

A vueltas con el espín

Martín Rivas

By making use of a plausible definition of an elementary particle that gives rise to a kinematical formalism developed by the author, it is shown how the corresponding Lagrangian formalism supplies a classical description of the spin of the elementary spinning particles. A classical model of a spinning electron is introduced and it is compared with the main results obtained by Dirac in his quantum mechanical analysis of the spinning electron.

1. Partículas elementales

De acuerdo con las ideas aceptadas hoy en día, toda la materia conocida estaría construida a partir de estados ligados de quarks y leptones, es decir de los quarks u 'up' y d 'down', electrones e y neutrinos ν , y sus antipartículas. De todos estos objetos, pueden existir hasta un total de otras dos familias más en las que los quark reciben otras denominaciones y los leptones, en vez de electrones, podrían ser muones μ y partículas τ . Lo que se quiere resaltar es el hecho de que estos objetos tienen en general masas distintas pero todos tienen en común que son partículas de espín $1/2$. Si a estos objetos les añadimos los bosones de espín 1 , que son los responsables de las interacciones entre ellos, resulta que el poseer esa propiedad mecánica llamada espín es una de las características más importantes de los objetos elementales que constituyen la materia y de los vehículos que utilizan estas partículas elementales para su comunicación.

Toda la materia que nos rodea se mueve y rota. Las partículas constituyentes no podían ser menos, de ahí que no es de extrañar que las partículas elementales tengan momento angular, que es la expresión mecánica de la medida de su estado interno de rotación. La sorpresa es, quizá, que todas estas partículas tengan exclusivamente el valor no nulo, más bajo posible, que predice la mecánica cuántica.

La idea atomística de Demócrito, de que la materia se puede dividir en porciones cada vez más pequeñas hasta que este proceso tenga un final, puede ser o no cierta. No sabemos si lo que hoy consideramos como una partícula elemental, por ejemplo el electrón, se descubra en un futuro que está a su vez compuesto de otros objetos todavía por descubrir. Pero si finalmente existen esos objetos últimos, indivisibles, que hoy en vez de átomos les denominaríamos partículas elementales, es legítimo tratar de clarificar desde un punto de vista teórico qué es lo que distingue a un objeto elemental de otro que no lo es, es decir, encontrar una definición plausible de partícula elemental.

Una definición por exclusión podría ser que una partícula elemental es un sistema mecánico que no posee estados excitados, es decir, que no es posible modificar su estructura. Podremos aniquilarla, destruirla, pero nunca modificarla. En sentido positivo diríamos que se trata de un sistema mecánico cuyos únicos estados permitidos son solamente modificaciones cinemáticas de uno cualquiera de ellos. Conocido un estado cualquiera de la partícula, el resto de los estados posibles en los que la podemos encontrar son solamente las diferentes descripciones que de ese estado hacen el resto de los observadores inerciales. Esto también quiere decir que, si un cierto observador inercial hace una descrip-

ción del estado en que se encuentra una partícula elemental y debido a alguna influencia externa este estado cambia, siempre es posible encontrar otro observador inercial que, en el nuevo instante, describa la partícula exactamente en el mismo estado que en el instante anterior la describía el otro observador. Cualquier cambio en el valor de alguna de las variables que caracterizan el estado de una partícula elemental puede ser siempre compensado, mediante un cambio de sistema de referencia inercial, para lograr describir al sistema en el mismo estado, es decir con exactamente los mismos valores de todas las variables que definen de forma única el estado del sistema.

Esta forma de definir un objeto elemental puede parecer una trivialidad, pero supone sin embargo una enorme restricción con respecto al tipo de variables clásicas que podemos utilizar para describir sus estados. Para empezar, tenemos que conocer cómo estas variables cambian cuando cambiamos de sistema de referencia. Más aún, dados dos valores posibles de una cualquiera de estas variables, debe existir un cambio de sistema de referencia que nos relacione un valor con el otro, y así para todas las variables básicas que configuren el estado del sistema. Vemos por lo tanto la importancia que juega el Principio de Relatividad no solo a la hora de definir el conjunto de observadores inerciales equivalentes, sino también en la propia definición de partícula elemental, ya que condiciona el tipo de variables clásicas que podemos utilizar. Es ésta la definición de partícula elemental que vamos a adoptar y vamos a intentar hacer una descripción Lagrangiana de aquellos sistemas mecánicos sujetos a esta definición.

