Ekuazio diferentzial arruntak Laplace-ren transformazioa
5. gaia

Laplace-ren transformazioa

5.1 Definizioa, 5.2 Propietateak, 5.3 Alderantzizko transformazioa, 5.6 Koefiziente konstanteetako ekuazio linealak

5.1 Definizioa

- Gai honetan, hastapen-baldintzen problemak ebazteko erabilgarri den kontzeptu berria aurkeztuko dug:

$f(t)$	$\longrightarrow$	$F(s)$
t aldagai errealaren funtzio bat	Laplace-ren transformazioa	s aldagai errealaren funtzio bat

- Horri esker ekuazio lineal baten ebazpena problema algebraikoa bihurtzen da.
- Ikuspegi teorikotik garrantzi handia du: zirkuituen teorian eta mekanika kuantikoan nahiko erabilia da, adibidez.

- Laplace-ren transformazioal f funtzioari ondoko integralaz definituriko $F = \mathcal{L}[f]$ irudia egokiarazten dio:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

5.1 ariketa

- Egiaztatu ondokoa:

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} \quad \text{baldin } s > 0 \text{ bada.}$$

- Definizioa aplikatuz

$$\mathcal{L}[1] \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^{R} e^{-st} dt =$$

$$\lim_{R\to\infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^R = \lim_{R\to\infty} \left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-sR}}{s} \right] = \frac{1}{s}.$$

- Kontuan izan aurreko adierazpena ondo definuta dagoela $s > 0$ baldintza ezarri dugulako.

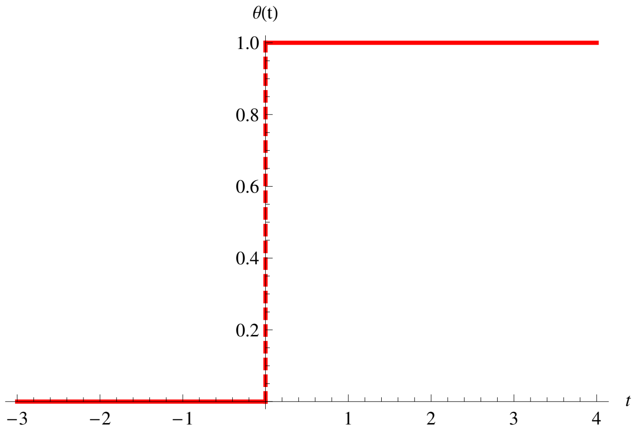
Eda 5. gaia

Ekuazio-sistemak
5.1 Definizioa
5.2 Propietateak
5.3 Alderantzizko transformazioa
5.6 Koefiziente konstanteetako ekuazio linealak

- Laplace-ren transformatuak kalkulatzeko oso erabilgarri gertatuko zaigu Heaviside-ren funtzioa. Funtzio hau $\theta(t)$ modua adierazi ohi da eta ondoko definizioa du:

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- Grafikoki



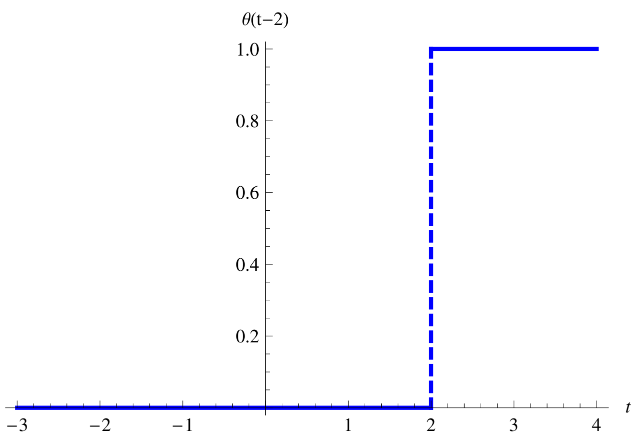
Eda 5. gaia

Ekuazio-sistemak
5.1 Definizioa
5.2 Propietateak
5.3 Alderantzizko transformazioa
5.6 Koefiziente konstanteetako ekuazio linealak

- Gainera, argi eta garbi

$$\theta(t-a) = \begin{cases} 1 & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

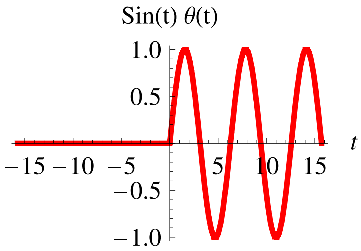
- Adibidez, $\theta(t-2)$ funtzioaren grafikoa hauxe dugu:

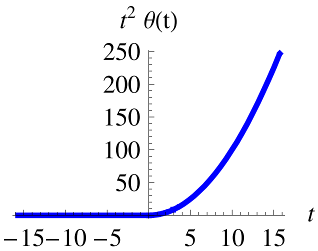


- Kontuan izan $f(t)$ funtzioaren Laplace-ren transformatua kalkulatzeko $t < 0$ puntuetako balioak ez zaigula axolako, beraz, beti joko dugu hauxe betetzen dela:

$$f(t) = \theta(t)f(t).$$

- Heaviside-ren funtzioaren eragina adierazteko hemen dugu bi adibide grafiko:





- Ondorioz, $s > 0$ bada,

$$\mathcal{L}[1] = \mathcal{L}[\theta(t)] = \frac{1}{s}.$$

Eda 5. gaia

Ekuazio-sistemak
5.1 Definizioa
5.2 Propietateak
5.3 Alderantzizko transformazioa
5.6 Koefiziente konstanteetako ekuazio linealak

- Gainera, ondoko propietate biak erabilgarri gertatu ahal zaizkigu:
  - $\theta^2(t-a) = \theta(t-a)$,
  - $\theta(t-a)\theta(t-b) = \theta(t-\max(a,b))$.

$\mathbf{F}(\alpha)$ espazioa

- Laplace-ren transformatuko integral inpropia existitzeko baldintza batzuk bete behar dira.
- f funtzioa α ordena esponentzialeko dela esango dugu, α konstantea eta t_0 eta M konstante positibo ezagun batzuetarako ondokoa betetzen bada:

$$e^{-\alpha t}|f(t)| < M \qquad \forall t > t_0.$$

- Baldintza hura betetzen duen funtzioek osatutako espazioari $\mathbf{F}(\alpha)$ espazioa da.
- Demagun, f funtzioa $(0, a)$ luzera finituko tartean jarraitua dela, orduan

$$\exists \int_0^a e^{-st} f(t) dt$$

edozein a-rako.
- Baina integral impropio horren konbergentzia $a \to \infty$ limitean bermatzeko, orduan f funtzioa ordena esponentzial finitukoa izatea beharrezko baldintza izango dugu.

5.2 ariketa

- Egiaztatu 1, $\sin at$ eta $\cos at$ funtzioak $\mathbf{F}(0)$ espazioan daudela
- $f = 1$ funtziorako

$$|1| \leq M \quad \forall M \geq 1, \quad \forall t > 0$$

$f = \sin at$ funtziorako

$$|\sin at| \leq M \quad \forall M \geq 1, \quad \forall t > 0$$

$f = \cos at$ funtzioarako

$$|\sin at| \leq M \quad \forall M \geq 1, \quad \forall t > 0$$

dugunez $\alpha = 0$ dugu, beraz $\mathbf{F}(0)$ espazioan dago ere.

Eda 5. gaia

Ekuazio-sistemak
5.1 Definizioa
5.2 Propietateak
5.3 Alderantzizko transformazioa
5.6 Koefiziente konstanteetako ekuazio linealak

Beste ariketa bat

- Zer da $e^{\sin t}$ funtzioaren ordena esponentziala?
- $|\sin t| < 1$ dugunez,

$$\frac{1}{e} \leq e^{\sin t} \leq e \quad \forall t > 0,$$

beraz

$$|e^{\sin t}| \leq e \quad \forall t > 0.$$

Hori dela eta, $M = e$ aukeratuz ikusten dugu gure funtzioaren ordena exponentziala 0 dela.

Eta beste bat

- Zer da $e^{(1+\cos t)t}$ funtzioaren ordena esponentziala?
- $(1+\cos t)t < (1+|\cos t|)t < 2t$ bermatuta dagoenez $\forall\, t > 1$ (baita ,$\forall\, t > 0.739$), orduan

$$e^{(1+\cos t)t} \leq e^{2t} \quad \forall t > 1.$$

Hori dela eta, gure funtzioaren ordena exponentziala 2 da.

5.4 ariketa

- Frogatu $f \in \mathbf{F}(\alpha)$ eta $g \in \mathbf{F}(\beta)$ bada, orduan $fg \in \mathbf{F}(\alpha+\beta)$ dela
- f-rako baldintzagatik badira M_1 eta t_1 konstante positiboak zeinetarako

$$|f(t)| \leq M_1 e^{\alpha t} \; \forall t > t_1.$$

g-rako baldintzagatik badira M_2 eta t_2 konstante positiboak zeinetarako

$$|g(t)| \leq M_2 e^{\beta t} \; \forall t > t_2.$$

Orduan argi dago

$$|f(t)g(t)| \leq M_1 M_2 e^{\alpha+\beta t} \; \forall t > max(t_1, t_0)$$

beteko da eta horrek esan nahi du $fg \in \mathbf{F}(\alpha+\beta)$ dugula.

- Ikus daiteke $f(t) \in \mathbf{F}(\alpha)$ betetzen bada, orduan ondokoak beteko direla ere:
  - $F(s)$ transformatua definiturik dago $s > \alpha$ zuzenerdian
  - $sF(s)$ funtzioa bormatua da $s \to \infty$, beraz $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$.
- Adibidez, $1 \in \mathbf{F}(0)$ dugunez, $\mathcal{L}[1]$ transformatua $s > 0$ tartean dago definituta. Gainera, $\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}[1] = 0$
  - Jakina, lehen ikusi dugu

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$$

dela.

