mathbf{q}_a - \mathbf{r}_a), \quad a = 1, 2 \quad (6.36)$$

donde  $\alpha$  es la constante de estructura fina y todas las variables reescaladas son adimensionales. Para ello el factor de escala espacial es  $R_0 = \hbar/2mc$  y el temporal es  $T_0 = \hbar/2mc^2$ . Todos los términos que dependen de la aceleración de las cargas de la ecuación (6.35), han sido reemplazados por las expresiones de (6.36). En la expresión de las fuerzas  $\mathbf{F}_a$  se debe reemplazar la expresión anterior pero sin la constante de acoplamiento  $g$ , que después del reescalamiento ha quedado reducida a  $2\alpha$ . Si las cargas de las partículas fueran de signo contrario, la ecuación (6.35) vendría afectada por un signo  $-$ .

Si, además de la interacción entre las partículas, existiera un campo electromagnético externo, la ecuación (6.35) se modificaría en la forma, también en variables adimensionales,

$$\ddot{\mathbf{q}}_a = \dots + \frac{e\hbar}{2m^2 c^3} (\mathbf{F} - \dot{\mathbf{q}}_a(\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{q}}_a)), \quad \mathbf{F} = \mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}}_a \times c\mathbf{B},$$

donde los campos  $\mathbf{E}$  y  $c\mathbf{B}$  se expresarán en V/m.

Sería deseable, para hacer un análisis teórico, el encontrar soluciones analíticas de (6.35-6.36). Nos conformaremos con hacer un cálculo numérico. Vamos a usar el programa de integración numérica *Dynamics Solver*, el cual permite preparar ficheros para automatizar el proceso de cálculo, variando a voluntad las condiciones de contorno.

En la figura 6.22 se representa la dispersión de dos partículas de la misma carga, con sus espines paralelos. El movimiento de sus centros de masa se indica con una flecha. Si las partículas no se aproximan mucho, estas trayectorias se corresponden básicamente con las trayectorias de

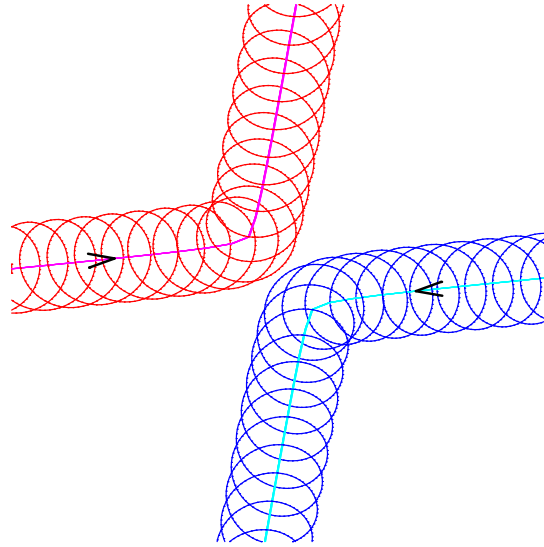


Figura 6.22: Trayectorias de los centros de masa y carga de dos partículas con espín con velocidad inicial de sus centros de masa  $\dot{q}_a = 0,1$  y un parámetro de impacto pequeño.

dos partículas sin espín, interaccionado a través de una fuerza Coulombiana. Cuando decimos que no se aproximan mucho queremos decir que su separación relativa es siempre mucho más grande que la longitud de onda Compton.

Esto se puede entender porque si las partículas están lejos una de otra, el comportamiento Coulombiano de la Lagrangiana lo justifica. Al calcular la interacción entre las correspondientes cargas, como la frecuencia del movimiento interno es muy alta, la posición media de cada carga es el correspondiente centro de masa. Sin embargo, en altas energías, las dos partículas se pueden aproximar por debajo de la longitud de onda Compton, y por lo tanto ese análisis promedio no funciona. Es necesario conocer las posiciones exactas de las cargas y sus velocidades para determinar las fuerzas sobre cada una de ellas.

Aquí, nuevos fenómenos físicos aparecen, cuando se compara con partículas sin espín. El fenómeno de la dispersión frontal, es decir que prácticamente ambas partículas siguen sus trayectorias iniciales sin desviarse, como la calculada en la figura 6.23, no se puede describir en el caso de partículas sin espín. La interacción Coulombiana hace que dos electrones en colisión frontal se desvíen siempre. Sin embargo, la experiencia demuestra que la dispersión frontal es el fenómeno más probable en la colisión de haces de partículas.

Otro fenómeno que no aparece en partículas sin espín, es la formación de pares, es decir de estados ligados estables de partículas de la misma carga. En la figura 6.24, representamos la posición inicial de dos partículas de la misma carga con sus espines paralelos y tal que sus correspondientes centros de masa se encuentran a una distancia inferior a la longitud de onda Compton, esto es, inferior al diámetro de su movimiento interno. Hemos escrito los símbolos de las cargas  $e_a$  en el correspondiente centro de carga  $\mathbf{r}_a$  y las correspondientes letras  $m_a$  en los respectivos centros de masa  $\mathbf{q}_a$ . En la parte (a) dibujamos la situación cuando ambas partículas poseen la misma fase inicial  $\beta_1 = \beta_2$ , de sus movimientos internos. Las fuerzas  $\mathbf{F}_a$ , sobre cada partícula  $a = 1, 2$ , se calculan en términos de las posiciones, velocidades y aceleraciones de las dos cargas, de acuerdo con (6.34), y dibujamos también esas mismas fuerzas en los correspondientes centros de masa, para poder plantear las ecuaciones (6.35). Vemos que una fuerza repulsiva entre las cargas produce también una fuerza repulsiva entre los correspondientes centros de masa. Sin embargo, si las fases iniciales de sus movimientos internos, fuesen opuestas,  $\beta_1 = -\beta_2$ , como en la parte (b) de la figura, una fuerza repulsiva entre cargas, calculada igual que en el caso anterior, produce una fuerza atractiva entre los centros de masa. Si la separación entre los

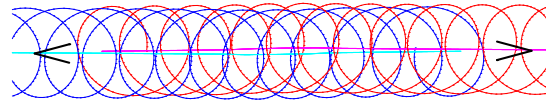


Figura 6.23: **Dispersión frontal de dos partículas con espín, de la misma carga, y con una separación inicial  $2q_a(0) = 10$ , velocidad de sus centros de masa  $|\dot{q}_a(0)| = 0,18$  y un parámetro de impacto pequeño. Los dos centros de masa pasan uno junto al otro, sin apenas desviarse.**

centros de masa fuera superior a la longitud de onda Compton, la fuerza entre centros de masa sería siempre repulsiva, independientemente de las fases relativas de los movimientos internos.

En la figura 6.25 vemos otra situación de fases opuestas pero donde la separación entre los centros de masa es mayor aunque sigue siendo inferior a la longitud de onda Compton.

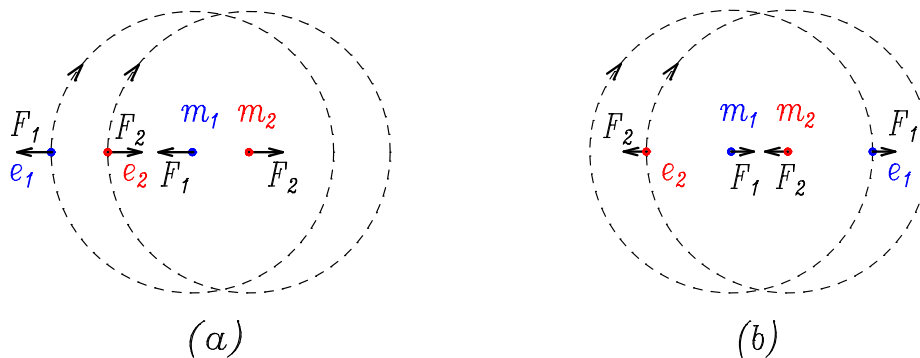


Figura 6.24: **Posiciones iniciales de dos partículas de Dirac con sus espines paralelos y con una separación entre sus centros de masa inferior a la longitud de onda Compton. Las líneas de puntos representan las trayectorias previsibles de cada carga, si la partícula estuviera libre. Ambos movimientos tienen el mismo sentido como corresponde a partículas con sus espines paralelos. En (a) ambas partículas poseen la misma fase inicial y la fuerza repulsiva entre cargas, produce una fuerza repulsiva entre sus centros de masa, mientras que en (b), con fases opuestas, la fuerza entre sus centros de masa resulta ser atractiva.**

Para analizar esta situación en la que se van a producir movimientos ligados de pares de partículas de la misma carga, vamos a proceder de la siguiente forma: Comenzamos la integración numérica imponiendo la condición de que ambos centros de masa se encuentran en reposo y localizados en el origen del sistema de referencia, es decir  $\mathbf{q}_a(0) = \dot{\mathbf{q}}_a(0) = 0$ . Para la partícula 2 tomamos como fase inicial  $\beta_2(0) = 0$  y para la partícula 1, empezamos con  $\beta_1(0) = \pi$ , y la