Una característica importante del principio de relatividad es que lleva asociado un grupo de transformaciones espacio-temporales. Este grupo es el que nos indica la forma en que los diferentes observadores inerciales relacionan sus medidas respectivas de las tres coordenadas espaciales y una temporal de un mismo acontecimiento espacio-temporal. En la física Newtoniana o no relativista, este grupo es el grupo de Galileo, mientras que la física relativista toma como grupo cinemático de base el grupo de Poincaré, que además de rotaciones y traslaciones, como en el caso del grupo de Galileo, contiene transformaciones de Lorentz puras entre observadores, con velocidad relativa constante. El arranque del formalismo comienza con aceptar uno de estos grupos G como el grupo que deja invariante las ecuaciones dinámicas.

Aceptamos que la dinámica viene regida por un formalismo variacional. Es decir, una vez fijado un cierto observador inercial, éste conoce el estado inicial x_1 de un sistema que va a evolucionar hasta un cierto estado final x_2 , y pretende determinar en todo instante cuáles son los estados

intermedios por los que discurre el sistema. El formalismo variacional lo que postula es que de entre todos los caminos posibles, con los mismos estados inicial y final fijos, el camino que el sistema va a seguir es aquél que hace que una propiedad del sistema llamada acción, sea la menor posible. La acción del sistema depende del camino a seguir y se calcula mediante la integral a lo largo del correspondiente camino de una función llamada Lagrangiana, la cual es función precisamente de las variables clásicas que definen los estados inicial y final y de sus primeras derivadas temporales.

Para cada sistema mecánico se debe postular una Lagrangiana, a partir de la cual el formalismo variacional proporciona las ecuaciones diferenciales, ecuaciones de Euler-Lagrange, que rigen la dinámica de las diferentes variables básicas que definen los estados del sistema. A las variables x que caracterizan los estados por los que va pasando el sistema en su evolución Lagrangiana las vamos a denominar variables cinemáticas y espacio cinemático al espacio X que configuran. La dinámica se suele establecer en términos de evolución temporal, pero es conveniente desde un punto de vista teórico que el parámetro que caracteriza la evolución pueda ser una magnitud τ arbitraria, función monótona del tiempo, que sin pérdida de generalidad se puede escoger adimensional. Pero si el sistema que pretendemos analizar es una partícula elemental, resulta que si en el instante τ el estado del sistema es $x(\tau)$ y cambia al estado $x(\tau + d\tau)$ en el instante $d\tau$ posterior, el cambio se puede compensar mediante un cambio de sistema de referencia inercial, es decir, debe existir una transformación infinitesimal δg del grupo cinemático G que ligue ambos estados, $x(\tau + d\tau) = \delta g x(\tau)$. Mediante esta fórmula queremos expresar que el conjunto de valores que las variables cinemáticas toman en el instante $\tau + d\tau$ se pueden calcular a partir de los valores $x(\tau)$ mediante un cambio de sistema de referencia inercial. En general esta transformación dependerá de cada instante, pero la composición de todas estas transformaciones infinitesimales desde el instante inicial τ_1 hasta el instante final τ_2 nos produce un cierto elemento finito g del grupo tal que $x_2 = g x_1$. El espacio cinemático del sistema no es cualquier variedad. Debe necesariamente transformarse bajo la acción del grupo G de tal manera que, fijados dos puntos cualesquiera del mismo x_1 y x_2 , tiene que existir al menos un elemento de G que los ligue. El espacio cinemático X es, desde el punto de vista matemático, un *espacio homogéneo* del grupo cinemático G .

Siendo consistentes con la definición de partícula elemental y aceptando el principio de relatividad, no podemos caracterizar sus estados cinemáticos más que por puntos de posibles espacios homogéneos del grupo G .

2. Formalismo cinemático

Vemos que la partícula puntual, tanto relativista como no relativista, es una partícula elemental de acuerdo con esta definición. Su estado cinemático viene caracterizado por las variables t, \mathbf{r} , tiempo y posición de un punto. Estas variables generan un espacio de dimensión cuatro que es un espacio homogéneo, tanto del grupo de Galileo como del grupo de Poincaré. Dados unos valores iniciales t_1, \mathbf{r}_1 y finales t_2, \mathbf{r}_2 , arbitrarios, siempre es posible encontrar una transformación de estos grupos, que conecte ambos puntos. Sin embargo

esta variedad no es el espacio homogéneo más general que podemos construir. En el caso no relativista el espacio homogéneo más amplio que podemos encontrar es el propio grupo de Galileo.

