Ekuazio diferentzial arruntak
1.gaia

1.1 Ekuazio diferentzialak

Eda 1. gaia
Oinarrizko kontzeptuak
1.1 Ekuazio diferentzialak
1.2 Soluzio motak
1.3 Soluzioaren existentzia
1.4 Soluzioaren bakartasuna

- Ekuazio arruntetan ez da ezezagunaren deribaturik agertzen:
  - adb. $x^2 + y^2 = 1$
  - Horrelako ekuazio bat finitua dela esaten dugu.
- Ezezagunaren deribatuak agertzen direnean, berriz, ekuazio diferentziala dugu:
  - adb. $x + y'y = 0$
  - $y' = \dfrac{dy}{dx}$ (notazioa!)
  - y menpeko aldagaia, x aldagai independentea
- Aldagai independente bakarra dagoenean, ekuazio diferentzial arrunta dugu:
  - adb. penduluaren ekuazioa $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{l}\sin\theta = 0$
  - $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ (mekanikan oinarritutako notazioa)

Eda 1. gaia
Oinarrizko kontzeptuak
1.1 Ekuazio diferentzialak
1.2 Soluzio motak
1.3 Soluzioaren existentzia
1.4 Soluzioaren bakartasuna

- Ekuazio diferentzialetako sistema bat zer den uler daiteke adibide baten bidez:
  - $$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{k}{r^3}\vec{r}$$
  - Aurreko adierazpenak ekuazio bakarra dela ematen du (Newton-en ekuazioa dugu, hau da, bi gorputzen higidura erlatiboaren deskribapena)
- Egiatan hiru ekuazio ditugu:
  - $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{kx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$
  - $$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{ky}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$
  - $$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{kz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$
  - Ekuazio bat dugu $\vec{r}$ posizio bektorearen osagai bakoitzerako ($\vec{r} \equiv (x, y, z)$)

Eda 1. gaia
Oinarrizko kontzeptuak
1.1 Ekuazio diferentzialak
1.2 Soluzio motak
1.3 Soluzioaren existentzia
1.4 Soluzioaren bakartasuna

- Ekuazioaren ordena bertan agertzen den deribazio-ordenarik altuena da:
  - adb. penduluaren ekuazioa bigarren ordenakoa da
- Ekuazioa lineala den edo ez jakitea garrantzitsua da Fisika aldetik (gainezarmenaren printzipioa).
  - Ekuazio linealek
    $$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)$$
    itxura dute.
- Nolakoa da ondoko sistema?
  $$3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \rho$$
  $$\dot{\rho} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\rho = 0$$
  - Lehen ordenako ekuazio ez lineal eta arrunten sistema (Einstein-en ekuazioak unibertsorako eskala handietan, materia arruntez beteta badago).

1.2 Soluzio motak

- Orokorrean, n ordenatako edozein ekuazioaren adierazpena honelakoa da:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

- Demagun $y = f(x)$ funtzioarako

$$F[x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)] = 0, \ \forall x \in I$$

betetzen dela, orduan:
  - $f(x)$ ekuazioaren soluzio esplizitua da (menpeko aldagaia askatuta agertzen da),
  - I soluzioaren definizio-tartea da,
  - Definizio-tarteak beti dira tarte irekiak.

- Soluzio bat inplizitua bada aldagaia askatu gabe agertzen da.
  - soluzio inplizitua $g(x, y) = 0$ itxurako adierazpena da, non

$$g(x, f(x)) = 0 \ \forall x \in I$$

eta

$$F[x, y, -\frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y}, \dots] = 0$$

betetzen diren.
  - Baina nondik dator $F[x, y, -\frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y}, \dots] = 0$ baldintza hori?

