Ekuazio diferentzial arruntak
4. gaia

Ekuazio-sistemak

4.1 Definizioa eta propietate orokorrak, 4.2 Ebazpen-metodoak, 4.3 Lehen ordenako sistema linealak, 4.4 Sistema lineal homogenoak, 4.5 Sistema lineal osoak

4.1 Definizioa eta propietate orokorrak

- Hiru dimentsioko espazioan $\varphi_1(x, y, x) = 0$ eta $\varphi_2(x, y, x) = 0$ ainazalen ebakidurak kurba bat definitzen du.
  - Kontsidera dezagun eremu batean definitutako $\varphi_1(x, y, x, C_1, C_2) = 0 \quad \text{eta} \quad \varphi_2(x, y, x, C_1, C_2) = 0$ bi parametro kurba-familia.
  - Hura kurba-kongruentzia izango da baldin eta soilik baldin eta eremu horretako (x, y, z) puntu bakoitzeko familiaren kurba bat eta soilik bat pasatzen bada.
  - Hori dela eta, beti da posiblea kongruentziaren ekuazioak idaztea honela idaztea:

$$\psi_1(x, y, x) = C_1,$$

$$\psi_2(x, y, x) = C_2.$$

  - Aldagai independentearekiko deribatuz kongruentziaren ekuazio diferentzialak lortzen ditugu:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} y' + \frac{\partial \psi_i}{\partial z} z' = 0, \; i = 1, 2.$$

- Kongruenztzien ekuazioak adierazteko bi forma nagusi dugu:
  - Deribatuak askatuz forma normala lortzen dugu:

$$y' = f_1(x, y, z)$$

$$z' = f_2(x, y, z)$$

  - Diferentzialak bakartuz, berriz, forma kanonikoa lortzen dugu:

$$\frac{dx}{g_1(x, y, z)} = \frac{dy}{g_2(x, y, z)} = \frac{dz}{g_3(x, y, z)}.$$

4.2 ariketa

- Aurkitu

$$x^2 + y^2 + z^2 = A^2$$

$$x + y + z = B$$

zirkunferentzien ekuazio diferentzialak, bai forma normalean, eta bai kanonikoan ere.

- Deribazio hutsez eta sinplifikazioazhauxe lortzen da:

$$x + yy' + zz' = 0,$$

$$1 + y' + z' = 0.$$

Orduan, z' askatuz, eta lenehengoan ordezkatuz hauxe lortzen da:

$$x + yy' + z(-1 - y') = x + (y - z)y' - z = 0.$$

Prozedura berdina jarraituz y'-rekin hauxe lortzen da:

$$x + y(-1 - z') + zz' = x - y - z'(y - z) = 0.$$

- Azken ekuazio horiek ematen digute ekuazioaren forma normala, eta haietatik forma kanonikoa kalkula daiteke. Forma normalak hauxe ematen digu:

$$(y-z)y' = z-x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{z-x}{y-z},$$

$$(y-z)z' = x-y \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{x-y}{y-z}.$$

Beraz, guztira, hauxe da forma kanonikoa:

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y}.$$

- Sistemen kasuan notazio erosoagoa erabiliko dugu:
  - $n+1$ dimentsioko espazioaren koordenatuak

$$(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

  - Kongruentzien ekuazioak:

$$\psi_i(t, x_1, \ldots, x_n) = C_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

  - Forma normala:

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \; i = 1, \ldots, n.$$

  - Forma kanonikoa:

$$\frac{dt}{g_0} = \frac{dx_1}{g_1} = \frac{dx_2}{g_2} = \ldots \frac{dx_n}{g_n}$$

Existentzia eta bakartasunaren teorema

- Frogatuko ez badugu ere existentzia eta bakartasunaren teorema betezen da testuinguru honetan ere.
- Era normalean idatz daitekeen

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \;\; i = 1, \dots, n,$$

sistemako $f_i$eta $\partial f_i / \partial x_j$ funtzioak jarraituak badira, sistema bera eta

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \;\; i = 1, \dots, n,$$

moduko n hastapen-baldintzetako problemak soluzio bakarra du.