Supongamos que nosotros somos el observador inercial del laboratorio y que pretendemos analizar la evolución de una partícula elemental. Supongamos ahora otro observador inercial que se sitúa, hipotéticamente, muy cerca de la partícula elemental y coloca su origen en algún punto característico de la misma y orienta su ejes cartesianos de la forma más conveniente. Cuando la partícula evoluciona, alguna de sus variables cambiará. Supongamos que posee una propiedad direccional, como es el espín, y que ésta cambia. En el instante siguiente deberá existir otro observador inercial que coloque sus ejes coordenados de tal manera que mida el espín de la partícula con las mismas componentes que lo hizo el observador anterior. Para ello sus ejes cartesianos adoptarán una orientación distinta. Midiendo, desde el sistema de referencia del laboratorio, el cambio de orientación de los ejes cartesianos asociados a esos dos observadores inerciales consecutivos, estamos midiendo el cambio de orientación del espín. Si la partícula cambia de posición, midiendo el cambio de posición del origen del sistema de referencia inercial antes mencionado estamos midiendo el desplazamiento espacial de la partícula. Si la partícula cambia su velocidad, los dos observadores inerciales mencionados se moverán de forma distinta con respecto al observador del laboratorio.

Si todos estos observadores inerciales instantáneos y consecutivos, se colocan de tal manera que en cada instante describen a la partícula en el mismo estado, es decir con los mismos valores de todas sus variables básicas, entonces, la descripción que desde el observador del laboratorio se hace de esta colección consecutiva de observadores inerciales adaptados a la partícula, es equivalente a la descripción de la evolución de la propia partícula elemental. Como observadores inerciales del laboratorio solamente deberemos preocuparnos en cómo describir a cualquier otro observador inercial. Las variables que utilicemos en esta descripción son las variables que debemos utilizar, desde el punto de vista clásico, para caracterizar los estados cinemáticos de una partícula elemental.

Las variables que caracterizan a una parametrización del grupo cinemático son precisamente las variables clásicas que, como máximo, podemos utilizar para caracterizar los estados cinemáticos de una partícula elemental. Eso es todo.

Es por esto que proponemos el nombre de *teoría cinemática de partículas elementales* para el presente formalismo, ya que es el propio grupo cinemático, asociado al principio de relatividad, el que suministra desde un punto de vista clásico no solamente las simetrías del sistema y a partir de aquí las distintas leyes de conservación, sino también las variables necesarias para caracterizar los estados de una partícula elemental [1].

En el caso galileano, un observador inercial queda descrito con respecto a otro mediante diez parámetros. Tres representan la posición del origen de su sistema de coordenadas \mathbf{r} en un cierto instante t . Otros tres son las componentes de la velocidad \mathbf{v} de ese punto y finalmente los otros tres $\boldsymbol{\alpha}$, representan la orientación del sistema de referencia cartesiano con origen en dicho punto \mathbf{r} , que se puede caracterizar

por los tres ángulos de Euler o por otros tres parámetros adecuados que describan una parametrización del grupo de rotaciones. Diríamos que un observador inercial, y por lo que llevamos expresado una partícula elemental, quedaría descrita desde el punto de vista clásico por el conocimiento de estas diez variables cinemáticas $x \equiv (t, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha})$, que se interpretan respectivamente como el tiempo, la posición, velocidad y orientación de la partícula. En la descripción variacional, la Lagrangiana es también función de las siguientes derivadas temporales de estas variables, por lo que dependerá de la aceleración y de la velocidad angular.

Es cuando comparamos este sistema más general con la partícula puntual cuando observamos las nuevas variables que aparecen y que van a dar lugar a la descripción del espín. Para una partícula puntual la Lagrangiana solamente depende del tiempo t , posición de un punto \mathbf{r} y su derivada, la velocidad \mathbf{v} . Por consideraciones de invariancia, la Lagrangiana de una partícula puntual libre solamente depende de la velocidad \mathbf{v} . En el caso general, la Lagrangiana de una partícula con espín, depende además de la aceleración y de la velocidad angular. Existirá una parte del momento angular de la partícula ligado con su rotación y otra parte relacionado con los términos de aceleración. Es debido a esta doble naturaleza del origen del espín lo que ha dado lugar a una posible interpretación del concepto de relación giromagnética [2].

Es el formalismo Lagrangiano juntamente con las leyes de conservación que se deducen del teorema de Noether las que nos van a suministrar la estructura de los diferentes observables. Se trata simplemente de postular sistemas dinámicos cuyas variables cinemáticas constituyan un espacio homogéneo del correspondiente grupo cinemático. El resto lo da el propio formalismo variacional. No es objeto de este artículo el hacer una presentación detallada del formalismo, que el lector interesado puede leer en los trabajos publicados, pero sí resaltar los aspectos más salientes del mismo.