Kontuan izan $g(x, y) = 0$ adierazpenetik
$\partial g/\partial x + (\partial g/\partial y)(\partial y/\partial x) = 0$ lortzen dela,.
Beraz, $f'(x) = \partial y/\partial x$ kontuan hartuz
$f'(x) = -(\partial g/\partial x)/(\partial g/\partial y)$ lortzen da.
Orduan, ekuazioaren definizioa erabiliz

$$F[x, y, y', \dots] = F[x, f(x), f'(x), \dots] =$$

$$F[x, y, -\frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y}, \dots] = 0$$

1.1 ariketa

- Egiaztatu $y = \sqrt{1 - x^2}$ funtzioa $x + yy' = 0$ adierazpenaren soluzio esplizitua dela. Zein da haren definizio tartea?
- Deribatuz

$$y' = -\frac{2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}};$$

eta ordezkatuz

$$x + \sqrt{1 - x^2}\left(\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}\right) = x - x = 0.$$

- Definizio-tartea $(-1, 1)$ da.

1.2 ariketa

- Egiaztatu $x^2 + y^2 = 1$ funtzioa $x + yy' = 0$ ekuazioaren soluzio inplizitua dela (ez askatu y egiaztapena egiteko).
- Hasteko, $g = x^2 + y^2 - 1 = 0$ dugunez, $\partial g/\partial x = 2x$ eta $\partial g/\partial y = 2y$.
Bestalde $F(x, y, y') = x + yy' = 0$,
orduan

$$F(x, y, -(\partial g/\partial x)/(\partial g/\partial y)) =$$

$$x + y(-(\partial g/\partial x)/(\partial g/\partial y)) =$$

$$x + y(-2x)/(2y) = x - x = 0$$

- Soluzio inplizitua formala soilik izan daiteke, adibidez $x^2 + y^2 = -1$ aurreko ekuazioaren soluzio formala izango da soluzio errealak baino ez badira onartzen (1.3 ariketa)

- Soluzio parametrikoak itxura honetakoak dira:

$$(x = f(t), y = g(t))$$

non

$$F[f(t), g(t), \frac{g'(t)}{f'(t)}, \dots] = 0$$

betetzen den.

  - Jakina, katearen erregelaren arabera

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

  - Orokorrean soluzio parametrikoak soluzio esplizituak baino errezago lortzen direnez, sarritan agertzen dira.

1.3 Soluzioaren existentzia

- Badaude soluzio (errealik) gabeko ekuazioak.
  - adb. $1 + (y')^2 = 0$
- Baina, praktikan, ekuazio diferentzialek soluzio ugariak dituzte.
- Soluzio-familia parametrikoak ere ager daitezke.
  - Harien adierazpenean aldagai independentearekiko konstanteak diren parametroak ditugu.
  - Parametroei balio ezberdinak emanez soluzio ezberdinak lortzen dira.
- Soluzio-familiak parametrikoak ez ezik, baita esplizituak, parametrikoak edo inplizituak izan daitezke.

Eda 1. gaia
Oinarrizko kontzeptuak
1.1 Ekuazio diferentzialak
1.2 Soluzio motak
1.3 Soluzioaren existentzia
1.4 Soluzioaren bakartasuna

1.4 ariketa

- Egiaztatu $x = \cos t$, $y = \sin t$ adierazpenek $x + yy' = 0$ ekuazioaren soluzio parametriko bat osatzen dutela.
- Alde batetik $f'(t) = dx/dt = -\sin t$ eta $g'(t) = dy/dt = \cos t$.
  Bestalde,

$$F = x + yy' = f(t) + g(t)\frac{g'(t)}{f'(t)} =$$

$$\cos t + \sin t \left(\frac{\cos t}{-\sin t}\right) = \cos t - \cos t = 0.$$

Eda 1. gaia
Oinarrizko kontzeptuak
1.1 Ekuazio diferentzialak
1.2 Soluzio motak
1.3 Soluzioaren existentzia
1.4 Soluzioaren bakartasuna

1.5 ariketa

- Egiaztatu ondoko adierazpenek $x + yy' = 0$ ekuazioaren soluzio-parametriko bana definitzen dutela:
  a) $y = \sqrt{c^2 - x^2}$, b) $y = -\sqrt{c^2 - x^2}$, c) $x^2 + y^2 = c^2$, d) $x = c\cos t$, $y = c \sin t$.
  - a) kasuan deribatuz $y' = -x/\sqrt{c^2 - x^2}$, eta ordezkatuz $x + yy' = x + \sqrt{c^2 - x^2}(-x/\sqrt{c^2 - x^2}) = x - x = 0$.
  - b) kasurako ekuazioa $y \to -y$ egitean ez denez aldatzen, aurreko kalkulua nahikoa da.
  - c) kasuan $g(x, y) = x^2 + y^2 - c^2$ izango dugunez, $\partial g/\partial x = 2x$ eta $\partial g/\partial y = 2y$ lortuko dugu. Eta hemendik aurrera kalkulu guztiak 1.2 problemakoak bezalakoak izango dira.