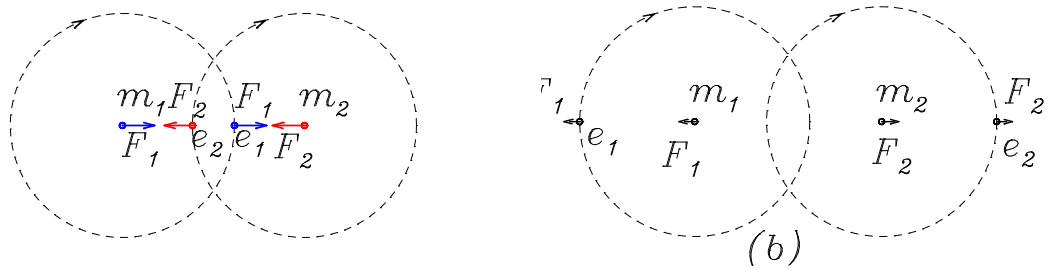


Figura 6.25: (a) Posición inicial de dos partículas con fases opuestas, que produce una fuerza atractiva entre sus centros de masa, que están separados menos que la longitud de onda Compton. En la parte (b), después de medio ciclo de las cargas, la fuerza entre los centros de masa resulta ser repulsiva, pero su intensidad es menor que en la situación anterior por estar las cargas más alejadas, por lo que el movimiento resultante es también un movimiento de pares ligados.

vamos incrementando de grado en grado en cada proceso de integración, hasta alcanzar el valor final de  $2\pi$  radianes. Los valores de contorno de las variables  $\mathbf{r}_a(0)$  y  $\dot{\mathbf{r}}_a(0)$ , con la ligadura  $|\dot{\mathbf{r}}_a(0)| = 1$ , se escogen de tal manera que sean compatibles con estas fases. El sistema total es analizado en su centro de masa, de tal manera que  $\mathbf{q}_1(0) = -\mathbf{q}_2(0)$  y  $\dot{\mathbf{q}}_1(0) = -\dot{\mathbf{q}}_2(0)$ . El proceso de integración se automatiza de tal forma que cuando los centros de masa de las partículas se separan por encima de la longitud de onda Compton, la integración se interrumpe y comienza de nuevo con un nuevo valor de la fase  $\beta_1(0)$  de un grado más, y los correspondientes valores nuevos de las variables  $\mathbf{r}_a(0)$  y  $\dot{\mathbf{r}}_a(0)$ .

Si las partículas no se separan durante un tiempo de integración correspondiente a  $10^6$  vueltas de las cargas alrededor del correspondiente centro de masa, se vuelve a parar el proceso, se guardan los valores iniciales de las variables que dan lugar a este movimiento ligado y se comienza de nuevo con nuevos valores de contorno. Este tiempo ligado corresponde, en el caso de electrones, a un estado ligado de duración superior a  $10^{-15}$  segundos. Para algunos valores particulares de las variables, con fases opuestas, hemos dejado el programa de integración funcionando durante una semana, y el estado ligado se mantiene. Esto representa una vida superior a  $10^{-9}$  segundos. Si dejásemos el programa funcionando durante un año, esto incrementaría el tiempo de vida solamente en dos órdenes de magnitud. La sensación general es que los estados ligados son suficientemente estables, ya que ni siquiera los posibles errores numéricos en la integración destruyen la ligadura entre las partículas, ni la estabilidad del movimiento. El proceso se ha repetido de nuevo, cambiando ligeramente las condiciones iniciales de las variables del centro de masa  $\mathbf{q}_a(0)$  y  $\dot{\mathbf{q}}_a(0)$ , en pasos de valor 0,0001 en estas variables adimensionales, y con  $\beta_2(0) = 0$ , y el mismo proceder con la fase  $\beta_1(0)$ , como el comentado anteriormente. Para verificar la fiabilidad del método, cada  $10^3$  pasos de integración, se mide el que las velocidades de las cargas sigan siendo de valor absoluto 1, dentro de un error numérico menor que  $10^{-20}$ .

Se ha realizado el proceso tomando como fase inicial  $\beta_2(0)$  cualquier otro valor arbitrario. Se trataba de poner de manifiesto si había diferencias en función de las diferencias de fases iniciales  $\beta_2(0) - \beta_1(0)$ , y de las posiciones y velocidades de los centros de masa  $\mathbf{q}_a(0)$  y  $\dot{\mathbf{q}}_a(0)$ . Después de recolectar todos los datos que conducen a movimientos ligados, hemos encontrado los siguientes resultados:

1. La velocidad inicial de los centros de masa debe ser  $|\dot{\mathbf{q}}_a(0)| < 0,01c$ . En caso contrario, el movimiento entre las dos partículas no es estable y al cabo de unas pocas vueltas se separan.
2. Para cada velocidad  $|\dot{\mathbf{q}}_a(0)| < 0,01c$  existe un rango  $\Delta$  de la fase  $\beta_1(0) = \beta_2(0) + \pi \pm \Delta$  para el cual el movimiento es estable. Cuanto mayor sea la velocidad de los centros de

masa, más estrecho es este margen, de tal manera que los movimientos más estables se producen con las fases prácticamente opuestas.

3. Se han encontrado movimientos ligados para una separación inicial entre los centros de masa, hasta 0,8 veces la longitud de onda Compton, como la que se representa en la figura 6.25, siempre que las fases y velocidades se encuentren dentro de los rangos mencionados anteriormente.

En la figura 6.26, mostramos el cálculo del movimiento ligado de las dos partículas con una separación inicial de sus centros de masa de  $q_{1x} = -q_{2x} = 0,2 \times (\text{long. de onda Compton})$ ,  $\dot{q}_{1x} = -\dot{q}_{2x} = 0,008$  y  $\dot{q}_{1y} = -\dot{q}_{2y} = 0,001$ ,  $\beta_2 = 0$  y  $\beta_1 = \pi$ . La fuerza entre cargas es repulsiva pero sin embargo, si las fases internas  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son opuestas, produce una fuerza atractiva entre los centros de masa de acuerdo con el mecanismo mostrado en la figura 6.24 (b).

Esta posibilidad de formación de pares ligados, metaestables, de baja energía, de partículas de la misma carga, no es exclusivo de la Lagrangiana de interacción utilizada. Si usamos una interacción electromagnética o bien una interacción Coulombiana instantánea entre las cargas de dos partículas de Dirac, hemos encontrado también este comportamiento en <sup>20</sup>. Este movimiento ligado no lo destruyen campos eléctricos externos ni tampoco campos magnéticos externos de la misma dirección que los espines. Sin embargo, un campo magnético transversal al espín, destruye el movimiento ligado.

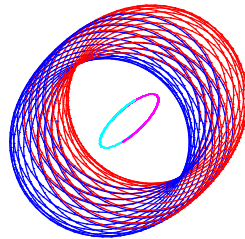


Figura 6.26: **Movimiento ligado de los centros de masa y centros de carga de dos partículas con espín, de espines paralelos y con una velocidad de sus centros de masa  $v \simeq 0,0082$ . La separación inicial entre sus centros de masa es de  $0,2 \times (\text{long. de onda Compton})$ .**

Cuando calculamos el valor medio de la posición  $\mathbf{r}_a$ , resulta ser el valor del centro de masa  $\mathbf{q}_a$ , y de esta forma, la fuerza repulsiva entre cargas resulta también una fuerza repulsiva entre los correspondientes centros de masa, por lo que suprimir el contenido de la parte del espín asociada al zitterbewegung, elimina la posibilidad de formación de pares ligados.

A pesar de que este resultado nos muestra un mecanismo clásico que justifica la formación de un sistema ligado de espín 1, y por lo tanto un bosón a partir de dos fermiones cargados iguales, hemos de tener cuidado con el tipo de conclusiones que podemos sacar. En primer lugar es un análisis clásico, y aunque el rango de energías en las que el fenómeno es estable es bastante grande, esto no significa que dos electrones puedan quedar ligados hasta esa energía

<sup>20</sup>M. Rivas *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** 4703 (2003), (*Preprint physics/0112005*)

de ligadura. De ser así, vamos a estimar desde un punto de vista térmico, a qué temperatura máxima corresponde la posibilidad de formación de estados ligados. En efecto, si consideramos desde el punto de vista clásico que el electrón es un sistema de 7 grados de libertad, 3 representan la posición  $\mathbf{r}$ , otros 3 la orientación  $\boldsymbol{\alpha}$  y finalmente una fase interna  $\beta$ . Si aceptamos el teorema de equipartición de la energía, entonces para ese máximo de energía cinética que produce el estado ligado  $mv^2/2 = 7\kappa T/2$ , siendo  $\kappa$  la constante de Boltzmann y  $v = 0,01c$  la velocidad máxima de cada partícula, entonces un gas de electrones polarizados (como los electrones de conducción en un efecto Hall cuántico, como veremos) pueden formar estados ligados hasta una temperatura por debajo de  $T = 8,47 \times 10^5 \text{K}$ , que es en efecto una temperatura muy alta.