3. Algunos detalles técnicos

Entre los aspectos técnicos a resaltar conviene matizar que hay más variables cinemáticas que grados de libertad. En el caso de la partícula puntual tiene cuatro variables cinemáticas t y \mathbf{r} pero solamente tres grados de libertad, \mathbf{r} . En el caso general de la partícula con espín, de las diez variables cinemáticas solamente seis, la posición de un punto \mathbf{r} y la orientación $\boldsymbol{\alpha}$ son los seis grados de libertad independientes del sistema. De alguna manera una partícula elemental viene representada de la forma habitual de caracterizar a un sólido rígido, por un punto y una orientación alrededor de este punto, pero como la Lagrangiana depende también de la aceleración del punto \mathbf{r} , las ecuaciones dinámicas de estas variables serán ecuaciones diferenciales ordinarias de cuarto orden. Como se puede deducir de las ecuaciones de Frenet-Serret de la geometría, la curva más general que describe un punto en el espacio tridimensional, satisface en efecto una ecuación diferencial ordinaria de cuarto orden. Desde el punto de vista intrínseco una curva viene caracterizada por su curvatura y su torsión en cada punto. En un sentido amplio sabemos que las fuerzas externas modifican la curvatura y los momentos de las fuerzas externas cambian la torsión. Si una partícula posee espín y está cargada, posee momento magnético. Los campos externos pueden producir

sobre ella fuerzas y momentos. Su curvatura y torsión cambiarán, por lo que no es de extrañar que una partícula con espín, satisfaga una ecuación diferencial de cuarto orden.

Es conveniente desde el punto de vista teórico, reescribir el formalismo variacional en términos de las variables cinemáticas en vez de los grados de libertad, porque de esta manera la acción se escribe

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(x, \dot{x}) d\tau$$

y la Lagrangiana resulta ser una función homogénea de grado uno de las derivadas \dot{x} de las variables cinemáticas. Aquí el punto representa derivación con respecto al parámetro de evolución τ . Sin entrar en esta demostración, el lector puede comprobar que las Lagrangianas, no relativista y relativista, de la partícula puntual se reescriben como

$$L = \frac{m}{2} \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{i}, \quad L = -mc \sqrt{c^2 t^2 - \dot{\mathbf{r}}^2},$$

que son funciones homogéneas de grado uno en las \dot{x}_i . La ventaja es que nos va a permitir realizar un análisis teórico sin formular ninguna Lagrangiana, pero fijando las variables cinemáticas de las que depende el sistema. Esta homogeneidad nos lleva a que la Lagrangiana satisface

$$L = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i = F_i(x, \dot{x}) \dot{x}_i \quad (1)$$

y donde los momentos $F_i(x, \dot{x})$, son funciones homogéneas de grado cero en las variables \dot{x}_i . Es esta ligadura la que reduce, por ejemplo, de las cuatro variables cinemáticas de la partícula puntual, a tres grados de libertad.

¿Cómo es el formalismo en el caso relativista? Las variables clásicas son exactamente las mismas, $x \equiv (t, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha})$, ya que el grupo de Poincaré se parametriza por los mismos diez parámetros y con la misma interpretación geométrica que el grupo de Galileo. Sin embargo hay una diferencia. Lo que el formalismo nos exige es que las variables x constituyan un espacio homogéneo del grupo. En el caso relativista podemos encontrar hasta tres espacios homogéneos más generales, diferentes, y que, por lo tanto, son susceptibles de describir objetos diferentes con espín. Todos estos espacios están constituidos por las mismas variables $x \equiv (t, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha})$, pero la variable velocidad está sometida a tres posibles restricciones $v < c$, $v = c$ y $v > c$.

El primer espacio con $v < c$ es el propio grupo de Poincaré y describe partículas con espín, que en el caso de bajas velocidades se reducen a las que son descritas en el formalismo no relativista. Los otros dos espacios homogéneos no poseen equivalente en el caso Galileano. Uno representa partículas que se mueven siempre con la velocidad de la luz c y el otro con velocidad siempre mayor que c . De éstos, el verdaderamente interesante, es el de las partículas que se mueven con la velocidad c . Si una partícula se mueve con $v = c$, caben dos posibilidades: una, que se mueva en línea recta a velocidad constante c . Es el caso de los fotones. Otra posibilidad es que su aceleración sea siempre ortogonal a la velocidad. Este modelo va a dar lugar a la descripción clásica del electrón. Es éste el único modelo clásico, de los descritos en este formalismo, que al cuantificarlo satisface la ecuación de Dirac [3].