- Hemendik aurrera, kontrakoa esplizituki esaten ez bada, $f(t)$ funtzioa $\mathbf{F}(\alpha)$ espazio egokian dagoela joko dugu.

Eda 5. gaia

Ekuazio-sistemak
5.1 Definizioa
5.2 Propietateak
5.3 Alderantzizko transformazioa
5.6 Koefiziente konstanteetako ekuazio linealak

5.5 ariketa

- Frogatu

$$\mathcal{L}\left[e^{at}\right] = \frac{1}{s-a} \quad \text{baldin} \quad s > a \text{ ba da.}$$

- $$\mathcal{L}\left[e^{at}\right] = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^{R} e^{(a-s)t} dt$$

$$\lim_{R\to\infty} \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_0^R =$$

$$\left[\frac{e^{(a-s)R}}{a-s} - \frac{1}{a-s}\right] = \frac{1}{s-a} \quad \forall s > \alpha.$$

Linealtasuna

- Integralaren linealtasunagatik hauxe betetzen da:

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)],$$

  a eta b konstanteak izanik.
- Horrek esan nahi du gure problema diferentziala algebraiko bihurtzean ez dela linealtasuna galduko.

5.6 ariketa

- Erabili linealtasuna eta esponentzialaren transformatua
$$\mathcal{L}[\cosh at] = \frac{s}{s^2 - a^2}, \quad \mathcal{L}[\sinh at] = \frac{a}{s^2 - a^2},$$
$$\text{baldin } s > |a| \text{ bada}$$
frogatzeko, *inolako integralik egin gabe.*
- Alde batetik
$$\cosh at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}, \qquad \sinh at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2},$$
eta bestetik
$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \text{ baldin } s > a,$$
$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s+a} \text{ baldin } s > -a.$$

- Orduan,
$$\mathcal{L}[\cosh at] = \frac{\mathcal{L}[e^{at}]}{2} + \frac{\mathcal{L}[e^{-at}]}{2}$$
$$= \frac{1}{2(s-a)} + \frac{1}{2(s+a)} = \frac{s}{s^2 - a^2} \quad \text{baldin } s > |a|.$$
- Antzeko moduan,
$$\mathcal{L}[\sinh at] = \frac{\mathcal{L}[e^{at}]}{2} - \frac{\mathcal{L}[e^{-at}]}{2}$$
$$= \frac{1}{2(s-a)} - \frac{1}{2(s+a)} = \frac{a}{s^2 - a^2} \quad \text{baldin } s > |a|.$$

Eda 5. gaia

Ekuazio-sistemak
5.1 Definizioa
5.2 Propietateak
5.3 Alderantzizko transformazioa
5.6 Koefiziente konstanteetako ekuazio linealak

Desplazamenduaren teorema

- Laplace-ren transformazioaren definizioa erabiliz, $s > \alpha$ denean $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ bada, orduan

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt =$$

$$\int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt = F(s-a) \quad \text{baldin } s-a > \alpha.$$

- Horrek esan nahi du $f(t)$ eta e^{at} funtzioen biderkaduraren transformatua, $f(t)$ funtzioaren transformatuaren transladatua dela.

- Aurreko ariketetan lortutako emaitzen arabera:

$$\mathcal{L}[e^{at}\cosh bt] = \frac{s-a}{(s-a)^2 - b^2}, \quad \text{baldin } s > |b| + a,$$

$$\mathcal{L}[e^{at}\sinh bt] = \frac{b}{(s-a)^2 - b^2}, \quad \text{baldin } s > |b| + a.$$

- Bukatzeko, teorema honen alderantzizkoa ezartzeko, $f(t)$ $t < 0$ zuzenerdian nuluak delako hipotesia gogoratu behar dugu, eta hori kontuan hartuz, $f(t)$ funtzioaren transladatua $t < a$ puntuetan nulua dela suposatu behar dugu.

Eda 5. gaia

Ekuazio-sistemak
5.1 Definizioa
5.2 Propietateak
5.3 Alderantzizko transformazioa
5.6 Koefiziente konstanteetako ekuazio linealak

5.8 ariketa

- Erabili aldagai-aldaketa bat hauxe frogatzeko: $s > \alpha$ zuzenerdian $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ badugu, eta $\alpha > 0$ bada, orduan
$$\mathcal{L}[\theta(t-a)f(t-a)] = e^{-as}F(s), \text{ baldin } s > \alpha.$$

- Aplika dezagun definizioa:
$$\mathcal{L}[\theta(t-a)f(t-a)] = \int_0^\infty e^{-st}\theta(t-a)f(t-a)dt =$$
$$\int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt.$$
Orain $\tau = t - a$ eginez
$$\mathcal{L}[\theta(t-a)f(t-a)] = \int_0^\infty e^{-s(\tau+a)}f(\tau)d\tau =$$
$$e^{-sa}\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)d\tau = e^{-sa}F(s), \text{ baldin } s > \alpha.$$