En segundo lugar, la materia a este nivel se comporta de acuerdo con los postulados de la mecánica cuántica y, por lo tanto, debemos resolver dentro del marco cuántico, el correspondiente estado ligado y establecer para qué energías es posible. En particular, el movimiento relativo entre electrones tiene que tener el momento angular orbital cuantizado. Este problema no ha sido resuelto todavía, pero la existencia de una posibilidad clásica de formación de pares y un rango de energía tan alto, justifica el que se realice un esfuerzo en esa dirección. Un electrón y un protón pueden formar estados ligados dentro de un margen continuo y muy amplio de energías. Es solamente la teoría cuántica la que da la respuesta correcta para qué energías los estados ligados son estacionarios.

Si las fases de las dos partículas fuesen las mismas (o casi las mismas) no hay posibilidad, ni siquiera clásica, de formación de estados ligados. Como los dos fermiones que forman el estado ligado poseen el mismo espín y la misma energía, ¿no será que el exigir que sus fases sean contrarias, es una forma clásica de superar el principio de exclusión de Pauli y justificar la existencia de estos estados ligados?

### 6.6.1. El Positronium

Si las dos partículas son de cargas opuestas, la fuerza entre ellas es de atracción, y si sus espines tuvieran la orientación opuesta, el movimiento de los centros de cargas de ambas serían los mismos que los que hemos analizado aquí. Un ejemplo de este tipo de interacción, en el que las dos partículas son de la misma masa y carga opuesta, es el **Positronium**, o sistema formado por un electrón y un positrón. Es un sistema que posee estados estacionarios aunque la probabilidad de que la partícula y la antipartícula colisionen es grande y por lo tanto se aniquilen ambas. El estado fundamental es un estado de espín cero y momento magnético cero, lo cual refuerza la predicción de la teoría cinemática que estamos desarrollando de que el espín y el momento magnético de la partícula y la antipartícula deben tener la misma orientación relativa. Tiene una vida media de  $1.24 \times 10^{-10} \text{s}$  y el sistema se desintegra en dos fotones con espines y momento lineal opuestos y de energía la del electrón en reposo. Otro estado estacionario con una vida media mayor  $1.4 \times 10^{-7} \text{s}$  corresponde al estado de espín 1, que corresponde a la transición hiperfina en la que una de las dos partículas invierte su espín. Se aniquilan emitiendo 3 fotones.

Desde el punto de vista clásico los estados estacionarios admiten la misma descripción aproximada que el átomo de Bohr, con la cuantización del momento angular orbital.

## 6.7. Efecto Hall

Este efecto fue descubierto por Edwin Hall en 1879. Se trata de la influencia de un campo magnético sobre una corriente en un conductor, que produce una diferencia de potencial transversal a la dirección en que circula la corriente. Si en un conductor producimos una corriente continua e introducimos un campo magnético perpendicular a la corriente, entonces los electrones que se desplazan, al interactuar con el campo magnético se pondrán a girar, lo que dará lugar a una acumulación de carga eléctrica en los laterales del conductor, negativa donde se

acumulan los electrones y positiva en el lado opuesto por disminución de éstos, con lo que se establece una diferencia de potencial transversal.

Supongamos un conductor plano sobre el que actúa un campo magnético en la dirección  $OZ$ . El movimiento de los electrones puntuales, de carga  $-e$ , desplazándose con velocidad  $\mathbf{v}$  en un campo magnético viene dado por

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Si el movimiento tiene lugar en el plano  $XOY$ ,  $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, 0)$  y  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$  por lo que estas ecuaciones se reducen a dos

$$m\ddot{x} = -eB\dot{y}, \quad m\ddot{y} = eB\dot{x},$$

cuya solución general es

$$x(t) = X - R \sin(\omega_B t + \phi), \quad y(t) = Y - R \cos(\omega_B t + \phi).$$

Son círculos centrados en el punto  $(X, Y)$  y con una fase  $\phi$  y un radio  $R$ , arbitrarios. Estos cuatro parámetros son las cuatro constantes de integración. Sin embargo la pulsación  $\omega_B = eB/m$ , denominada frecuencia ciclotrónica, es fija. Los electrones se mueven en círculos de diversos radios pero con la misma velocidad angular  $\omega_B$ .

El movimiento de los electrones sin espín en un conductor Óhmico bajo la influencia de un campo electromagnético externo puede venir descrito por el modelo de Drude,

$$m \frac{d(\gamma(v)\mathbf{v})}{dt} = -e\mathbf{E} - e\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{1}{\tau} m\mathbf{v},$$

donde el último término contiene una fuerza de frenado, opuesta a la velocidad, dependiente de un parámetro con dimensiones de tiempo  $\tau$ , denominado *tiempo de dispersión*, que puede ser interpretado como el tiempo medio entre colisiones. Si este tiempo es largo representa que hay poca resistencia al movimiento. Depende de la estructura interna del medio conductor y del carácter fermiónico de los portadores de carga.

Las soluciones estacionarias son las que  $\mathbf{v}$  no depende del tiempo,

$$\mathbf{v} + \frac{e\tau}{m} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = -\frac{e\tau}{m} \mathbf{E}.$$

Si  $\mathbf{j} = -ne\mathbf{v}$  es el vector densidad de corriente, donde  $n$  representa la densidad de electrones de conducción del material, la anterior expresión nos establece una relación lineal entre  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{E}$ , que en el caso de un conductor plano se reduce a

$$\frac{m}{ne^2\tau} j_x + \frac{B}{ne} j_y = E_x, \quad \frac{m}{ne^2\tau} j_y - \frac{B}{ne} j_x = E_y,$$

que escrita en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ -\rho_{xy} & \rho_{yy} \end{pmatrix} \mathbf{j} = \mathbf{E}, \quad \rho_{ik} j_k = E_i, \quad j_i = \sigma_{ik} E_k,$$

es la *Ley de Ohm*, donde  $\rho_{ik}$  es el tensor de resistividad y su inverso  $\sigma = \rho^{-1}$ , el tensor de conductividad. En ausencia de campo magnético el tensor de resistividad  $\rho$  es diagonal, cuya componente esencial es la resistividad Óhmica del conductor  $\rho_0$ .

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ -\rho_{xy} & \rho_{yy} \end{pmatrix}, \quad \rho_{xx} = \rho_{yy} \equiv \rho_0 = \frac{m}{ne^2\tau}, \quad \rho_{xy} = \frac{B}{ne}.$$

Si en la situación estacionaria la corriente fluye a lo largo de  $OX$ ,  $j_y = 0$ , y aunque hemos establecido una diferencia de potencial entre los extremos del conductor debe existir un campo

eléctrico transversal  $E_y$ , que se produce por acumulación de cargas en los laterales del conductor y que impide que la densidad de corriente tenga una componente en la dirección transversal.

$$E_x = \rho_{xx} j_x, \quad E_y = -\rho_{xy} j_x, \quad \rho_{xx} = \frac{m}{ne^2\tau}, \quad \rho_{xy} = \frac{B}{ne}.$$

La  $\rho_{xx} = \rho_0$  depende de la estructura microscópica, de la temperatura, a través del parámetro  $\tau$ , mientras que  $\rho_{xy}$  es una función lineal del campo magnético externo.

### 6.7.1. Efecto Hall cuántico

Si representamos las resistividades  $\rho_{xx}$  y  $\rho_{xy}$  en la situación estacionaria como función del campo magnético externo obtenemos las gráficas de la figura 6.27. Este análisis ha sido hecho considerando que el electrón es una partícula puntual. El espín del electrón no ha jugado ningún papel en este análisis.

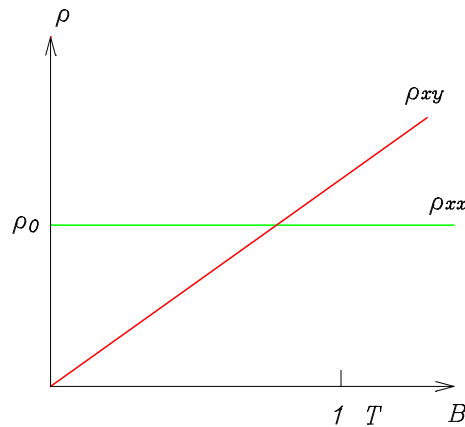


Figura 6.27: Variación de la resistividad con el campo magnético externo en el efecto Hall clásico, para campos magnéticos pequeños, inferiores a 1 Tesla.

Sin embargo, para campos magnéticos grandes la anterior figura tiene la forma que se describe en 6.28 y que fue determinada experimentalmente por Von Klitzing, Dorda y Pepper<sup>21</sup>

La  $\rho_{xy}$  varía linealmente en promedio con  $B$  pero efectúa saltos bruscos durante los cuales permanece constante. La  $\rho_{xx}$  comienza en su valor constante  $\rho_0$ , pero en seguida se pone a oscilar. En estos tramos en los que  $\rho_{xy}$  es constante, la  $\rho_{xx}$ , de color verde, se anula, experimentando un pico cuando la  $\rho_{xy}$  deja de ser constante y experimenta una subida. Los tramos horizontales cumplen la condición

$$\rho_{xy} = \frac{h}{e^2} \frac{1}{\nu}, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots \quad (6.37)$$

Como la constante de estructura fina  $\alpha = e^2/2\epsilon_0hc$ , supuesta conocida la velocidad  $c$  y la permitividad del vacío  $\epsilon_0$ , la medida precisa de  $\rho_{xy}$  en los tramos constantes, es una medida precisa de esta constante universal.