4.2 Ebazpen-metodoak

- Sistemak ebazteko metodo orokorrik ez dago.
- Guk bi metodo baino ez dugu aztertuko:
  - Ekuazio batera laburtzea
  - Lehen integralak

Ekuazio batera laburtzea

- Ikusi genuen 3. gaian n ordenako edozein ekuazio, lehen ordenako ekuazioen sistema bihurtzea (menpekoa aldagiaren deribatuak menpeko aldagia berri modura kontsideratuz).
- Aurkakoa posiblea da ere, eta printzipioz deribazioa eta ordezkapena erabiliz lehen ordenako n ekuaziok osuturiko sistema, menpeko aldagai baterako n ordenako ekuazio bakarraren bidez ordezkatzea.

4.3 ariketa

- Ebatzi $\dot{x} = 3x - 2y$, $\dot{y} = 2x - y$ sistema.
- Deribazioz eta ordezkapenez

$$\begin{aligned} &\ddot{x} = 3\dot{x} - 2\dot{y} = 3\dot{x} - 2\dot{(2x - y)} = \\ &3\dot{x} + 2y - 4x = 3\dot{x} + (3x - \dot{x}) - 4x = 2\dot{x} - x \end{aligned}$$

  lortzen dugu.
  Adibidez, polinomio karakteristikoen metodoaz soluzio orokorra errezki aurkitzen da:

$$x = C_1 e^t + C_2 t e^t.$$

4.4 ariketa

- Ebatzi $\dot{x} = y$, $\dot{y} = xy$ sistema.
-
  - Deribazioz eta ordezkapenez hauxe lortzen dugu:
  $$\ddot{x} = \dot{y} = xy = x\dot{x}.$$
  Behin integratuz hauxe ondorioztatzen da:
  $$\dot{x} = \frac{x^2}{2} + C_1.$$
  Gero bananduz eta gero integratuz bilatutako emaitza lortzen da:
  $$\frac{dx}{x^2 + C_1} = 2dt,$$
  $$C_1 > 0, \quad 2t + C_2 = \frac{\arctan}{\sqrt{C_1}} \left(\frac{x}{\sqrt{C_1}} \right),$$
  $$C_1 < 0, \quad 2t + C_2 = \frac{\text{arctanh}}{\sqrt{C_1}} \left(\frac{x}{\sqrt{C_1}} \right),$$
  $$C_1 = 0, \quad 2t + C_2 = -\frac{1}{x}.$$

Ekuazio batera laburtzea

- Demagun $\Phi(t, x_1, \ldots, x_n)$ funtzio batek sistemaren eboluzioan zehar konstante irauten duela, hau, $\dot{\Phi} = 0$.
  - Kasu horretan $\Phi(t, x_1, \ldots, x_n)$ funtzioa sistemaren lehen integrala dela esaten dugu.
  - $\Phi(t, x_1, \ldots, x_n) = C$ ekuazioak C-ren balio bakoitzeko $(t, x_1, \ldots, x_n)$ espazioko gainazal desberdinak sortzen ditu.
- Interesgarriki, praktikan lehen integralak bilatzeko ez da soluziorik topatu behar, eta gainera lehen integralen ezagupenak errezten du problemaren ebazpena.
  - Funtzio bat lehen integrala dela frogatzeko nahikoa da haren t-rekiko deribatua nulua dela frogatzea:
  $$\frac{d\Phi}{dt} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} f_i = 0.$$

- Adibidez, $\dot{x} = y$, $\dot{y} = \dot{x}$ sistemaren kasuan $\Phi = e^{-t}(x + y)$ lehen integrala da, haren deribatua nulua baita:

$$\dot{\Phi} = -e^{-t}(x + y) + e^{-t}(\dot{x} + \dot{y}) =$$

$$-e^{-t}(x + y) + e^{-t}(y + x) = 0.$$

- Hautazko konstante bat sartzearen truke lehen integrala erabili ahal da aldagaietako bat askatzeko, izan ere, lehen integral bakoitzak aldagai bat askatzea baimentzen du:

$$x_i = \Psi(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

- Zenbat eta lehen integral gehiago izan, orduan eta aldagai gehiago askatu ahal izango dugu.
- Lehen aztertutako adibidean, $e^{-t}(x + y) = A$ erabiliz, $y = Ae^t - x$ lortuko genuke, eta azkenean $\dot{x} = Ae^t - x$ ekuazio bakarraz arduratu beharko ginateke.
- Posiblea bada n lehen integral funtzionalki independente aurkitzea, orduan informazio horrek soluzio orokor bat ematen digu, zeren printzipioz x_i guztiak C eta t-ren funtzioan aska daitekeen.
- $\Phi(t, x_1, \ldots, x_n)$ moduko n lehen integralak funtzionalki independenteak izan daitezen hauxe bete behar da:

$$\frac{\partial(\phi_1, \ldots, \phi_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0$$