5.9 ariketa

- Egiaztatu, integralik egin gabe, $a > 0$ denean honako hau betetzen dela:
$$\mathcal{L}[\theta(t-a)] = \frac{e^{-as}}{s}, \text{ baldin } s > 0.$$

- Badakigu $f(t) = 1$ funtzioaren transformatua existitzen dela baldin $s > 0$ bada, hain zuzen ere,
$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} \text{ baldin } s > 0.$$
Orduan, 2.9 ariketako emaitza erabiliz
$$\mathcal{L}[\theta(t-a)] = e^{-sa}/s, \text{ baldin } s > 0,$$
izango dugu.
Baina, aurreko emaitza onargarria izateko $a > 0$ beharrezkoa da, zeren $a < 0$ badugu orduan
$$\lim_{s\to\infty} e^{-sa}/s \neq 0.$$

Eda 5. gaia

Ekuazio-sistemak
5.1 Definizioa
5.2 Propietateak
5.3 Alderantzizko transformazioa
5.6 Koefiziente konstanteetako ekuazio linealak

Eskala-aldaketa
5.10 ariketa

- Eman dezagun $a > 0$ dela eta $s > \alpha$ denean $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ dugula. Froga ezazu

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \text{ baldin } s > \alpha a.$$

- Definizioa aplikatuz

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^\infty e^{-st} f(at) dt.$$

Orain, $\tau = at$ aldagai-aldaketa eginez:

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}\tau} f(\tau) d\tau = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right),$$

baldin $s > \alpha a$.

Deribatuak eta berretura-biderkatzaileak

- Eman dezagun $f, f', \ldots, f^{(n)} \in F(\alpha)$ eta $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ dela $s > \alpha$ guztietarako.
- Kalkula dezagun $f^{(n)}$ deribatuaren transformazioa zatikako integrazioaren bidez, $[0, \infty)$ tartean jarraitua dela suposatuz:

$$\int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt = e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

- Kontuan izanik $f(t)$ funtzioaren ordena esponentziala α dela, orduan $\lim_{s\to\infty} e^{-st} f(t) = 0$ beteko da $s > \alpha$ guztietarako.
- Beraz

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0), \text{ baldin } s > \alpha.$$

Eda 5. gaia

Ekuazio-sistemak
5.1 Definizioa
5.2 Propietateak
5.3 Alderantzizko transformazioa
5.6 Koefiziente konstanteetako ekuazio linealak

- Indukzio osoa erabiliz ondoko zerrenda idaz dezakegu $s > \alpha$ zuzenerdirako:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0).$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}[f^n(t)] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) -$$
$$s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{n-2}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

- Aurreko adierazpenetan $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ eta abar eskuin-limite modura existitzen direla joko dugu.

5.11 ariketa

- Erabili $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$ propietatea e^{at} funtzioaren transformatua zuzenean lortzeko.
- Emaitza hura gure kasurako egokituz

$$\mathcal{L}[ae^{at}] = \mathcal{L}[\frac{d}{dt}(e^{at})] = s\mathcal{L}[e^{at}] - e^{at}|_{a=0} = s\mathcal{L}[e^{at}] - 1.$$

Baina, bestalde,

$$\mathcal{L}[ae^{at}] = a\mathcal{L}[e^{at}].$$

Orduan,

$$a\mathcal{L}[e^{at}] = s\mathcal{L}[e^{at}] - 1,$$

eta beraz

$$\left(\mathcal{L}[e^{at}](a-s)\right) = -1, \qquad \mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \text{ baldin } s > a.$$

Eda 5. gaia
Ekuazio-sistemak
5.1 Definizioa
5.2 Propietateak
5.3 Alderantzizko transformazioa
5.6 Koefiziente konstanteetako ekuazio linealak

5.12 ariketa

- Erabili transformatuaren definizioa, eta gero indukzioa hauxe frogatzeko:

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -F'(s) \quad \text{baldin } s > \alpha,$$

$$\mathcal{L}[t^{(n)}f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s) \quad \text{baldin } s > \alpha$$

- Kontuan izanik

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

dugula, integralaren barruan deribatuz

$$F'(s) = -1 \int_0^\infty e^{-st} tf(t)dt$$

lortzen dugu.

- Behin eta berriro deribatuz

$$F''(s) = (-1)^2 \int_0^\infty e^{-st} t^2 f(t)dt,$$

$$F'''(s) = (-1)^3 \int_0^\infty e^{-st} t^3 f(t)dt,$$

$$\vdots$$

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n \int_0^\infty e^{-st} t^n f(t)dt.$$

Argi dago gure ondorioa hauxe dela:

$$\mathcal{L}[t^{(n)}f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s) \quad \text{baldin } s > \alpha.$$

Eda 5. gaia

Ekuazio-sistemak
5.1 Definizioa
5.2 Propietateak
5.3 Alderantzizko transformazioa
5.6 Koefiziente konstanteetako ekuazio linealak

5.13 ariketa

- Frogatu, integralik ebatzi gabe:

$$\mathcal{L}[t^{(n)}] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{baldin } s > 0,$$

$$\mathcal{L}[t^{(n)}e^{at}] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad \text{baldin } s > \alpha$$