Además, el campo magnético promedio en el que se producen esos tramos constantes vale

$$B_\nu = \frac{n h}{\nu e} = \frac{n}{\nu} \Phi_0,$$

<sup>21</sup>K. v. Klitzing, G. Dorda and M. Pepper, *New method for high accuracy determination of the fine structure constant based on quantized Hall resistance*, Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980)



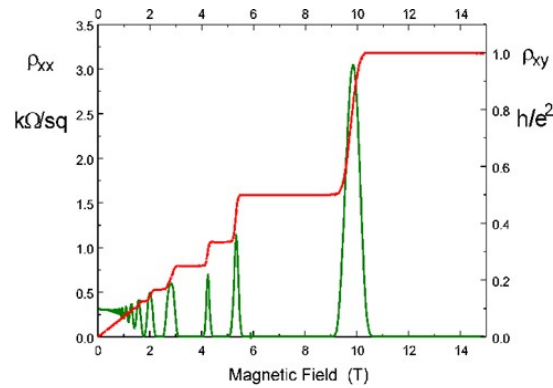


Figura 6.28: Variación de la resistividad con el campo magnético,  $\rho_{xx}$  (verde),  $\rho_{xy}$  (rojo), en el efecto Hall cuántico entero.

donde  $\Phi_0$  se conoce como el *cuanto de flujo* y a la cantidad  $h/e^2$  como *cuanto de resistividad*. Esto se conoce en la literatura como efecto Hall cuántico **entero**, para distinguirlo del efecto Hall cuántico **fraccionario** donde en la resistividad (6.37) el parámetro  $\nu$  en vez de ser un entero es un número fraccionario, como se puso de manifiesto para campos más altos<sup>22</sup> y que se representa en la figura 6.29.

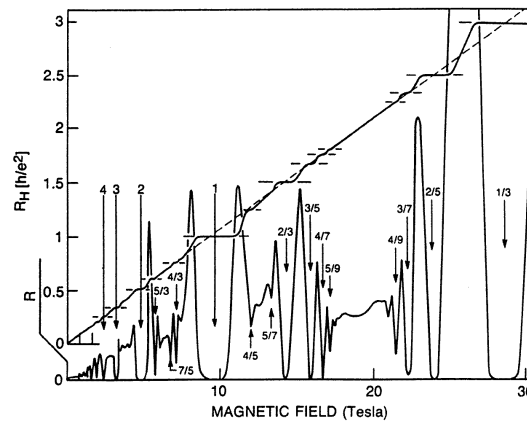


Figura 6.29: Variación de la resistividad con el campo magnético externo en el efecto Hall cuántico fraccionario para campos altos.

El efecto Hall se analiza para distribuciones planas de electrones confinadas entre capas de diferentes materiales. El primer efecto entero se descubrió en un MOSFET (Metal-Oxide-Semiconductor-Field-Effect-Transistor). Es un sandwich de un transistor de tres capas (metal-aislante-semiconductor) con los electrones atrapados en una capa de  $30\text{\AA}$  de espesor entre el aislante y el semiconductor. El efecto fraccionario se descubrió en una estructura GaAs-GaAlAs de *arseniuro de Galio*. En ambos casos las densidades superficiales de electrones son del orden de  $n \approx 10^{11} - 10^{12} \text{ cm}^{-2}$ . La temperatura de las muestras es de 4 K para el efecto entero y 2 K para el fraccionario. Más recientemente, se ha detectado el efecto Hall cuántico fraccionario en el grafeno<sup>23</sup> a temperaturas de 20 K.

El potencial Hall transversal discreto se mantiene constante para campos magnéticos en un rango finito durante los cuales la resistividad longitudinal cae a cero. La corriente fluye de forma longitudinal sin resistencia pues  $\rho_{xx} = 0$ . Como hemos visto, electrones con los espines paralelos

<sup>22</sup>D.C. Tsui, H.L. Stormer and A.C. Gossard, *Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit*, Phys. Rev. Lett. **48**, 1559 (1982)

<sup>23</sup>X. Du, et al. *Nature* **462** 192 (2009).

pueden formar estados ligados metaestables de espín 1, que se comportan como bosones y la corriente a ellos asociada está en su fase superconductor. Esto querría decir que para esos rangos de campos magnéticos se está produciendo una polarización importante y efectiva de los espines de los electrones de conducción en la dirección del campo magnético externo, con la consiguiente formación de pares, algunos de los cuales serían desplazados hacia los bordes del conductor, produciendo un salto brusco de la tensión Hall lateral. El resto de los electrones apareados se movería longitudinalmente sin resistencia, y estarían en la fase superconductor. Puede interpretarse que cuando por efecto del campo magnético se han polarizado un conjunto de electrones y se forman pares ligados, si aumentamos el campo magnético estos pares no se deshacen y no se incrementa el número de pares ligados hasta que llegamos a un nuevo campo que hace que bruscamente aumente la polarización incrementando el número de electrones ligados.

Cuando se forman pares de electrones ligados, un campo eléctrico no deshace el par y ambas partículas se mueven como un objeto de espín 1 y carga  $2e$ . Si utilizamos la punta de prueba de un microscopio de efecto túnel aplicado a la superficie plana del conductor, se podría intentar extraer portadores del conductor y verificar si son electrones aislados o bien pares ligados. Lo mismo si aplicásemos la punta de extracción al lateral negativo del conductor, para comprobar si las cargas depositadas son simples electrones sueltos o electrones apareados. Estos experimentos, según nuestro entender, no se han realizado.

### 6.7.2. Efecto Hall de espín

El efecto Hall de espín es el fenómeno de la aparición de una acumulación de electrones con espines opuestos en las dos superficies laterales de un conductor cuando conduce una corriente. En este caso no es necesaria la presencia de un campo magnético externo. Fue descubierto por Mikhail I. Dyakonov y Vladimir I. Perel en 1971<sup>24</sup>. Es un fenómeno de transporte en el que los electrones de conducción cuyo espín tiene la misma orientación, se desplazan lateralmente hacia un costado del conductor, mientras que los electrones que tienen una orientación opuesta, lo hacen hacia el otro lado. Aquí no existe una acumulación de carga eléctrica en los bordes sino de momento angular de sentidos opuestos. En presencia de un campo magnético externo, los electrones tendrían mayormente la misma polarización y por lo tanto existiría acumulación de los mismos solamente en uno de los laterales, y por lo tanto una acumulación excedente de carga eléctrica positiva en el otro lado, como lo confirma el propio efecto Hall. Sin embargo, la justificación del efecto Hall no se basa en la existencia del espín.

Podría estar relacionado con una fuerza magnética opuesta del campo magnético promedio producido por la corriente, sobre las dos posibles orientaciones del momento magnético de los electrones de conducción,  $\mathbf{F} = -\nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B})$ . Electrones en la misma zona, con sus momentos magnéticos opuestos experimentarían fuerzas de sentidos opuestos.

En algunos semiconductores bidimensionales en los que se verifica un efecto Hall cuántico entero, con campos magnéticos no muy intensos, se observa también un efecto de acumulación de espín en los laterales del semiconductor.

## 6.8. Enfriamiento de un gas por láser

Vamos a describir algo que a primera vista puede parecer paradójico. Enfriar un sistema de átomos suministrando energía. El resultado es que el conjunto de átomos, al final, pierde energía.

Cuando un objeto con momento magnético se orienta en un campo magnético externo, hay dos orientaciones estacionarias posibles: una que el momento magnético se oriente en la

<sup>24</sup>M. I. Dyakonov and V. I. Perel, *Possibility of orientating electron spins with current*. Sov. Phys. JETP Lett. **13**, 467 (1971)

dirección del campo magnético y otra en que la orientación es opuesta al campo. La primera es una situación estacionaria de equilibrio estable y la segunda es inestable. Cualquier perturbación la altera y el objeto invierte su momento magnético y pasa a la situación de equilibrio estable, que es un estado de energía potencial menor y por lo tanto liberando energía en esa transición. Para volver a obtener esta segunda situación estacionaria de equilibrio habría que suministrar energía al objeto.

Para entender estos dos estados estacionarios sirva el ejemplo de un lápiz sobre una mesa. Solamente hay dos situaciones estacionarias de equilibrio posibles: Una que el lápiz esté horizontal sobre la mesa y otra que esté perfectamente vertical. La primera es un equilibrio estable mientras que la segunda, de mayor energía potencial, es un equilibrio inestable. Cualquier perturbación le hace caer a la posición estable, liberando su energía potencial. Volver a esta situación estacionaria inestable requiere gastar energía para elevar el centro de masa del lápiz.