4.6 ariketa

- Egiaztatu $e^{-t}(x+y)$ eta $e^{t}(x-y)$ integralak independenteak direla. Frogatu ere x^2-y^2 horien menpekoa dela.
- Lehenengo egiaztapenerako kalkula dezagun hau:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\phi_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ e^{-t} & -e^{-t} \end{vmatrix} = -1-1=-2\neq 0$$

- Bigarrenerako nahikoa da ikustea $\phi_3=\phi_1\phi_2$ dugula, beraz, menpekotasun funtzionala dago.

Eda 4. gaia

- Nola aurkitu ahal dira lehen integralak?
  - Orokorrean simetrietaz baliatuz.
  - Normalean, problema fisikoetan simetriak kontserbazio-legeekin lotuta daude.
  - Dena den, fisikarekiko lotura egon edo ez, praktika eta ikuskapenaz baliatu beharko gara.

- Adibidez, kontsidera dezagun ondoko sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - z,\\ \dot{y} &= z - x,\\ \dot{z} &= x - y.\end{aligned}$$

- Ekuazioak gehituz $\dot{x} + \dot{y} + \dot{z} = 0$ lortzen dugu, eta $x + y + z = A$ lehen integrala lortzen dugu berehala.
- Bestalde, ekuazioak x,y, eta z-rekin biderkatuz hurrenez hurren $x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0$ lortzen dugu, eta $x^2 + y^2 + z^2 = A$ lehen integrala lortzen dugu berehala.

- Forma kanonikoak forma simetrikoagoan erakusten dizkigu aldagaiak, eta horregatik batzutan hura da forma komenigarriena lehen integralak aurkitzeko.
- Adibidez, kontsidera dezagun ondoko sistema:

$$\dot{x} = \frac{2tx}{t^2 - x^2 - y^2}, \quad \dot{y} = \frac{2ty}{t^2 - x^2 - y^2}.$$

- Forma kanonikoan honela geratzen da:

$$\frac{dt}{t^2 - x^2 - y^2} = \frac{dx}{2tx} = \frac{dy}{2ty}.$$

- Sinplifikazio hutsez $dx/(2x) = dy/(2y)$ lortzen da eta $y = Ax$ ematen digu integrazioz.

- Beste lehen integrala lortzeko erabil dezagun propietate hau:
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+c}{c+d}.$$
- Sistemaren frakzio bakoitza t,x eta y-rekin biderkartuz, hurrenez hurren, eta gehituz hauxe lortzen dugu:
$$\frac{tdt + xdx + yxy}{t(t^2 + x^2 + y^2)} = \frac{dx}{2tx}.$$
- Sinplifikazioz
$$\frac{tdt + xdx + yxy}{t^2 + x^2 + y^2} = \frac{dx}{2x},$$
lortzen dugu, eta argi dago hor bi diferentzial zehatz dugula, beraz, berehalako integrazioz soluzio orkorra aurkitzen dugu:
$$t^2 + x^2 + y^2 = Bx.$$

4.9 ariketa

- Askatu ondoko sistema:
$$\dot{x} = \frac{y}{x+y}, \quad \dot{y} = \frac{x}{x+y}.$$
- Forma kanonikoan sistema honela geratzen da:
$$\frac{dt}{x+y} = \frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}.$$
Bigarren berdintzatik $xdx = ydy$ lortzen dugu, eta hauxe berehala integratzen da:
$$x^2 - y^2 = A.$$

- Gainera, beste bi erlazio hauek ditugu:

$$dx = \frac{ydt}{x+y},$$

$$dy = \frac{xdt}{x+y}.$$

Horiek gehituz $dx + dy = ((x+y)/(x+y))dt = dt$ lortzen da eta integrazio zuzenez

$$x + y - t = B$$

lortzen dugu azkenean.