La condición de homogeneidad anterior (1) permite escribir la posible Lagrangiana relativista del electrón en la forma

$$L = T\dot{t} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{W} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}},$$

donde $T = \partial L / \partial \dot{t}$, $\mathbf{r} = \partial L / \partial \dot{\mathbf{r}}$, $\mathbf{V} = \partial L / \partial \dot{\mathbf{v}}$ y $\mathbf{W} = \partial L / \partial \dot{\boldsymbol{\omega}}$. Es en términos de estas diez magnitudes que podremos expresar los diferentes observables de interés. El teorema de Noether, debido a la invariancia de las ecuaciones dinámicas de la partícula libre bajo el grupo de Poincaré, nos proporciona las siguientes constantes del movimiento, que se expresan como:

$$\text{Energía, } H = -T - \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt}, \quad \text{momento lineal, } \mathbf{P} = \mathbf{R} - \frac{d\mathbf{V}}{dt},$$

$$\text{momento angular, } \mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{v} \times \mathbf{V} + \mathbf{W} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{S},$$

$$\text{momento cinemático, } \mathbf{K} = \frac{H}{c^2} \mathbf{r} - \mathbf{P}t - \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \times \mathbf{v}.$$

Vemos que el espín $\mathbf{S} = \mathbf{v} \times \mathbf{V} + \mathbf{W}$, está ligado con la dependencia de la Lagrangiana de la aceleración y de la velocidad angular. El espín tiene una parte $\mathbf{S}_\omega = \mathbf{W}$ proporcional a la velocidad angular, y otra de tipo orbital $\mathbf{S}_v = \mathbf{v} \times \mathbf{V}$, perpendicular a la velocidad \mathbf{v} del punto \mathbf{r} . Satisface la ecuación dinámica $d\mathbf{S}/dt = \mathbf{P} \times \mathbf{v}$. Como \mathbf{P} y \mathbf{v} no son colineales, solamente es una constante del movimiento para el observador del centro de masa, en que $\mathbf{P} = 0$.

El centro de masa (o centro de energía) del electrón se define como

$$\mathbf{q} = \mathbf{r} - \frac{1}{H} \mathbf{S} \times \mathbf{v}.$$

ya que entonces la derivada temporal del momento \mathbf{K} nos lleva a

$$\mathbf{P} = \frac{H}{c^2} \frac{d\mathbf{q}}{dt}.$$

Un aspecto notable a destacar es que si la partícula posee espín, entonces el punto \mathbf{r} no representa la posición del centro de masa del sistema, sino la posición de la carga. Solamente en el caso de que el espín valga cero ambos puntos $\mathbf{q} = \mathbf{r}$, coinciden. Por lo tanto, el observador inercial del centro de masa, ve moverse a la carga, por lo que desde su punto de vista la partícula posee, con respecto al centro de masa, un momento magnético y un momento dipolar eléctrico. En palabras de Dirac, 'the electron will therefore behave as though it has a magnetic moment and an electric moment' [4]. Resulta extraño, sin embargo, que de estas dos propiedades electromagnéticas del electrón, que son obtenidas por Dirac simultáneamente cuando analiza su movimiento interno y su interacción con un campo externo, reniegue de la estructura dipolar eléctrica y la considere como físicamente inaceptable. Su decisión de no rechazar las soluciones de energía negativa de su ecuación y su posible interpretación como los estados de la antipartícula, ha sido enormemente valiosa para nuestra concepción actual de la física. Sin embargo, en su libro [5] y en la disertación Nobel [6] no vuelve a mencionar la existencia del momento dipolar eléctrico. Este momento dipolar eléctrico no está relacionado con una posible distribución positiva y negativa de carga. La

carga está localizada en un solo punto, pero el centro de carga y el centro de masa son dos puntos distintos.

Para el observador del centro de masa $H = mc^2$, $\mathbf{P} = 0$ y $\mathbf{K} = 0$, que implican $\mathbf{q} = 0$ y $d\mathbf{q}/dt = 0$, es decir que el centro de masa está en reposo en el origen del sistema de referencia, y de la expresión del momento cinemático \mathbf{K} , nos lleva a

$$\mathbf{r} = \frac{1}{mc^2} \mathbf{S} \times \mathbf{v},$$

cuya solución aparece en la figura 1, siendo \mathbf{S} un vector constante para este observador. El punto \mathbf{r} , para el observador del centro de masa, se mueve en círculos a la velocidad c , en un plano perpendicular al espín. El radio de este círculo es $R = S/mc$ y la frecuencia angular vale $\omega = mc^2/S$. El valor del parámetro clásico S no está restringido. Es al cuantificar el sistema cuando queda unívocamente determinado por el valor $S = \hbar/2$. Dado que el punto \mathbf{r} no es el centro de masa o centro de energía de la partícula, no es contradictorio con la relatividad especial el que se mueva con velocidad c . Estas partículas poseen siempre un centro de masa que o bien puede estar en reposo o moverse con velocidades siempre inferiores a c .