En un átomo, en el modelo en el que los electrones están sometidos al campo eléctrico del núcleo y al campo magnético del momento magnético del núcleo, los electrones de las diferentes capas se orientan de ambas formas frente a ese campo magnético, y en capas completas tenemos electrones orientados de las dos formas posibles. Supongamos ahora un átomo con un solo electrón en la última capa, estando las capas interiores completas.

La orientación de este momento magnético del último electrón, será la del campo magnético resultante total que actúa sobre este electrón y que en el estado fundamental del átomo será con el momento magnético paralelo al campo. Si queremos invertir la orientación del momento magnético de este último electrón deberemos suministrar energía al átomo y por lo tanto al electrón. Este proceso de invertir el momento magnético de un electrón en un átomo recibe el nombre de **transición hiperfina**.

La forma de suministrar energía a un átomo es mediante un haz de fotones. Los electrones de las capas intermedias no pueden absorber fotones salvo para cambiar de nivel, a un nivel excitado superior, pero no para cambiar la orientación de su espín, ya que al estar la capa completa se instalaría en un estado ya ocupado, lo cual lo prohíbe el principio de exclusión. La energía para producir una transición entre niveles atómicos es del orden del eV. Para la transición hiperfina es del orden de  $10^{-5}$  eV, en el rango de las microondas<sup>25</sup>. Supongamos que la energía de los fotones del haz es la adecuada para producir la transición hiperfina. Si un fotón del haz es absorbido por el átomo, el electrón de la última capa capturará esa energía y pasará a la situación estacionaria inestable. Sin embargo, al cabo de un tiempo, se desestabilizará pasando a la situación estable emitiendo el correspondiente fotón de la transición hiperfina. Parece que lo que le damos al átomo lo volvemos a recuperar más tarde.

Como los fotones tienen espín 1 y el electrón espín 1/2, la transición se produce cuando el electrón capture a un fotón que tenga su espín en la dirección opuesta a su propio espín, invirtiendo la orientación de éste, y por lo tanto la orientación de su momento magnético. En este proceso se conserva el momento angular y la energía, pasando el electrón a un estado de energía mayor. Pero también se debe conservar el momento lineal, por lo que el momento lineal del fotón absorbido modifica en ese valor el momento lineal total del átomo.

La idea del enfriamiento por láser es utilizar fotones de una energía inferior a la de la transición hiperfina en el sistema de referencia del laboratorio. Si el gas de átomos no está a la temperatura de 0 K, significa que un átomo posee una cierta energía cinética no nula y por lo tanto se está desplazando con una cierta velocidad con respecto al sistema de referencia del laboratorio. Los anteriores fotones no producirían la transición hiperfina en átomos en reposo, pero para los átomos en movimiento, debido al efecto Doppler, resulta que la energía de los fotones del haz es algo mayor si el momento lineal del átomo se dirige hacia el haz, y menor si el desplazamiento del átomo tiene la dirección del haz.

<sup>25</sup>La transición hiperfina del  $^{133}\text{Cs}$  es de una frecuencia  $\nu = 9\,192\,631\,770$  Hz, en el rango de las microondas de longitud de onda  $\lambda = 3.261$  cm, que corresponde a una energía  $h\nu = 3.801 \times 10^{-5}$  eV.

Si el átomo se dirige hacia el haz y su velocidad es la adecuada para que por el efecto Doppler la energía del fotón que captura es suficiente para producir la transición hiperfina, invertirá su momento magnético, pero la componente de la velocidad del centro de masa del átomo en la dirección del haz disminuirá debido a la captura del momento lineal del fotón. Como las otras componentes de la velocidad del átomo no se han modificado el átomo tiene una energía cinética inferior con respecto al laboratorio, que la que tenía antes de la transición. Pero ha pasado a un estado excitado inestable. Al cabo de un rato, ese electrón excitado pasará a su estado estacionario estable, emitiendo el correspondiente fotón de la transición hiperfina. Pero ese fotón es emitido por un átomo que está en movimiento con respecto al laboratorio.

El resultado es que en el proceso de absorción hemos perdido un fotón de energía inferior a la transición hiperfina y hemos recuperado un fotón de energía mayor en el proceso de emisión. La diferencia de energía entre esos dos fotones es la energía cinética que ha perdido el átomo en este proceso. El átomo se ha enfriado.

En el año 1997, Chu, Cohen-Tanoudji y Phillips reciben el premio Nobel de física por el desarrollo de técnicas de enfriamiento de átomos por láser. La idea es retener un gas monoatómico en una cavidad a muy baja temperatura del orden del mK, y someterlo a la acción de láseres dispuestos en tres direcciones perpendiculares, y en ambos sentidos. La energía de los fotones debe ser inferior a la de la transición hiperfina. De esta manera se consigue disminuir cada una de las componentes de la velocidad del centro de masa de cada átomo, por el procedimiento mencionado anteriormente. Al actuar con láseres en sentidos opuestos siempre habrá fotones disponibles y de la energía adecuada para cada átomo, en uno u otro sentido.

A medida que los átomos se enfrían, la velocidad de los átomos disminuye y el resultado del incremento de energía por efecto Doppler es menor, por lo que habría que sintonizar la frecuencia de los láseres, incrementándola progresivamente, para poder alcanzar la energía de transición. Por estos procedimientos se consiguen enfriar gases a temperaturas del  $\mu\text{K}$ .

## 6.9. El espín del protón

Supongamos que de acuerdo con el modelo estándar, el protón es un sistema ligado de tres quarks en un estado de momento angular orbital  $L = 0$ , de cada uno de ellos. Si suponemos que los quarks son partículas de Dirac de espín  $1/2$ , y relación giromagnética  $g = 2$ , podemos aplicarles el mismo modelo clásico que el del electrón que hemos desarrollado en este formalismo.

Existe en la literatura una controversia con respecto al espín del protón. Si sumamos los tres operadores espín de cada quark resulta que experimentalmente esto no produce el momento angular total del protón y es lo que se conoce como la *proton spin crisis*<sup>26</sup>. De acuerdo con este experimento realizado en el CERN, la suma de los espines de los tres quarks no solo no producía el valor esperado del espín del protón sino solamente entre el 4% y el 24% del mismo. Este es considerado como uno de los problemas no resueltos de la física<sup>27</sup>. Se suele argumentar que faltaría incluir en el espín del protón la contribución de los gluones virtuales, pero esta sugerencia tampoco da resultado. Hay que tener presente que el operador espín de Dirac representa al momento angular con respecto al centro de carga, como hemos visto en este formalismo.

Si los quarks se mueven en un estado de momento angular orbital  $L = 0$ , esto significa literalmente que si hacemos el análisis en el centro de masa del protón, cada quark tiene su momento lineal en la dirección del centro de masa común, por lo que el centro de masa de cada quark se mueve a lo largo de una línea recta que pasa por el CM del protón, y por lo tanto, las

<sup>26</sup> Ashman, J.; European Muon Collaboration, Phys. Lett. **B 206**, 364 (1988), *A measurement of the spin asymmetry and determination of the structure function  $g(1)$  in deep inelastic muon-proton scattering.*

<sup>27</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Proton\\_spin\\_crisis](https://en.wikipedia.org/wiki/Proton_spin_crisis)

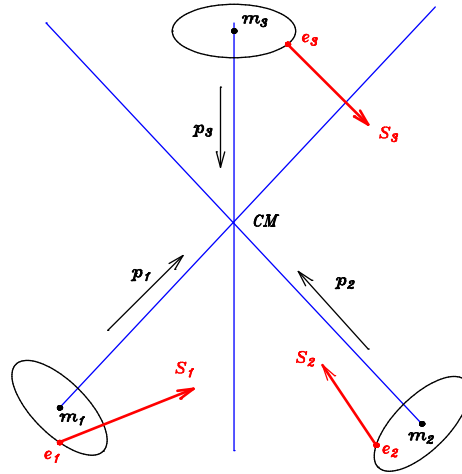


Figura 6.30: Modelo de protón como sistema ligado de tres partículas de Dirac en un estado de momento angular orbital  $L = 0$ , y en el sistema de referencia del CM del protón. El movimiento del CM de cada quark debe ser necesariamente una trayectoria rectilínea pasando por el centro de masa del protón. El operador espín de Dirac de cada quark está definido y dibujado con respecto al correspondiente centro de carga, de tal manera que la suma de los tres operadores de Dirac  $\hbar\sigma/2$  no puede dar lugar al momento angular del protón con respecto a su CM. Hay que sumar los tres momentos angulares de cada quark con respecto a su centro de masa.

tres trayectorias de los tres quarks, puesto que  $\sum \mathbf{p}_i = 0$  en este sistema de referencia, están contenidas en un plano.