- Beraz, gure sistemaren soluzio orokorra ondoko ekuazio finutuen sistema da:

$$x^2 - y^2 = A,$$

$$x + y - t = B.$$

Beste ariketa bat

- Askatu ondoko sistema:

$$\dot{x} = \frac{ty}{y^2 - x^2}, \quad \dot{y} = -\frac{tx}{y^2 - x^2}.$$

- Forma kanonikoan sistema honela geratzen da:

$$\frac{tdt}{y^2 - x^2} = \frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}.$$

Bigarren berdintzatik $xdx = -ydy$ lortzen dugu, eta hauxe berehala integratzen da:

$$x^2 + y^2 = A.$$

- Gainera, beste bi erlazio hauek ditugu:

$$dx = \frac{tydt}{y^2 - x^2},$$

$$dy = -\frac{txdt}{y^2 - x^2}.$$

Horiek gehituz
$dx + dy = ((y - x)/(y^2 - x^2))tdt = tdt/(y + x)$ lortzen da eta integrazio zuzenez

$$(x + y)^2 - t^2 = B$$

lortzen dugu azkenean, eta ekuazio finitu horrek eta lehen aurkitutakoak osotzen duten sistema gure soluzio orokorra dugu.

4.3 Lehen ordenako sistema linealak

- Hemendik aurrera, gaian zehar

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + b_i(t)$$

moduko sistemak aztertuko ditugu, hau da, sistema linealak.
- Noski, a_{ij} eta b_i funtzioak I tarte jakin batean jarraituak izatea eskatuko dugu existentzia eta bakartasuna bermatzeko.

- Notazioa arintzeko ondokoa erabiliko dugu:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Honelaxe $\dot{\vec{x}} = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{b}$ idatzi ahal izango dugu edo $L\vec{x} = \dot{\vec{x}} - \mathbf{A}\vec{x}$ erabiliz beste adierazpen hau: $L\vec{x} = \vec{b}$.
- Jakina, lineartasuna berehala frogatzen da:

$$L(a\vec{x} + a\vec{y}) = aL\vec{x} + bL\vec{y}.$$

4.10 ariketa

- Idatzi ondoko sistema matrize moduan:

$$\dot{x} = y, \, \dot{y} = -x.$$

- Argi eta garbi $\vec{b} = \vec{0}$ eta

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beraz

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

4.4 Sistema lineal homogeneoak

- Hasteko $L\vec{x} = 0$ sistema aztertuko dugu.
  Linealtasunagatik gainezarmenaren printzipioa betetzen da:
  $$L\vec{x}_i = 0 \Rightarrow L\sum c_i\vec{x}_i = \sum c_i L\vec{x}_i.$$
- Ondorioz, sistema lineal homogeneo baten soluzio-multzoa espazio bektoriala dugu.
- Espazio horretako $\vec{x}_i$ bektoreen independentzia lineala betiko moduan definitzen da:

  $x_1, \ldots, x_n$ bektore-sistema linealki menpekoa bada,
  $$\sum_{j=1}^{n} c_j\vec{x}_j = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} x_{ij}c_j = 0 \quad \forall t \in I$$
  sistemak soluzio ez nulua onartzen du. j zutabe bektorearen i errenkada

Eda 4. gaia

- Sistema menpekoa bada, haren determinatea,
  $$W[x_1, \ldots, x_n] \equiv |\vec{x}_1\vec{x}_2\ldots\vec{x}_n| = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix},$$
  haren wronskiarra, alegia, nulua izango da I tarteko puntu guztietan.
- Oro har, emaitza horren alderantzizkoa ez da beteko.
- Halere, $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ bektoreak

  sistema lineal homogeneo ezagun baten soluzioak badira, hots $L\vec{x}_i$=0,
  eta gainera, wronskiarra puntu batean nulua bada, hau da, $W(t_0) = 0$,
  orduan definizio-tarteko puntu guztietan nulua izango dela froga daiteke.
  eta bektoreen menpekotasun lineala ere ondorioztatuko da.

- Existentzia eta bakartasunaren teorema erabiliz soluzio-espazioaren dimentsioa ezin da n baino txikiagoa izan.
- Teorema horri esker ondoko hastapen baldintzei dagozkien n soluzio linealki independente existitzen direla:

$$\vec{x}_1(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{x}_2(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \ldots \quad \vec{x}_n(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Gauza bera esan daiteke

$$W[\vec{x}_1(t_0), \vec{x}_2(t_0), \ldots, \vec{x}_n(t_0)] \neq 0$$

betetzen duten hastapen-baldintzen beste edozein aukerarako.