- Kontuan izanik

$$\mathcal{L}[t^{(n)}f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s) \quad \text{baldin } s > \alpha,$$

eta gure kasuan $f(t) = 1$, eta $\mathcal{L}[f(t)] = 1/s$ dugula, orduan

$$\mathcal{L}[t^{(n)}] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{baldin } s > 0.$$

- Azter dezagun orain bigarren kasua.
  Egin dezagun $\mathcal{L}[t^{(n)}] = F(s)$ izendapena.
  Desplazamenduaren teoremagatik

$$\mathcal{L}[t^{(n)}e^{at}] = F(s-a)$$

izango dugu.
Beraz, nahikoa da lehen lortutako emaitzan $s \to s - a$ aldaketa egitea:

$$\mathcal{L}[t^{(n)}e^{at}] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

Eda 5. gaia

Ekuazio-sistemak
5.1 Definizioa
5.2 Propietateak
5.3 Alderantzizko transformazioa
5.6 Koefiziente konstanteetako ekuazio linealak

- Egiatan,
$$\mathcal{L}\left[\theta(t)f(t)\right] = \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$
betetzen denez, orokortasunagatik komeni du aurreko lau propietateak beste modu honetara adieraztea:
$$\mathcal{L}[\theta(t)tf(t)] = -F'(s) \quad \text{baldin } s > \alpha,$$
$$\mathcal{L}[\theta(t)t^{(n)}f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s) \quad \text{baldin } s > \alpha$$
$$\mathcal{L}[\theta(t)t^{(n)}] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{baldin } s > 0,$$
$$\mathcal{L}[\theta(t)t^{(n)}e^{at}] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad \text{baldin } s > \alpha.$$

5.3 Alderantzizko transformazioa

- Alderantzizko transformatua kalkulatzeko formula orokor bat badago ere, guk ikuskapenaz egingo dugu lan hori gehien bat.
- Notazio aldetik ondoko moduan adieraziko dugu alderantzizko transformatua:
$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t).$$
- Baita ere haren linealtasunaz baliatuko gara:
$$\mathcal{L}^{-1}[aF(s) + bG(s)] = a\mathcal{L}^{-1}[F(s)] + b\mathcal{L}^{-1}[G(s)].$$

Eda 5. gaia

Ekuazio-sistemak
5.1 Definizioa
5.2 Propietateak
5.3 Alderantzizko transformazioa
5.6 Koefiziente konstanteetako ekuazio linealak

- Adibide modura kontsidera dezagun

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}.$$

Frakzio sinpleetan deskonposatuz

$$\frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}.$$

Orduan, taulak eta desplazamenduaren teorema erabiliz hauxe ondorioztatzen dugu alde batetik:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = \theta(t), \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] = \theta(t)e^{-t}.$$

Eda 5. gaia

Ekuazio-sistemak
5.1 Definizioa
5.2 Propietateak
5.3 Alderantzizko transformazioa
5.6 Koefiziente konstanteetako ekuazio linealak

Beste aldetik

$$\mathcal{L}^{-1}\left[-\left(\frac{1}{s+1}\right)^2\right] = -\theta(t)te^{-t}.$$

Orduan, guztira,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)^2}\right] = \theta(t)\left(1-(1+t)e^{-t}\right).$$

5.15 ariketa

- Aurkitu hurrengo funtzioen alderantzizko transformatuak:

$$F(s) = \frac{s}{s^3 - s^2 - s + 1}$$

$$F(s) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

- Egin dezagun lehenengo kasua.

Hasteko, honelako deskonposaketa dugu.

$$\frac{s}{s^3 - s^2 - s + 1} = \frac{1}{2(s-1)^2} + \frac{1}{4(s-1)} - \frac{1}{4(s+1)}$$

Bestalde, lehendik hauxe dakigu:

$$\mathcal{L}[e^{at}t^n] = \mathcal{L}[\theta(t)e^{at}t^n] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

Orduan

$$\frac{1}{(s-1)^2} = \mathcal{L}[\theta(t)e^t t], \quad \frac{1}{(s-1)} = \mathcal{L}[\theta(t)e^t],$$

$$\frac{1}{(s+1)} = \mathcal{L}[e^{-t}].$$

Beraz, guztira,

$$F(s) = \frac{1}{2(s-1)^2} + \frac{1}{4(s-1)} - \frac{1}{4(s+1)} =$$

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}[\theta(t)e^t t] + \frac{1}{4}\mathcal{L}[\theta(t)e^t] - \frac{1}{4}\mathcal{L}[\theta(t)e^{-t}],$$

Eta azkenik

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{4}\theta(t)(e^t(2t+1) - e^{-t}).$$

Eda 5. gaia

Ekuazio-sistemak
5.1 Definizioa
5.2 Propietateak
5.3 Alderantzizko transformazioa
5.6 Koefiziente konstanteetako ekuazio linealak

- Bigarren kasua errezagoa da (baina kontuz, ez da zehazki liburuan agertzen dena):