Consideremos que el espín del protón es el momento angular de este sistema de tres quarks con respecto al centro de masa común en reposo,  $CM$ . Como vemos en la figura 6.30, los tres operadores espín de Dirac  $\mathbf{S}_i$  de cada quark representan a los momentos angulares de cada quark con respecto al correspondiente centro de carga y no con respecto al centro de masa de cada quark y han sido dibujados en su correspondiente punto. Esto significa que la suma de los tres operadores espín de Dirac no pueden darnos el momento angular total del protón. Necesitamos añadir por cada quark  $i$ , el correspondiente momento angular orbital  $(\mathbf{r}_i - \mathbf{q}_i) \times \mathbf{p}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Si tenemos en cuenta que el momento dipolar eléctrico de una partícula de Dirac es  $\mathbf{d} = e(\mathbf{r} - \mathbf{q})$ , como hemos visto en (6.7), esto nos determina al operador de separación entre el CC y el CM de cada partícula por lo que

$$\mathbf{r} - \mathbf{q} = -\frac{i\hbar}{2mc}\boldsymbol{\alpha},$$

en términos de las matrices  $\boldsymbol{\alpha}$  de Dirac. De aquí resulta que el término que falta para el cálculo del espín del protón es que además de la suma de los tres operadores espín de Dirac, necesitamos la suma de los tres operadores, uno por cada quark,

$$\frac{i\hbar}{2mc}\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p} = \frac{i\hbar}{2mc}\boldsymbol{\alpha} \times \frac{\hbar}{i}\nabla = \frac{\hbar^2}{2mc}\boldsymbol{\alpha} \times \nabla.$$

Estos términos no son despreciables ya que cuando el CM de cada quark alcanza el CM común del protón, la energía potencial es cero y la energía cinética alcanza su valor máximo, el valor medio de cada momento lineal es aproximadamente de 325 MeV/c. Si  $q$  representa el campo espinorial de un quark, el momento angular del protón debe contener al menos los términos:

$$\sum_{i=1}^3 q_i^\dagger \left( \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}_i \right) q_i - \sum_{i=1}^3 q_i^\dagger \left( \frac{\hbar^2}{2mc}\boldsymbol{\alpha}_i \times \nabla_i \right) q_i$$

sin tener en cuenta otras posibilidades como la posible contribución al momento angular del plasma de gluones del protón, que es otra de las posibilidades que se argumentan, pero que no hemos tenido en cuenta aquí.

## 6.10. El grupo cinemático

Supongamos que a la hora de describir la evolución de un sistema material localizable bastara con describir la localización espacial en todo instante de un punto de este sistema material. Como la ecuación diferencial más general de un punto en el espacio tridimensional es de cuarto orden, su solución general involucra hasta 12 constantes de integración independientes. Si esta familia de soluciones corresponde a las posibles descripciones que de la evolución del punto hacen los diferentes observadores inerciales, esto implica que el grupo cinemático de transformaciones espacio-temporales, asociado al principio de relatividad restringido, debe ser un grupo dependiente como máximo, de 12 parámetros. Sin embargo, si lo que estamos describiendo es la evolución del punto en el que localizamos las propiedades interactivas de una partícula elemental, hemos visto en el preámbulo de estas notas que necesariamente ese punto, que lo hemos denominado el centro de carga, se mueve con una velocidad inalcanzable para todos los observadores, la velocidad de la luz. Al establecer la ligadura de que  $|d\mathbf{r}/dt| = c$ , eso hace que solamente 11 parámetros sean esenciales, pues esta ligadura establece una relación entre las 12 constantes de integración. Además, este grupo debe describir un espacio-tiempo en el que la forma de transformar las velocidades sea tal que exista una velocidad inalcanzable para todo observador, que se corresponde con la velocidad de módulo constante del centro de carga.

El grupo de transformaciones espacio-temporales dependiente de 11 parámetros, que establece la relación entre observadores inerciales y que conserva la velocidad de la luz, es el grupo de Weyl, que se compone de las 10 transformaciones funcionalmente independientes del grupo de Poincaré (4 traslaciones+3 rotaciones+3 transformaciones de Lorentz puras o boosts), más las dilataciones espacio-temporales que conservan la velocidad, esto es las transformaciones dependientes de un parámetro adimensional  $\lambda$ ,  $t' = e^\lambda t$ ,  $\mathbf{r}' = e^\lambda \mathbf{r}$ .

### 6.10.1. El espacio cinemático

Para la descripción variacional de un sistema mecánico arbitrario la variedad relevante en la que se desarrolla la evolución es el **espacio cinemático**. Es la variedad que define los puntos inicial y final de la evolución. Si lo que pretendemos es describir una partícula elemental, el principio atómico aquí planteado nos lleva a que esta variedad, el espacio cinemático, debe ser necesariamente un espacio homogéneo del grupo cinemático asociado al principio de relatividad restringido.

Si admitimos como grupo cinemático el grupo de Poincaré,  $\mathcal{P}$ , entonces el espacio cinemático tiene como máximo dimensión 10, pero como tres de estas variables representan la velocidad del centro de carga y este punto se mueve con la velocidad  $c$ , resulta ser un espacio de dimensión 9. Las nueve variables que describen el espacio cinemático de un fermión son tres variables espaciales, la localización del centro de carga, una variable temporal y cinco variables adimensionales compactas. La interpretación geométrica de estas variables compactas es clara. Tres representan la orientación del sistema material y pueden caracterizarse por un sistema cartesiano de ejes ligado al punto y que rota con respecto a una posición inicial. Esta rotación vendría caracterizada por el eje de rotación (dos variables compactas, el ángulo cenital  $\theta \in [0, \pi]$ , y el ángulo acimutal  $\phi \in [0, 2\pi]$ ) y la tercera sería el ángulo rotado  $\alpha \in [0, \pi]$ , que en la versión cuántica se extendería a  $\alpha \in [0, 2\pi]$ , para obtener la realización simplemente conexa del grupo de rotaciones, o sea el grupo  $SU(2)$ . Las dos restantes variables compactas corresponden a la orientación espacial del vector velocidad del punto. Una es el ángulo cenital  $\beta \in [0, \pi]$  y la otra

el ángulo acimutal  $\psi \in [0, 2\pi]$ , del vector velocidad de módulo constante  $c$ .

Si admitimos como grupo cinemático el grupo de Weyl,  $\mathcal{W}$ , entonces tendríamos una nueva variable adimensional  $\lambda$ , no compacta, asociada a la variable adimensional de cambio de escala.

De esta forma, una partícula elemental tiene un espacio cinemático de dimensión 10 y posee 7 grados de libertad, esto es, es un punto  $\mathbf{r}$ , más un sistema cartesiano ligado a él  $\boldsymbol{\alpha}$ , cuya realidad física no es absoluta sino que puede ser escogido de forma arbitraria en cualquier instante, más una variable adimensional no compacta  $\lambda$ , que representa una especie de fase o *gauge* interna. Por lo tanto, el grupo de simetrías de la Lagrangiana libre de la partícula elemental es el grupo de Weyl, juntamente con los grupos que conmutan con él: El de rotaciones locales  $SO(3)_L$  o de su variante cuántica simplemente conexa  $SU(2)_L$ , del sistema cartesiano arbitrario que describe la orientación, y finalmente el  $U(1)$ , de cambio de fase o de gauge  $\{\mathbb{R}, +\}$ . Esto, en el caso cuántico, se reduce a  $\mathcal{W} \otimes SU(2) \otimes U(1)$ .

Los operadores de Casimir de este grupo completo de simetrías son  $S_{CM}^2$ , el momento angular con respecto al centro de masa, que es el único operador de Casimir del grupo  $\mathcal{W}$ ,  $T^2$  que es la parte del momento angular debido a la rotación del sistema cartesiano ligado al punto, como operador de Casimir del grupo de rotaciones locales  $SO(3)_L$ . De hecho, los operadores  $T_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , son las componentes del momento angular de rotación, proyectadas en los ejes del sistema cartesiano local. Finalmente, el generador  $Q$  del grupo  $U(1)$ , que al ser la fase interna adimensional tendría dimensiones de acción y cuyo significado físico está por determinar. Todos estos operadores de Casimir tienen dimensiones de acción.

En teoría de cuerdas se postula que una partícula elemental es un punto de un espacio de dimensión 10, (o de dimensión 11 en la teoría  $M$ ), pero que varias de las variables se han compactificado, quedando solamente como variables no compactas una variable temporal y tres variables espaciales. Con la inclusión de la constante universal  $c$ , las cuatro variables tienen dimensiones de longitud. El significado físico o geométrico de las variables compactas no queda definido, aunque sugieren que son dimensiones espaciales que se han cerrado sobre sí mismas y se han hecho inobservables. Más aún, la variedad que postula la teoría de cuerdas, no queda claro si representa al espacio de configuración de los grados de libertad independientes, ni tampoco si el número de estas variables está restringido y por qué. Si esta variedad se refiere al espacio cinemático de un sistema Lagrangiano, quedaría claro desde el punto de vista geométrico en nuestro formalismo qué tipo de variables son compactas y cuáles no y su significado geométrico.

Pero es que además, la formulación variacional lo que establece es que el espacio cinemático es necesariamente un espacio métrico Finsleriano, con un tensor métrico simétrico que no es definido positivo. La métrica es definida positiva para puntos causalmente conectados, por lo que el postulado variacional contiene a su vez al Principio de Causalidad. La evolución dinámica de cualquier sistema material resulta ser una geodésica que une los puntos inicial y final de la evolución.