- Hau guztia dela eta, oinarrizko soluzio-sistemak deitzen diren n soluzio linealki independentez osaturiko multzoak existitzen dira.
- Gainera,$\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ oinarrizko-sistema bakoitza soluzio-espazioaren oinarria da.
- Izan ere, homogeneoaren edozein soluzio $L\vec{x} = 0$, oinarrizko sistemako soluzioen C_j koefiziente konstanteetako konbinazio baten berdina da.
- Dagozkion C_j koefizienteen balioak kalkulatzeko,

$$\vec{x}(t_0) = \sum_{j=1}^{n} C_j \vec{x}_j(t_0) \Leftrightarrow \vec{x}_i(t_0) = \sum_{j=1}^{n} \vec{x}_{ij}(t_0) C_j$$

sistemak t_0 puntuan duen soluzio bakarra (determinanatea nuela ez denez existitzen dena) kalkulatu behar da.

- Ikus daiteke t_0 puntuan aukeratutako hastapen-baldintzei dagokien soluzioaren bakartasunaren ondorioz, soluzioa

$$\vec{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j \vec{x}_j(t) \quad \forall t \in I$$

moduan idatzi ahal izango dela t_0 puntuan aukeratutako koefizieenteekin.

- Beraz, sistema homogeneoaren soluzio orokorra oinarrizko sistema bateko bektoreen hautazko koefiziente konstanteetako konbinazio lineala da:

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} C_j \vec{x}_j.$$

4.11 ariketa

- Egiaztatu

$$\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

$\dot{x} = y,\ \dot{y} = -x$, sistemaren oinarrizko multzoa osatzen duela eta idatzi sistemaren orokorra.

- Izenda ditzagun bektoreak honela:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Orain idaz dezagun sistema matrize-moduan:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Ikus dezagun proposaturiko lehenengo soluzioa benetan soluzioa dela:

$$\dot{\vec{x}}_1 = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin t\\ -\cos t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\vec{x}_1 =$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin t\\ -\cos t\end{pmatrix}.$$

  Argi eta garbi, betetzen da.
- Azter dezagun gauza bera bigarren soluziorako:

$$\dot{\vec{x}}_2 = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\vec{x}_2 =$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}.$$

  Hau ere betetzen da, dudarik gabe.

- Oinarrizko sistema osotzen dutela ikusteko kalkula dezagun haien wronskiarra:

$$W[\vec{x}_1, \vec{x}_2] = \begin{vmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

  Ez nulua denez, soluzio horiek oinarrizko sistema osatzen dutela ondorioztatzen dugu.
- Aurreko guztia kontutan hartuz, ondokoa da soluzio orokorra:

$$\vec{x}(t) = A\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix} + B\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}.$$

Oinarrizko matrizeak

- Oinarrizko sistema baten n bektoreak zutabetzat hartuz oinarrizko matrize bat lortzen dugu:

$$\mathbf{F}(t) = (\vec{x}_1 \vec{x}_2 \ldots \vec{x}_n = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

- Eraikuntzaz, oinarrizko matrizea ez da singularra:

$$\det \mathbf{F}(t) = W|\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n| \neq 0,$$

- Gainera, sistema lineal baten matrize-soluzioa da:

$$L\mathbf{F} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}.$$

4.12 ariketa

- Aurkitu $\dot{x} = y, \ \dot{y} = -x$, sistemaren oinarrizko matrizea.
- 4.11 ariketako emaitza aprobatxatuz argi dago ondoko matrizea oinarrizko matrizea dugula:

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

(Iraila-08) azterketako kuestioa

- Kontsidera ezazu $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}$ matrizea, zer sistemaren oinarrizko matrizea da?
- Sistema linealarekin lotutako $\mathbf{A}$ matrizea $\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{AF}$ definiziora egokituko da, beraz $\mathbf{A} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$.
  Orduan $\mathbf{F}^{-1} = (\text{adj}(\mathbf{F}))^T/(\det \mathbf{F})$ betetzen denez eta $(\det \mathbf{F}) = t^2 + 1 \neq 0$ erabiliz ondokoa ondorioztatzen da:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{t^2+1}\begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}.$$

- Orokorrean 2×2 moduko matrizeetarako zera erabil daiteke:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- Bukatzeko ikus dezagun nola idaz daitekeen edozein soluzio oinarrizko matrizea erabiliz.
- Soluzio orokorra oinarrizko sistemaren soluzioen konbinazio lineala da:

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} C_j \vec{x}_j \Rightarrow \vec{x}_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} C_j = \sum_{j=1}^{n} F_{ij} C_j.$$