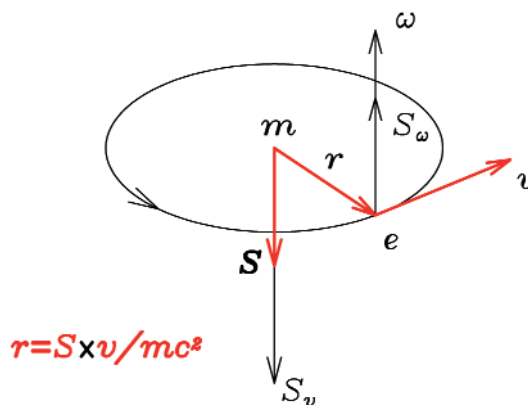


Figura 1. Modelo clásico de electrón con espín. Evolución de la posición de la carga \mathbf{r} para el observador del centro de masa. No se ha dibujado el sistema cartesiano ligado a este punto, que rota con la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Se indican los dos términos que contribuyen al espín total. El espín total \mathbf{S} , una vez cuantificado el modelo, es la mitad de la contribución que proviene del movimiento orbital de la carga \mathbf{S}_v , por lo que al expresar el momento magnético que esta corriente produce, en términos del espín total, obtenemos que la relación giromagnética vale $g = 2$.

Si hacemos la derivada temporal del momento \mathbf{K} y después su producto escalar con \mathbf{v} , se llega a una expresión polinómica de primer grado en H y \mathbf{P}

$$\mathbf{H} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \cdot \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{v} \right),$$

que es la expresión clásica que da lugar a la ecuación de Dirac [3], que puede obtenerse sin necesidad de calcular la raíz cuadrada del operador de Klein-Gordon.

Conviene resaltar que hasta el momento no hemos postulado ninguna Lagrangiana, sino solamente que depende de unas ciertas variables cinemáticas. Cualquier sistema Lagrangiano cuyas variables cinemáticas sean las diez variables aquí indicadas, con $v = c$ y aceleración no nula y ortogonal por lo tanto a la velocidad, cumple lo aquí señalado, y al ser cuantificado satisface la ecuación de Dirac.

4. Estructura del electrón, según Dirac

A la luz de los modelos reseñados en este formalismo, es conveniente releer el análisis que hace Dirac en sus trabajos, del movimiento interno del electrón. Si el punto \mathbf{r} es el vector de posición del cual depende el espinor de Dirac $\psi(t, \mathbf{r})$, entonces, cuando Dirac analiza la velocidad de ese punto obtiene: [5]

1. La velocidad $\mathbf{v} = i/\hbar [H, \mathbf{r}] = c\boldsymbol{\alpha}$, se expresa en términos de las matrices de Dirac $\boldsymbol{\alpha}$, que tienen como valores propios ± 1 , y de la velocidad de la luz c , y escribe:

'... a measurement of a component of the velocity of a free electron is certain to lead to the result $\pm c$. This conclusion is easily seen to hold also when there is a field present.'

2. Uno de los aspectos oscuros del análisis es que el momento lineal del electrón \mathbf{p} no tiene la dirección de la velocidad \mathbf{v} del punto \mathbf{r} , sino que está relacionado con un cierto valor medio de ella: ... *'the x_1 component of the velocity, $c\alpha_1$, consists of two parts, a constant part $c^2 p_1 H^{-1}$, connected with the momentum by the classical relativistic formula, and an oscillatory part, whose frequency is at least $2mc^2/\hbar$, ...'*

Es claro que el punto \mathbf{r} no representa para Dirac la posición del centro de masa del electrón y la frecuencia de su movimiento es precisamente la frecuencia de los movimientos internos de los anteriores modelos de partículas, una vez cuantificados.

3. La posición \mathbf{r} oscila muy rápidamente en una región del orden de la longitud de onda Compton:

'The oscillatory part of x_1 is small, ..., which is of order of magnitude \hbar/mc , ...'