Eda 1. gaia
Oinarrizko kontzeptuak
1.1 Ekuazio diferentzialak
1.2 Soluzio motak
1.3 Soluzioaren existentzia
1.4 Soluzioaren bakartasuna

1.5 ariketa

- d) kasuan aurreko ariketan egin dugunaren antzekoa egin ahal dugu.

$$F = x + yy' = f(t) + g(t)\frac{g'(t)}{f'(t)} =$$

$$c\cos t + c\sin t\left(\frac{c\cos t}{-c\sin t}\right) = c\cos t - c\cos t = 0$$

- Definizioz, n ordenako ekuazio diferentzial baten soluzio orokorra n parametro independente dauzkan soluzio-familia da.
  - adb. lehen ordenako ekuazio baten soluzio batek ez badauka parametro askerik argi dago ezin dela soluzio orokorra izan
- Ekuazioa lineala bada soluzio guztiak soluzio orokorrean daude, bestela ez.

1.6 ariketa

- Froga ezazu $y^3 - 3xy = 2C$ ondoko ekuazioaren soluzio orokor inplizitua dela:

$$y + (x - y^2)y' = 0.$$

- Kalkula dezagun y': $(y^3 - 3xy)' = 3y^2y' - 3y - 3xy' = 3[(y^2 - x)y' - y] = 2C' = 0$,
  eta beraz $y' = y/(y^2 - x)$.
  Orduan, ordezkatuz
  $y + (x - y^2)y' = y + (x - y^2)(y/(y^2 - x)) = y - y = 0$.

- Alternatiboki, ekuazioa $F(x, y, y') = 0$ eran eta soluzioa $g(x, y) = 0$ eran jar ditzakegu:
  $F(x, y, y') = y + (x - y^2)y' = 0$ eta
  $g(x, y) = y^3 - 3xy - 2C = 0$ dugu,
  eta $F(x, y, -(\partial g/\partial x)/(\partial g/\partial y)) = 0$ bete behar da.
  Guk $(\partial g/\partial x) = -3y$ eta $(\partial g/\partial y) = 3y^2 - 3x$ dugu
  eta $F(x, y, -(\partial g/\partial x)/(\partial g/\partial y)) =$
  $y + (x - y^2)(3y/(3y^2 - 3x)) = y - y = 0$.

- Soluzio partikularrak: soluzio-familia baten parametroen balioen aukera bakoitzeko lortzen diren soluzioak.
- Soluzio singularrak: soluzio orokor batean ez dauden soluzioak.

1.7 ariketa

- c) kasuan $y = x^2/4$ dugu, eta argi dago ez dagoela soluzio orokorraren barne. Halere, soluzioa da, zeren $y' = x/2$ kontuan hartuz eta orderkatuz $(x/2)^2 - x(x/2) + x^2/4 = x^2/2 - x^2/2 = 0$. Horrek esan nahi du soluzio singularra dela.

1.7 ariketa

- Egiaztatu $y = C(x - C)$ ondoko ekuazioaren soluzio orokorra dela:

$$(y')^2 - xy' + y = 0.$$

Hurrengo soluzioen artean, a) $y = 0$, b) $y = x - 1$, c) $y = x^2/4$, zeintzuk dira partikularrak eta zeintzuk singularrak?

- Soluzio orokorra $y = Cx - C^2$ dela ikus daiteke errez.
  - $y' = (Cx - C^2)' = C$ dugunez $(y')^2 - xy' + y = C^2 - Cx + Cx - C^2 = 0$ ondorioztatzen dugu.
  - a) kasuan $y = 0 = C(x - C)$, $\forall x$ beteko da baldin $C = 0$ bada. Soluzio partikularra da, beraz.
  - b) kasuan $y = x - 1 = C(x - C)$, $\forall x$ beteko da baldin $C = 1$ bada.