### 6.10.2. Grupo de Weyl

El grupo de Weyl es el grupo de Poincaré con una transformación de escala adicional

$$t' = e^\lambda t, \quad \mathbf{r}' = e^\lambda \mathbf{r}, \quad (6.38)$$

además de la acción sobre el espacio-tiempo dada por las ecuaciones (2.247) y (2.248). De esta forma, si  $t$  y  $\mathbf{r}$  son variables cinemáticas de una partícula elemental, sus derivadas transforman bajo esta transformación:

$$\dot{t}' = e^\lambda \dot{t}, \quad \dot{\mathbf{r}}' = e^\lambda \dot{\mathbf{r}},$$

lo que implica que bajo las dilataciones espacio-temporales, la velocidad transforma como

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u},$$

es invariante y por lo tanto se conserva la velocidad de la luz.

Los generadores del álgebra de Lie del grupo en esta realización son

$$H = \partial/\partial t, \quad P_i = \partial/\partial r_i, \quad K_i = ct\partial/\partial r_i + (r_i/c)\partial/\partial t, \quad J_k = \varepsilon_{kli}r_l\partial/\partial r_i, \quad Q = t\partial/\partial t + \mathbf{r} \cdot \nabla$$

Por lo tanto,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{J}$  y  $Q$  son adimensionales y las reglas de conmutación resultan

$$[\mathbf{J}, \mathbf{J}] = -\mathbf{J}, \quad [\mathbf{J}, \mathbf{P}] = -\mathbf{P}, \quad [\mathbf{J}, \mathbf{K}] = -\mathbf{K}, \quad [\mathbf{J}, H] = 0, \quad (6.39)$$

$$[H, \mathbf{P}] = 0, \quad [H, \mathbf{K}] = c\mathbf{P}, \quad [\mathbf{P}, \mathbf{P}] = 0, \quad [\mathbf{K}, \mathbf{K}] = \mathbf{J}, \quad [\mathbf{K}, \mathbf{P}] = -H/c, \quad (6.40)$$

$$[Q, H] = -H, \quad [Q, \mathbf{P}] = -\mathbf{P}, \quad [Q, \mathbf{K}] = 0, \quad [Q, \mathbf{J}] = 0. \quad (6.41)$$

Si, como es habitual, llamamos  $x^0 = ct$ ,  $p^0 = H/c$ ,  $p^i = P_i$ ,  $K_i = J_{0i} = -J_{i0}$  y  $J_k = -\frac{1}{2}\varepsilon_{klr}J_{lr}$ ,  $x_\mu = \eta_{\mu\nu}x^\nu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$  y  $\partial_\nu \equiv \partial/\partial x^\nu$ ,  $\partial_\sigma x_\nu = \eta_{\nu\sigma}$ ,  $\partial_\sigma x^\nu = \delta^\nu_\sigma$ , entonces,

$$Q = x^\mu \partial_\mu, \quad p_\mu = \partial_\mu, \quad J_{\mu\nu} = -J_{\nu\mu} = x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu.$$

En notación covariante las reglas de conmutación aparecen como:

$$\begin{aligned} [Q, p_\nu] &= -p_\nu, & [Q, J_{\mu\nu}] &= 0, \\ [p_\mu, p_\nu] &= 0, \\ [J_{\mu\nu}, p_\sigma] &= -\eta_{\mu\sigma}p_\nu + \eta_{\nu\sigma}p_\mu, \\ [J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] &= -\eta_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}J_{\mu\rho} + \eta_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}J_{\nu\rho}. \end{aligned}$$

El grupo de Poincaré tiene dos operadores de Casimir funcionalmente independientes. Uno se interpreta como el cuadrado de la masa del sistema,

$$C_1 = p^\mu p_\mu = (H/c)^2 - \mathbf{P}^2 = m^2 c^2, \quad (6.42)$$

y el otro es el cuadrado del tetravector de Pauli-Lubanski,  $w^\mu$ , definido mediante

$$w^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} p_\nu J_{\sigma\lambda} \equiv (\mathbf{P} \cdot \mathbf{J}, H\mathbf{J}/c - \mathbf{K} \times \mathbf{P}) \equiv (\mathbf{P} \cdot \mathbf{S}_{CM}, H\mathbf{S}_{CM}/c), \quad (6.43)$$

en términos de los generadores que para la partícula libre serán constantes del movimiento, y el cual es por construcción ortogonal a  $p_\mu$ , es decir,  $w^\mu p_\mu = 0$ .

Se relaciona con el espín con respecto al centro de masa  $\mathbf{S}_{CM}$ , a través de la relación:

$$\mathbf{S}_{CM} = \mathbf{J} - \mathbf{q} \times \mathbf{P}, \quad H\mathbf{S}_{CM}/c = H\mathbf{J}/c - \mathbf{K} \times \mathbf{P}, \quad (6.44)$$

habiendo reescrito  $\mathbf{K} = H\mathbf{q}/c - \mathbf{P}t$ , de manera que su componente temporal  $w^0 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S}_{CM}$ , representará la helicidad de la partícula, y la parte espacial es el vector (6.44). De esta forma, el otro operador de Casimir del grupo de Poincaré es

$$-C_2 = w^\mu w_\mu = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{S}_{CM})^2 - H^2 \mathbf{S}_{CM}^2/c^2 = -m^2 c^2 \mathbf{S}_{CM}^2, \quad (6.45)$$

el cual depende del valor  $\mathbf{S}_{CM}^2$ , el valor absoluto al cuadrado del espín con respecto al centro de masa, y de la masa de la partícula.

Los operadores  $w^\mu$  satisfacen las reglas de conmutación:

$$[w^\mu, w^\nu] = \varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho} w_\sigma p_\rho, \quad (6.46)$$

habiendo tomado el tensor  $\varepsilon^{0123} = +1$ , y

$$[p^\mu, w^\nu] = 0, \quad [J_{\mu\nu}, w_\sigma] = -\eta_{\mu\sigma}w_\nu + \eta_{\nu\sigma}w_\mu. \quad (6.47)$$



El grupo de Weyl solamente posee un operador de Casimir

$$C_W = C_2 C_1^{-1} \equiv C_2 / C_1 = S_{CM}^2, \quad (6.48)$$

lo que implica que  $C_1$  debe ser invertible, por lo que necesariamente el observable masa  $m \neq 0$ . El único operador de Casimir del grupo de Weyl es el momento angular con respecto al centro de masa, independiente de la masa no nula de la partícula, por lo que de admitir este grupo como grupo cinemático la única característica intrínseca de una partícula elemental es el espín. Efectivamente, quarks y leptones son partículas de Dirac es decir objetos masivos y de espín  $1/2$ .

El grupo de Weyl no posee exponentes, de tal manera que las funciones gauge sobre sus espacios homogéneos son nulas. Las Lagrangianas de los sistemas mecánicos cuyos espacios cinemáticos sean espacios homogéneos de  $\mathcal{W}$ , pueden tomarse estrictamente invariantes.

Como la transformación generada por  $Q$  no conmuta con  $p_\mu$ , esta transformación liga estados de partículas de masas diferentes.

### 6.10.3. Transformaciones pasivas y activas

Sea un sistema material cuyas variables cinemáticas  $x_i$  están medidas y referidas a un observador inercial  $O$ . Un cambio de sistema de referencia inercial, hace que las variables cinemáticas del sistema material  $x'_i$  referidas al observador  $O'$  se expresen en términos de las  $x_j$  y de los parámetros del grupo cinemático  $G$

$$x'_i = f_i(x_j, g_\alpha), \quad g : O \rightarrow O', \quad g \in G.$$

Las variables  $x_i$  de un cierto sistema material se han transformado entre observadores inerciales y decimos que hemos hecho una transformación **pasiva** de las variables cinemáticas. Esta denominación es para distinguir esta transformación de las variables de la que se produciría si manteniendo fijo el observador inercial lo que hacemos es actuar sobre el sistema material y producimos una transformación **activa**, con lo que los valores de las variables cinemáticas cambiarán para este observador. Por ejemplo, trasladando, rotando, o deformando el sistema material. Si la transformación activa se corresponde con una transformación del grupo cinemático, la modificación de las variables cinemáticas se expresa de la misma forma que anteriormente, donde en vez de los parámetros  $g_\alpha$  del elemento del grupo  $g$  deberemos utilizar los parámetros de su inverso  $g^{-1}$ . Por ejemplo el rotar un sistema material y expresarlo en el mismo sistema de referencia, las variables que describen al cuerpo rotado se expresarán en términos de las variables primitivas como si hubiéramos rotado en sentido contrario los ejes coordenados, manteniendo inalterado el sistema material.