- Beraz, guztira

$$\vec{x}(t) = \mathbf{F}(t) \cdot \vec{c},$$

  non

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

4.13 ariketa

- Aurkitu $\dot{x} = y, \ \dot{y} = -x$, sistemaren soluzio orokorra oinarrizko matrize baten bidez.
- 4.12 ariketako emaitza aprobatxatuz argi dago emaitza hauxe dela:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

4.5 Sistema lineal osoak

- Ekuazio lineal osoarekin bezalaxe, sistema homogeneoaren soluzio bat osoaren beste soluzio batekin gehituz sistema osoaren soluzio orokorra lortzen da:

$$L\vec{x}_1 = 0, \ L\vec{x}_2 = b, \ \Rightarrow \ L(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = L\vec{x}_1 + L\vec{x}_2 = \vec{b}.$$

- Eta alderantziz, osoaren bi soluzioen arteko kendura homogeneoaren soluzioa da:

$$L\vec{x}_1 = L\vec{x}_2 = b, \ \Rightarrow \ L(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = L\vec{x}_1 - L\vec{x}_2 = \vec{0}.$$

- Ondorioz, $L\vec{x} = \vec{b}$ sistemar osoaren soluzio orokorra bi soluzio gehituz lortzen da:
  - Dagokion sistema homogeneoaren soluzio orokorra:

$$L\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = \sum_{j=1}^{n} C_j \vec{x}_j$$

  - eta osoaren edozein soluzio partikular $L\vec{x}_p = \vec{b}$.
- Hori dela eta, soluzio orokorra hauxe da:

$$L\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = \sum_{j=1}^{n} C_j \vec{x}_j + \vec{x}_p.$$

Konstanteen aldakuntzaren metodoa

- Hedapen zuzena dago sistemetarako.
- Jo dezagun $\dot{\vec{x}} = \mathbf{A} \cdot \vec{x}$ sistema homogenenoaren soluzio orokorra $\vec{x}(t) = \mathbf{F}(t) \cdot \vec{c}$ dela.
- Orduan, $\dot{\vec{x}} = \mathbf{A} \cdot \vec{x} + \vec{b}$ sistema osoa ebazteko, $\vec{x}(t) = \mathbf{F}(t) \cdot \vec{g}(t)$ moduko soluzio-bektorea saiatzen da, $\vec{g}(t)$ hautazko bektorea izanik.
- Leibniz-en araua erabiliz hauxe dugu:

$$\dot{\vec{x}} = (\mathbf{F} \cdot \vec{g})^{\cdot} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \vec{g} + \mathbf{F} \cdot \dot{\vec{g}} =$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{F} \cdot \vec{g} + \mathbf{F} \cdot \dot{\vec{g}}.$$

- Bestalde hasierako hipotesiagatik $\vec{x}(t) = \mathbf{F} \cdot \vec{g}$ dugunezorduan

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{A} \cdot \vec{x} + \mathbf{F} \cdot \dot{\vec{g}}.$$

- Orduan alde batetik

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{A} \cdot \vec{x} + \mathbf{F} \cdot \dot{\vec{g}},$$

dugu, baina definizioz

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{A} \cdot \vec{x} + \vec{b}.$$

- Beraz, gure ondorioak hauxek dira:

$$\mathbf{F} \cdot \dot{\vec{g}} = \vec{b}, \quad \dot{\vec{g}} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \vec{b}.$$

- Guztira, sistema osoaren soluzioa honelaxe geratzen da:

$$\vec{x} = \mathbf{F}(t) \cdot \vec{c} + \mathbf{F}(t) \cdot \int \mathbf{F}(t)^{-1} \cdot \vec{b}(t) dt.$$

4.16 ariketa

- Ebatzi $\dot{x} = y, \ \dot{y} = -x + 1/\cos t$, sistema.
- Oinarrizko matrizea hauxe da:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

eta haren alderantzizkoa:

$$\mathbf{F}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

- Bestalde

$$\mathbf{F}^{-1} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -\tan t \\ 1 \end{pmatrix},$$

eta orduan

$$\int \mathbf{F}^{-1} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -\ln \cos t + C_1 \\ t + C_2 \end{pmatrix}.$$

- Guztira, soluzio orokorra hauxe da:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t(-\ln\cos t + K_1) + \sin t(t + K_2) \\ -\sin t(-\ln\cos t + K_1) + \cos t(t + K_2) \end{pmatrix}$$