1.4 Soluzioaren bakartasuna

- Orokorrean ekuazio diferentzialen soluzio-kopurua infinitua da.
- Baina problema fisikoetan zehaztasun gehiago behar da:
  - baldintza osagarriak ezarri behar zaizkie hautazko konstanteei
- Askotan hori hastapen-baldintzen problema bat formulatuz egiten da:
  - 1. pausoa: aukeratu aldagai independentearen balio bat, $x = x_0$
  - 2. pausoa: menpeko aldagaiak eta $n - 1$ lehen deribatuen $x = x_0$ puntuko balioak eman, $y(x_0), y'(x_0), y''(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$

- Adibidez, ikus dezagun $(y)'^2 - xy' + y = 0$, $y(0) = -1$ hastapen-baldintzen problemak $y = \pm x - 1$ soluzioa onartzen duela.
- Soluzio orokorra $y = Cx - C^2$ dela lehen ikusi dugu, eta $y(0) = -C^2$ dugunez, $C = \pm 1$ behar dugula ondorioztatzen da, eta hori jarriz $y = \pm x - 1$ lortzen dugu.

Eda 1. gaia

Oinarrizko kontzeptuak
1.1 Ekuazio diferentzialak
1.2 Soluzio motak
1.3 Soluzioaren existentzia
1.4 Soluzioaren bakartasuna

1.8 ariketa

- Froga ezazu $(y')^2 - xy' + y = 0$, $y(0) = 0$ problemak bi soluzio onartzen dituela, baina inolako soluzio errealik $y(0) = 1$ bada.
- Lehen ikusi dugu $y = C(x - C)$ eta $y = x^2/4$ soluzio orokor eta singularra direla hurrenez hurren.
  - Soluzio orokorrerako $y(0) = C(0 - C) = -C^2$ dugu, eta $y(0) = 0$ bete dadin, $C = 0$ behar da, beraz $y = 0$ soluzioa dugu alde batetik.
  - Soluzio singularrerako $y(0) = (0)^2/4 = 0$ dugu, eta $y(0) = 0$ zuzenean betetzen da.
- Bukatzeko, azter dezagun $y(0) = 1$ baldintza.
  - $(y')^2 - xy' + y = (y'(0))^2 - 0 \cdot y'(0) + y(0) = (y'(0))^2 - 0 + 1 = 0$ eta ezinezkoa da $y'(0)$ erreala bada.

Eda 1. gaia

Oinarrizko kontzeptuak
1.1 Ekuazio diferentzialak
1.2 Soluzio motak
1.3 Soluzioaren existentzia
1.4 Soluzioaren bakartasuna

- Beraz, hastapen-baldintzak ematea ez da nahikoa existentzia edo bakartasuna bermatzeko.
  - 1.8 ariketan ikusi dugu hastapen-baldintzen problema batek bi soluzio ezberdin onar ditzakela.
  - Ikusi dugu ere, hastapen-baldintzen problema bat soluzio-gabea izan daitekeela.
- Bakartasun eza zergatik agertzen den somatzeko komeni du ekuazioa forma normalean idazteak, hau da, ordena altueneko deribatua askatuta aurkeztea onuragarria da:

$$y' = f(x, y), \; y(x_0) = y_0$$

Eda 1. gaia

Oinarrizko kontzeptuak
1.1 Ekuazio diferentzialak
1.2 Soluzio motak
1.3 Soluzioaren existentzia
1.4 Soluzioaren bakartasuna

- Soluzio bakarra eraikitzen saia gaitezke Taylor-en garapenaz:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} y^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

  - Jakina, seriearen lehenengo koefizientea hasierako datua da: $y(x_0) = y_0$
  - Hurrengo koefizienteak ekuazio diferentziala eta haren deribatuak erabiliz kalkula daitezke:

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

$$y''(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) f(x_0, y_0)$$

$$\vdots$$

  - Prozedura honek existentzia eta bakartasuna berma dezan, garapenaren existentzia eta konbergentzia behar dira.
  - Peano-ren teorema: $f(x, y)$ jarraitua bada existentzia bermatuta dago, baina bakartasuna ez