Es este movimiento oscilante de la carga alrededor del centro de masa al que Schrödinger denominó, *zitterbewegung*. Al cuantificar los modelos que presentamos, el radio de ese movimiento es precisamente $\hbar/2mc$, por lo que el punto \mathbf{r} está moviéndose dentro de una región cuyo orden de magnitud es \hbar/mc .

4. En la disertación, con motivo de la entrega del premio Nobel, insiste en esta peculiaridad del electrón de moverse de forma oscilante y a la velocidad de la luz: [6]

'The new variables $\boldsymbol{\alpha}$, which we have to introduce to get a relativistic wave equation linear in H , give rise to the spin of the electron. From the general principles of quantum mechanics one can easily deduce that these variables $\boldsymbol{\alpha}$ give the electron a spin angular momentum of half a quantum and a magnetic moment of one Bohr magneton in the reverse direction to the angular momentum. These results are in agreement with experiment. They were, in fact, first obtained from the experimental evidence provided by spectroscopy and afterwards confirmed by the theory.'

'The variables $\boldsymbol{\alpha}$ also give rise to some rather unexpected phenomena concerning the motion of the electron. These have been fully worked out by Schrödinger. It is found that an electron which seems to us to be moving slowly, must actually have a very high frequency oscillatory motion of small amplitude superposed on the regular motion which appears to us. As a result of this oscillatory motion, the velocity of the electron at any time equals the velocity of light. This is a prediction which

cannot be directly verified by experiment, since the frequency of the oscillatory motion is so high and its amplitude is so small. But one must believe in this consequence of the theory, since other consequences of the theory which are inseparably bound up with this one, such as the law of scattering of light by an electron, are confirmed by experiment.'

El electrón posee pues un *movimiento regular*, el cual puede ser interpretado como el movimiento de su centro de masa y un movimiento oscilatorio del punto \mathbf{r} , a la velocidad de la luz, alrededor del centro de masa. Además, el valor absoluto de la velocidad c no puede ser modificado por la presencia de campos externos. Si se trata de una partícula elemental, la estructura de su movimiento interno no puede ser alterada. Vemos pues que, el que se mueva a la velocidad de la luz, es una de las características invariantes más importantes del movimiento de un electrón.

5. El momento angular de un electrón libre tiene la forma $\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{S} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$, y es una constante del movimiento, pero la parte orbital \mathbf{L} y el espín \mathbf{S} no son, separadamente, constantes del movimiento. El espín \mathbf{S} de un electrón libre satisface la ecuación dinámica:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{p} \times c\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{p} \times \mathbf{v},$$

de tal manera que \mathbf{S} es únicamente constante para el observador del centro de masa, en que $\mathbf{p} = 0$. Es el observable clásico $\mathbf{S} = \mathbf{v} \times \mathbf{V} + \mathbf{W}$, el que hemos identificado, en el caso cuántico, con el operador espín de Dirac.

5. Comentarios finales

Si se utiliza el modelo de electrón con espín aquí planteado, para hacer análisis clásicos de interacciones entre partículas con espín, se descubre que algunos efectos físicos, considerados como exclusivamente cuánticos, pueden no serlo. Nos estamos refiriendo, por ejemplo, al efecto túnel. Una partícula puntual no puede nunca atravesar una barrera de potencial cuya cima sea superior a su energía cinética. En consecuencia, como los electrones pueden atravesar tales barreras, en circunstancias de energías cinéticas inferiores a las mismas, permite afirmar que dicho efecto es puramente cuántico. Sin embargo, el análisis no es del todo correcto. En primer lugar se hace el estudio clásico con una partícula sin espín, pero la experiencia se realiza con partículas con espín. Es necesario realizar el correspondiente análisis con modelos con espín. La sorpresa es que, si el electrón clásico con espín está polarizado perpendicularmente a la dirección del movimiento, para cada barrera existe una energía cinética mínima, por debajo de la cima de la barrera, tal que electrones con al menos esa energía, pueden atravesarla [7].

Este hecho pone de manifiesto que no todo efecto físico que es del orden de \hbar es necesariamente cuántico. Hay que observar que el espín de las partículas empleadas, electrones, fotones, neutrones, etc., es también del orden de \hbar , por lo que en dichos efectos habrá que dilucidar qué parte del resultado puede ser justificada clásicamente, pero utilizando en su análisis la contribución proveniente del espín. Será, por lo tanto, un efecto puramente cuántico, aquella parte del resultado que no pueda quedar justificada clásicamente, pero para ello

habrá que tener en cuenta las posibles contribuciones debidas a los momentos angulares de las partículas involucradas.