Al admitir como principio fundamental el Principio de Relatividad Restringido, estamos estableciendo un grupo cinemático en el que las transformaciones que podemos realizar pueden ser interpretadas de las dos formas, activa y pasiva. En cualquiera de estos casos el sistema material no es deformado. Si incluyéramos cambios a un sistema acelerado, desde el punto de vista activo tendríamos que realizar una fuerza sobre el sistema material, lo cual conllevaría necesariamente una deformación del mismo, salvo que éste fuera indeformable, cosa que no podemos admitir en general para los sistemas materiales. Descartamos por lo tanto este tipo de transformaciones, ya que hay asimetría entre la interpretación pasiva y activa. Una no deforma al sistema material y la otra sí. Desde el punto de vista pasivo da lugar a la aparición de un campo gravitatorio extenso, en todo el espacio y que no aparece en el sistema de referencia primero. Este tipo de transformaciones asimétricas en cuanto a su interpretación activa y pasiva, deben quedar fuera del grupo cinemático que define la clase de observadores equivalentes.

Se puede trasladar al sistema material o podemos considerar otro observador inercial con sus ejes trasladados en sentido contrario. Lo mismo para las rotaciones y las transformaciones

inerciales puras con velocidad constante. Desde el punto de vista pasivo admitir la invariancia de las leyes de la física bajo traslaciones temporales es admitir que son inmutables en cualquier instante en que las analicemos. Las leyes de la física son las mismas hoy que en el pasado y también en el futuro. Desde el punto de vista activo, una traslación temporal consiste en esperar el paso del tiempo para hacer el análisis físico. Sin embargo no podemos hacer desde el punto de vista activo una traslación temporal hacia el pasado. No existe simetría entre los tratamientos activo y pasivo para las traslaciones temporales. Solo es posible traslación activa hacia el futuro. Existe una flecha del tiempo. Esto parece implicar un único sentido desde el punto de vista activo, de la acción de este grupo. El generador de este grupo tiene que tener un único signo. La energía o momento temporal se escoge como una magnitud definida positiva. No ocurre lo mismo con las demás magnitudes asociadas a los generadores de los otros grupos, que pueden tomar cualquier signo, como las diferentes componentes del momento lineal o momento angular.

Sucede lo mismo con las transformaciones discretas. Una inversión espacial pasiva es realizable pero no así la activa, que supone deformar el sistema material. Dado un sistema material es posible que su sistema espacialmente inverso sea físicamente irrealizable. Tal transformación no puede formar parte del grupo de simetrías y si el fenómeno físico resulta ser invariante bajo inversiones, esto es una propiedad física que debe comprobarse experimentalmente, pero que no puede exigirse, a priori, como una ley de simetría. Si existe la simetría, puede dar lugar a una ley de conservación que no existiría en el caso de ausencia de la simetría. La interacción débil no es invariante bajo inversión espacial, y por lo tanto no conserva la paridad del sistema material.

Lo mismo podríamos decir de las transformaciones de cambio de escala. La interpretación pasiva no afecta al sistema material, en cambio la transformación activa lo deforma. Como el factor de escala de la partícula elemental se puede tomar como la separación entre el centro de masa y el centro de carga,  $R = \hbar/2mc$ , que se escribe en términos de dos constantes universales  $\hbar$  y  $c$ , y del observable masa, resulta que modificar la escala equivale a deformar la partícula y obtener una partícula elemental de masa diferente. La Lagrangiana de interacción que hemos encontrado en la sección 6.10.3 para dos partículas de Dirac es invariante Poincaré y además invariante bajo cambio de escala espacio-temporal. Esto implica que si describe la interacción entre dos electrones, la misma interacción es posible entre dos objetos de la misma carga y espín, pero de masas diferentes que la del electrón. Al hacer el cambio de escala pasivo estaríamos transformando el electrón en el muón o la partícula tau. El cambio activo se interpretaría retirando los electrones y sustituyéndolos por las otras partículas. Lo mismo en el caso de los diferentes estados másicos de los quarks de idéntica carga.

Este análisis sugiere que desde el punto de vista activo no tenemos un grupo cinemático completo, como el grupo de Poincaré o el grupo de Weyl, sino que por lo que respecta a las traslaciones temporales nos debemos restringir al semigrupo de traslaciones temporales activas hacia el futuro. El generador de estas transformaciones solo puede tener un signo.

#### 6.10.4. Descripción cuántica

Si admitimos que es el grupo de Weyl el grupo cinemático y queremos hacer una descripción cuántica de una partícula elemental, es preciso definir el conjunto completo de observables que conmutan.

Como el operador de Casimir del grupo de Weyl,  $C_W$ , es el cociente de los dos operadores de Casimir del grupo de Poincaré, y éstos conmutan tanto con el operador de Klein-Gordon como con el operador de Dirac, resulta que  $C_W$  también conmuta con ellos. Por lo tanto, una partícula elemental es un sistema de espín 1/2, cuyas funciones de onda satisfacen la ecuación de Klein-Gordon y de Dirac, a los que podemos añadir los operadores  $S_z$  y  $T_z$ , que también conmutan con  $C_W$ . No podemos incluir al operador  $Q$  porque no conmuta con  $H$  y  $P$ .

Podrán existir, por lo tanto, partículas elementales de masas diferentes, pero de la misma carga y el mismo espín  $1/2$ .

# Referencias

Éstas son las principales referencias del autor y colaboradores acerca de este formalismo y que pueden obtenerse a través de la página web <http://tp.lc.ehu.es/martin.htm>. Referencias a otros trabajos aparecen en el texto principal como notas de pie de página.

## Libro

M. Rivas,  
*Kinematical theory of spinning particles,*  
*Classical and quantum mechanical formalism of elementary particles.*  
Fundamental Theories of Physics Series, vol 116, Kluwer, Dordrecht 2001.  
ISBN 0-7923-6824-X

*The spinning electron*  
Capítulo de contribución al libro:  
*What is the electron?*,  
editado por V. Simulik, Apeiron, Montreal 2005.  
ISBN 0-9732911-2-5

## Artículos

M. Rivas,

- *Classical Particle Systems: I. Galilei free particles*, J. Phys. A **18**, 1971 (1985).
- *Classical Relativistic Spinning Particles*, J. Math. Phys. **30**, 318 (1989).
- *Quantization of generalized spinning particles. New derivation of Dirac's equation*, J. Math. Phys. **35**, 3380 (1994).
- *Is there a classical spin contribution to the tunnel effect?*, Phys. Lett. A **248**, 279 (1998).
- *Are the electron spin and magnetic moment parallel or antiparallel vectors?*, ArXiv:physics/0112057.
- *The dynamical equation of the spinning electron*, J. Phys. A, **36**, 4703, (2003), ArXiv:physics/0112005.
- *The spacetime symmetry group of a spin 1/2 elementary particle*, J. Phys. A, **39**, 4291, (2006). ArXiv:hep-th/0511244.
- *A vueltas con el espin*, Rev. Esp. de Física **20**, no.3 (2006) 14.

- *An interaction Lagrangian for two spin 1/2 elementary Dirac particles*  
J. Phys. A, **40**, 2541, (2007). ArXiv:hep-th/0702172.
- *The atomic hypothesis: Physical consequences*  
J. Phys. A, **41** 304022 (2008).
- *On the kinematics of the centre of charge of a spinning particle*  
ArXiv:0807.2512
- *Measuring the internal clock of the electron*  
ArXiv:0809.3635.
- *A lacking term in the proton spin* Contribution to the SPIN-2010 Conference, Julich (Germany) Sept 27-Oct 3, 2010. J. Phys:Conference Series **295** (2011) 012040.
- *Is General Relativity a simplified theory?* J. Phys:Conference Series **437** (2013) 012008. ArXiv:1203.4076
- *Is General Relativity a  $v/c \rightarrow 0$  limit of a Finsler geometry?* (Contribution to the Spanish Relativity Meeting 2012), Progress in Mathematical Relativity, Gravitation and Cosmology Guimaraes, Portugal Sept 3-7, 2012 Springer ISBN 978-3-642-40156-5.
- *The center of mass and center of charge of the electron* J. Phys:Conference Series **615** (2015) 012017  
Una versión previa puede verse en ArXiv:1211.3253

M. Rivas, J.M. Aguirregabiria and A. Hernández,

- *A pure kinematical explanation of the gyromagnetic ratio  $g = 2$  of leptons and charged bosons*, Phys. Lett. **A 257**, 21 (1999).

J.M. Aguirregabiria, M. Rivas and M.A. Valle,

- *Composition law and contractions of the Poincaré group*, Eur. J. Phys.**7**, (1986) 1.

## Conferencias

- *Is General Relativity a restricted theory?*  
Conferencia impartida en el Instituto de Astrofísica de Canarias (Noviembre 2014):  
<http://iactalks.iac.es/talks/view/703>
- *Is General Relativity a restricted theory?*  
Conferencia impartida en el Virtual Institute of Astroparticle Physics (Enero 2015):  
[http://viavca.in2p3.fr/martin\\_rivas.html](http://viavca.in2p3.fr/martin_rivas.html)

## Web didáctica

<http://www.spinningparticles.com>

y un Gedanken experiment que sugiere cómo describir a un electrón

<http://tp.lc.ehu.es/documents/electron.pps>