1.9 ariketa

- Froga ezazu $y = 0$ eta

$$y = \begin{cases} 0, & \textit{baldin}\, x \leq 0\ \textit{bada} \\ \left(\frac{2}{3}x\right)^{3/2}, & \textit{baldin}\, x \geq 0\ \textit{bada} \end{cases}$$

  ondoko problemaren bi soluzio ezberdin direla: $y' = y^{1/3}$, $y(0) = 0$. Zein izan daiteke bakartasun ezaren zergaitia?
- $y = 0$ bada, orduan $y' = 0$ eta $y^{1/3} = 0$, beraz problemaren soluzioa da
- $y = (2x/3)^{3/2}$ bada, orduan $y' = (3/2) \cdot (2/3) \cdot (2x/3)^{1/2} = (2x/3)^{1/2}$ dugu, bestalde, definizioa aplikatuz $y' = y^{1/3} = ((2x/3)^{3/2})^{1/3} = (2x/3)^{1/2}$ eta emaitza bera lortzen da.

- Ez dago bakartasunik gure soluziorako $\partial f(x,y)/\partial y$ ezbaita jarraitua (gogoratu $y' = f(x,y)$).
  Gure kasuan $f(x,y) = y^{1/3}$ denez, orduan $\lim_{y\to 0} \partial f(x,y)/\partial y = \lim_{y\to 0}(y^{-2/3}) = \infty$ eta beraz Taylor-en garapena ezin da egin.

- Mugalde-baldintzen problema oso garrantzitsua da ere.
  - Horrelako problema planteatzeko menpeko aldagaiari eta haren deribatuei balioak eman behar zaizkie aldagai independentearen balio ezberdinetan:

$$y(x_1), y(x_2), y(x_3), \ldots$$

$$y'(x_1), y'(x_2), y'(x_3), \ldots$$

$$y''(x_1), y''(x_2), y''(x_3), \ldots$$

$$\vdots$$

- Orohar askoz zailagoak dira.
- Adb. sistema kuantikoetan energia mailen kuantizazioa mugalde-baldintzen problemen soluzioen ezarekin lotuta dago.

1.10 ariketa

- Dimentsio gabeko aldagai egokiez honela idazten da osziladore harmoniko klasikoa: $y'' + y = 0$. Egiaztatu soluzio orokorra $y = A\cos t + B\sin t$ dela, eta 3. gaian frogatuko dugunez, soluzio guztiak horiek direla erabiliz, ondorioztatu ondoko mugalde-problemetako lehenak soluzio bakarra badu ere, bigarrenak ez duela bat ere ez, eta hirugarrenarenak infinituak direla:
  a) $y(0) = 1, y(\pi/2) = 2$, b) $y(0) = 1, y(\pi) = 2$,
  c) $y(0) = 0, y(\pi) = 0$.
- $y' = -A\sin t + B\cos t$ eta $y'' = -A\cos t - B\sin t$, eta beraz $y'' = -y$ eta soluzio orokorra dela frogatu dugu

- a) kasuan $y(0) = 1 = A\cos 0 + B\sin 0 = A$, eta $y(\pi/2) = 2 = A\cos(\pi/2) + B\sin(\pi/2) = B$ orduan soluzioa $A = 1$, $B = 2$ hautaketak ematen digu, eta bakarra da.
- b) kasuan $y(0) = 1 = A\cos 0 + B\sin 0 = A$, eta $y(\pi) = 2 = A\cos(\pi) + B\sin(\pi) = -A$ orduan alde batetik $A = 1$ behar dugu eta bestetik $A = -2$. Hori ezinezkoa denez ez dago soluziorik.
- c) kasuan $y(0) = 0 = A\cos 0 + B\sin 0 = A$, eta $y(\pi) = 0 = A\cos(\pi) + B\sin(\pi) = -A$ orduan ekuazio biek $A = 0$ eskatzen dute, baina B aske geratzen da, eta infinitu soluzio dago.

Ohar garrantzitsua: gaia hemen bukatzen da eta 1.5. azpiatala ez dugu ikusiko.

Eda 1. gaia

Oinarrizko kontzeptuak
1.1 Ekuazio diferentzialak
1.2 Soluzio motak
1.3 Soluzioaren existentzia
1.4 Soluzioaren bakartasuna