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\frac{d}{ds}(-\frac{1}{s^2+1})] =$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{d}{ds}\mathcal{L}[-\sin t]] = t\sin t.$$

5.6 Koefiziente konstanteetako ekuazio linealak

- Laplace-ren transformatuen propietatei esker, deribatuak biderkadurak bihur daitezke.
- Hori dela eta, koefiziente konstanteetako ekuazio bakar baten edo ekuazio-sistema baten hastapen-baldintzetako problema bat hurrengo metodoa gertatzen da erabilgarri:
  1. Kalkulatu problema diferentzialaren Laplace-ren transformatua.
  2. Askatu horrela lortutatko problema algebraikoa.
  3. Aurkitu emaitzaren alderantzizko transformatua.
- Bereziki, gai ez homogeneoetan zatika definitutako funtzioak agertzen direnean oso erabilgarria da Laplace-ren transformatua.

5.23 ariketa

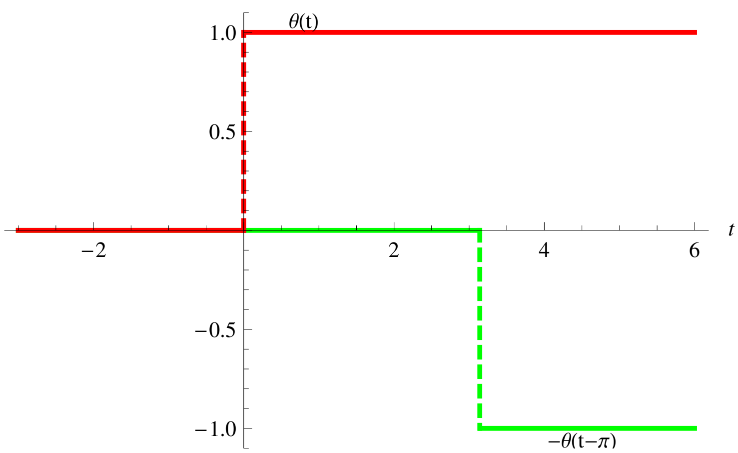
- Biz

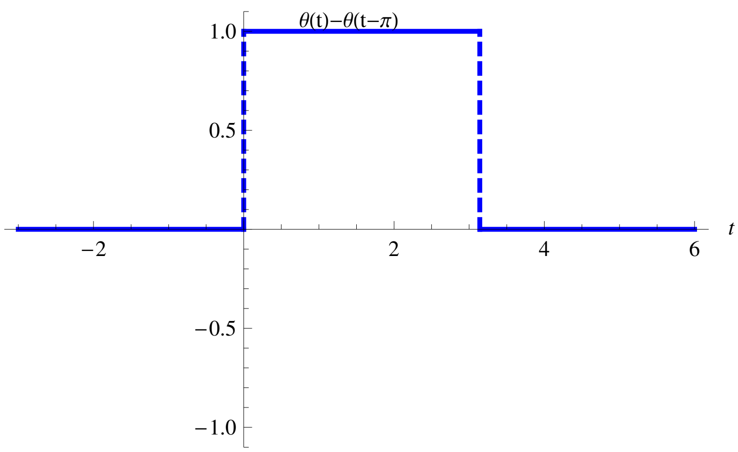
$$\ddot{x} + x = \begin{cases} 1, & \text{baldin } 0 < t < \pi, \\ 0, & \text{baldin } t > \pi, \end{cases} \qquad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

Frogatu gai inhomogeneoa $\theta(t) - \theta(t - \pi)$ dela eta ebatzi problema. Jarraitua al da soluzioa?

- Ikus dezagun grafikoki ondoko erlazioa:

$$\theta(t) - \theta(t - \pi) = \begin{cases} 1, & \text{baldin } 0 < t < \pi, \\ 0, & \text{baldin } t > \pi. \end{cases}$$





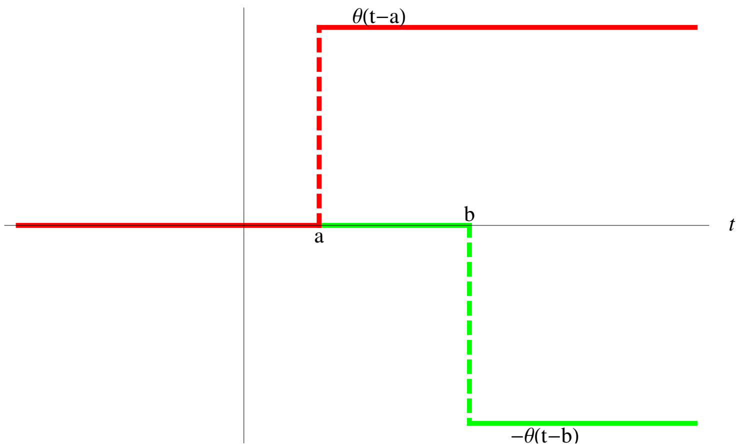
Eda 5. gaia
Ekuazio-sistemak
5.1 Definizioa
5.2 Propietateak
5.3 Alderantzizko transformazioa
5.6 Koefiziente konstanteetako ekuazio linealak