Al considerar la interacción entre dos electrones con espín, sus centros de masa se mueven aproximadamente como las trayectorias de dos partículas puntuales cargadas, para interacciones de baja energía, y siempre y cuando no se aproximen por debajo de la longitud de onda Compton. Pero si se aproximan por debajo de esta distancia, es posible, desde el punto de vista clásico, que dos electrones con sus espines paralelos formen un estado ligado de espín 1, metaestable, siempre que su energía cinética relativa no supere un cierto valor. Este estado ligado no es destruido por campos eléctricos externos ni por campos magnéticos dirigidos en la dirección del espín. Solamente campos magnéticos transversales al espín, deshacen el estado ligado. Una fuerza repulsiva entre cargas, produce una fuerza atractiva entre sus centros de masa, cuando se encuentran por debajo de esta distancia, y para algunas posiciones relativas de las cargas [8]. La mecánica clásica no prohíbe la existencia de estados ligados entre dos partículas de la misma carga, cuando estas partículas tienen espín. Es el análisis cuántico de este sistema, el que dilucidará para qué energías y momentos angulares, estos estados ligados pueden ser estacionarios. Este trabajo está todavía por hacer.

Comprender mejor los entresijos de la mecánica cuántica requiere también comprender mejor los detalles de la mecánica clásica, que, por lo que parece, no está del todo muerta.

Pretendía haber titulado este artículo *Volver a empezar*. Este pretendido título no haría referencia a la oscarizada película de José Luis Garci, sino al *Begin the beguine* de Cole Porter de 1930, ya que este 'volver a empezar' sugiere un retorno, una vuelta atrás, un giro, y de giros va el artículo. Como el tema básico del artículo ha sido la introducción a la descripción del espín, de ahí el más inocuo título que al final le ha quedado. La sorpresa, y de ahí el pretendido título del artículo, es que, postulado un grupo de simetrías, por ejemplo el grupo de Poincaré, resulta que las partículas elementales que el formalismo es capaz de describir poseen masa m , espín S , y la carga se mueve con la velocidad c . Esto conduce a que, para las partículas elementales con espín, es posible definir una unidad natural de longitud $R = S / mc$, de tiempo $T = S/mc^2$, que juntamente con la unidad natural de velocidad c , hacen que las diez variables cinemáticas que describen los estados del sistema, se puedan hacer adimen-

sionales. Esto trae consigo que, además de las transformaciones del grupo de Poincaré mencionadas, podemos realizar, entre otros, cambios de escala espacio-temporales. La descripción que se hace de las partículas elementales posee entonces un grupo de simetrías que es más amplio que el grupo de partida que ha sido utilizado en su definición. Por lo tanto, una vez descritas las partículas y encontrado su nuevo grupo de simetrías, habría que, en sentido estricto, volver a empezar.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto de investigación de la Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea 9/UPV00172.310-14456/2002.

Bibliografía

- [1] M.RIVAS, *Kinematical theory of spinning particles*, Fundamental Theories of Physics Series, vol 116, Kluwer, Dordrecht (2001). Una versión abreviada, de un curso impartido recientemente en el JINR, puede obtenerse en arXiv/physics/0509131.
- [2] M. RIVAS, J.M. AGUIRREGABIRIA AND A. HERNÁNDEZ, "A pure kinematical explanation of the gyromagnetic ratio $g = 2$ of leptons and charged bosons", *Phys. Lett. A* **257**, 21 (1999).
- [3] M. RIVAS, "Quantization of generalized spinning particles. New derivation of Dirac's equation", *J. Math. Phys.* **35**, 3380 (1994).
- [4] P.A.M. DIRAC, "The Quantum Theory of the Electron", *Proc. Roy. Soc. Lon.* **A117**, 610 (1928), en particular p. 619.
- [5] P.A.M. DIRAC, "The Principles of Quantum Mechanics", 4th ed. Oxford University Press, Oxford, (1958), section 69.
- [6] P. A. M. DIRAC, "Theory of electrons and positrons", Nobel Lecture, December 12, 1933, from Nobel Lectures, *Physics 1922-1941*, Elsevier Publishing Company, Amsterdam (1965).
- [7] M. RIVAS, "Is there a classical spin contribution to the tunnel effect?", *Phys. Lett. A* **248**, 279 (1998)}
- [8] M. RIVAS, "The dynamical equation of the spinning electron", *J. Phys. A*, **36**, 4703, (2003), y en arXiv/physics/0112005.

Martín Rivas

está en el Dpto. de Física Teórica e Historia de la Ciencia. Universidad del País Vasco