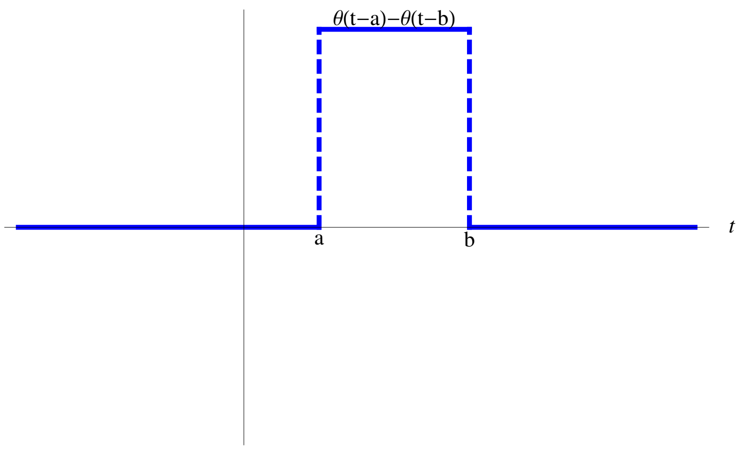
- Orokorrean hauxe beteko da:

$$\theta(t-a)-\theta(t-b)=\begin{cases}1, & \text{baldin } a<t<b,\\ 0, & \text{baldin } t>b.\end{cases}$$

Eda 5. gaia

Ekuazio-sistemak
5.1 Definizioa
5.2 Propietateak
5.3 Alderantzizko transformazioa
5.6 Koefiziente konstanteetako ekuazio linealak





- Egin dezagun orain problemaren ebazpena

  Izan bedi $X(s) = \mathcal{L}[x[t]]$.
  Orduan

$$\mathcal{L}[\ddot{x}[t]] = s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) = s^2 X(s),$$

  non $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ erabili dugun.

- Gai inhomogeneoa berridazteko dugun modua erabiliz gure ekuazioa hauxe da:

$$\ddot{x} + x = \theta(t) - \theta(t - \pi).$$

  Beraz,

$$\mathcal{L}[\ddot{x} + x] = \mathcal{L}[\theta(t) - \theta(t - \pi)].$$

  Lehengo kalkuluak erabiliz hauxe idaz dezakegu:

$$\mathcal{L}[\ddot{x} + x] = s^2 X(s) + X(s) = (s^2 + 1) X(s)$$

- Bestalde

$$\mathcal{L}[\theta(t)] = \frac{1}{s}, \quad \mathcal{L}[\theta(t - \pi)] = \frac{e^{-\pi}}{s}.$$

  Beraz, guztira hauxe dugu:

$$(s^2 + 1) X(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\pi}}{s} = \frac{1 - e^{-\pi}}{s}$$

$$X(s) = \frac{1 - e^{-\pi}}{s(s^2 + 1)} = \left(1 - e^{-\pi}\right) \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s + 1}\right).$$

Eda 5. gaia

Ekuazio-sistemak
5.1 Definizioa
5.2 Propietateak
5.3 Alderantzizko transformazioa
5.6 Koefiziente konstanteetako ekuazio linealak

- Orain hasi gaitezen alderantzizkoak kalkulatzen.
  - Gogoratu behar dugu erlazio hau:

$$\mathcal{L}[\theta(t-a)f(t-a)] = e^{-as}F(s)$$

baldin $F(s) = \mathcal{L}[f(t-a)]$ bada.
Errezki asma dezakegu ondokoa:

$$X(s) = \left(1 - e^{-\pi}\right)\left(\mathcal{L}[\theta(t)] - \mathcal{L}[\theta(t)\cos t]\right) =$$

$$\left(\mathcal{L}[\theta(t)] - \mathcal{L}[\theta(t)\cos t]\right) - e^{-\pi}\left(\mathcal{L}[\theta(t)] - \mathcal{L}[\cos t]\right) =$$

$$\mathcal{L}[\theta(t)] - \mathcal{L}[\theta(t)\cos t] -$$

$$\mathcal{L}[\theta(t-\pi)] - \mathcal{L}[\theta(t-\pi)\cos(t-\pi)] =$$

$$\mathcal{L}[\theta(t)(1-\cos t)] - \mathcal{L}[\theta(t-\pi)(1-\cos(t-\pi))].$$

- Orduan

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[\theta(t)(1-\cos t) -$$

$$\theta(t-\pi)(1-\cos(t-\pi))],$$

eta beraz

$$x(t) = \theta(t)(1-\cos t) - \theta(t-\pi)(1-\cos(t-\pi)).$$

- Jarraitasuna eztabaidatzeko idaz dezagun gure funtzioa beste modu honetara:

$$x(t) = \begin{cases} 1-\cos t & \pi > t > 0 \\ -2\cos t & t > \pi \end{cases}.$$

Ondokoa betetzen da:

$$\lim_{t\to\pi^-} = 1 - \cos\pi = 2, \qquad \lim_{t\to\pi^+} = -2\cos\pi = 2.$$

Orduan jarraitasuna dugu.

Eda 5. gaia

Ekuazio-sistemak
5.1 Definizioa
5.2 Propietateak
5.3 Alderantzizko transformazioa
5.6 Koefiziente konstanteetako ekuazio linealak

Otsaila 2008

- Ebatz ezazu ondoko hastapen-baldintzen problema:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = \begin{cases} t & 0 < t < 1\,, \\ 0 & t > 1\,, \end{cases} \qquad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

- Planteatutako problema honela idaz daiteke:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = t[\theta(t) - \theta(t-1)] =$$

$$t\theta(t) - (t-1)\theta(t-1) - \theta(t-1)$$

Haren Laplace-ren transformatua, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ kontutan izanik, hauxe dugu.

$$(s^2 + 2s - 3)X(s) = (s+3)(s-1)X(s) =$$

$$\frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right).$$

- Eta $X(s)$ askatuz hauxe lortzen da:

$$X(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s^2(s+3)(s-1)} - \frac{e^{-s}}{s(s+3)(s-1)} =$$

$$(1 - e^{-s})\left(\frac{1}{4(s-1)} - \frac{1}{36(s+3)} - \frac{2}{9s} - \frac{1}{3s^2}\right) -$$

$$e^{-s}\left(\frac{1}{4(s-1)} + \frac{1}{12(s+3)} - \frac{1}{3s}\right)$$

Eda 5. gaia

Ekuazio-sistemak
5.1 Definizioa
5.2 Propietateak
5.3 Alderantzizko transformazioa
5.6 Koefiziente konstanteetako ekuazio linealak

- Problema guztiz ebazteko beste "errezeta" bat behar dugu. Gogora dezagun $\mathcal{L}[e^{at}f(t)]F(s-a)$ erlazioa betetzen dela baldin $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ bada, eta egin dezagun ondoko izendapena:

$$g(t) = e^{at}f(t) \text{ eta } F(s-a) = G(s).$$

Orain gogora ekarri ahal dugu
$\mathcal{L}[\theta(t-b)g(t-b)] = e^{-bs}G(s)$ betetzen dela baldin
$\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$ bada.
Orduan

$$\mathcal{L}[\theta(t-b)g(t-b)] = \mathcal{L}[\theta(t-b)e^{a(t-b)}f(t-b)] =$$

$$e^{-bs}F(s-a).$$

Eda 5. gaia

Ekuazio-sistemak
5.1 Definizioa
5.2 Propietateak
5.3 Alderantzizko transformazioa
5.6 Koefiziente konstanteetako ekuazio linealak

- Zeren baliokidea da beraz ondoko adierazpena?

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{e^{-bs}}{s-a}].$$

Kasu honetan $f(t) = \theta(t)$ eta beraz

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{e^{-bs}}{s-a}] = \theta(t-b)e^{a(t-b)}\theta(t-b) = \theta(t-b)e^{a(t-b)},$$

zeren $\theta^2(t-b) = \theta(t-b)\ \forall b$.

- Orduan, alderantzizko transformatua aplikatuz hauxe lortzen da:

$$x(t) = \theta(t)\left(\frac{e^t}{4} - \frac{e^{-3t}}{36} - \frac{t}{3} - \frac{2}{9}\right) -$$

$$\theta(t-1)\left(\frac{e^{t-1}}{2} + \frac{e^{-3(t-1)}}{18} - \frac{t-1}{3} - \frac{5}{9}\right).$$

Eda 5. gaia

Ekuazio-sistemak
5.1 Definizioa
5.2 Propietateak
5.3 Alderantzizko transformazioa
5.6 Koefiziente konstanteetako ekuazio linealak

Iraila 2008

- Ebatz ezazu ondoko hastapen-baldintzen problema:

$$\ddot{x} + x = \begin{cases} \cos t & 0 < t < \pi\,, \\ 0 & t > \pi\,, \end{cases} \qquad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

- Planteatutako problema honela idaz daiteke:

$$\ddot{x} + x = (\theta(t) - \theta(t-\pi))\cos t =$$

$$\theta(t)\cos t + \theta(t-\pi)\cos(t-\pi)$$

Haren Laplace-ren transformatua, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ kontutan izanik, hauxe dugu.

$$(s^2+1)X(s) = \frac{s}{s^2+1}(1+e^{-\pi s}).$$

$$X(s) = (1+e^{-\pi s})\frac{s}{(s^2+1)^2} = -\frac{(1+e^{-\pi s})}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right).$$

- Alderantzizko tranformatuak hauxe ematen digu:

$$x(t) = \frac{1}{2}\left\{\theta(t)(t\sin t) + \theta(t-\pi)[(t-\pi)\sin(t-\pi)]\right\} =$$

$$\frac{1}{2}[\theta(t) - \theta(t-\pi)(t-\pi)]\sin t,$$