Ekuazio diferentzial arruntak Laplace-ren transformazioa
6. gaia

Ekuazio-sistemak

6.1 Berretura-serieen berrikusketa, 6.2 Serieen bidezko soluzioak, 6.3 Puntu arruntak, 6.5 Frobenius-en metodoa

6.1 Berretura-serieen berrikusketa

- Gai honetan bigarren ordenako ekuazio homogeneoen soluzioak berretura-serieen bidez aurkituko ditugu.
- Berretura-serieak orokorrean honela adieraziko ditugu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

- Eta haien kongebergentzia-erradioa honela:

$$\rho(x_0) = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

  - Limite hura existitzen denean edo $+\infty$ bada, seriea absolutu eta uniformeki konbergentea da $|x - x_0| < \rho$ erradioan, baina dibergentea da $|x - x_0| > \rho$ aldean.

- Ondorioz, $\rho = 0$ denean seriea gehienez x_0 puntuan da konbergentea.
- Bestalde, $\rho = +\infty$ bada, edonon konbergentea da.

6.1 ariketa

- Eman al dezakezu konbergentzia erradioa kalkulatzeko bestelako adierazpenik?
- $$\rho(x_0) = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{-1/n}.$$

Eda 6. gaia

Ekuazio linealen serieen bidezko ebazpena
6.1 Berretura-serieen berrikusketa
6.2 Serieen bidezko soluzioak
6.3 Puntu arruntak
6.5 Frobenius-en metodoa

- Kontsidera dezagun ondoko bi serieak:
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n,$$
eta jo dezagun $|x - x_0| < \rho$ aldean konbergenteak direla.
- Haien edozein konbinazio linealak, dagokion baturen konbinaziora jotzen du:
$$\alpha f(x) + \beta g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)(x-x_0)^n \ ,$$
α, eta β konstanteak izanik.
- Serieen biderkadura formalak serie batera jotzen du:
$$f(x)g(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n\right] =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}\right](x-x_0)^n.$$

- Antzeko moduan $f(x)/g(x)$ kalkula daiteke $g(x_0) \neq 0$ puntuetan (baina koefizienteen kalkulaketa zailagoa da orokorrean).
- Seriea mugagabeki deribagarria da $|x - x_0| < \rho$ zirkuluan eta haren koefizienteak gaiez gai kalkula daitezke:
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1},$$
non
$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0), \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x - x_0)^n.$$
- Bi serie berdinak dira berretura berdinen koefizienteak berdinak badira:
$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow a_n = b_n.$$

- Bestalde, $\rho > 0$ bada, $f(x)$ funtzioa analitikoa da $x = x_0$ puntuaren inguruan.
  - f eta g analitikoak badira, orduan $\alpha f + \beta g$, fg eta f/g analitikoak dira.
  - Adibidez, polinomioak eta $\sin x$, $\cos x$, $\exp x$, $\sinh x$ eta $\cosh x$ funtzio analitikoak ditugu edozein punturen inguruan.
  - Baina, $(1+x)^\nu$ eta $\ln(1+x)$ funtzioetarako $\rho(0) = 1$.

Eda 6. gaia

Ekuazio linealen serieen bidezko ebazpena

6.1 Berretura-serieen berrikusketa
6.2 Serieen bidezko soluzioak
6.3 Puntu arruntak
6.5 Frobenius-en metodoa

6.2 ariketa

- Aurkitu hurrengo berretura-serieen konbergentzia-erradioa eta batura:

$$f_1(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$f_2(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \dots$$

$$f_3(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

$$f_4(x) = 1 + x^2 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{18}x^8 + \frac{3}{16}x^{10} + \dots$$

- Lehenengo kasuan argi dago $x_0 = 0$ punturako ondokoa dugula:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad \forall n > 1.$$

Bestalde,

$$\rho(0) = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}}{(-1)^{n+2}\frac{1}{n+1}} = \right| = \left| \frac{n+1}{n} \right| = 1.$$

Beraz, guztira

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x) \qquad (|x| < 1).$$

- Bigarren kasuan $x_0 = 0$ punturako ondokoa dugu:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad \forall n > 0.$$

Eda 6. gaia

Ekuazio linealen serieen bidezko ebazpena
6.1 Berretura-serieen berrikusketa
6.2 Serieen bidezko soluzioak
6.3 Puntu arruntak
6.5 Frobenius-en metodoa

Bestalde,

$$\rho(0) = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n \dfrac{1}{(2n)!}}{(-1)^{n+1} \dfrac{1}{(2(n+1))!}} \right| = \left| 2(n+1) \right| = +\infty.$$

Beraz, guztira

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} = \cos\sqrt{x} \qquad (|x| < +\infty).$$

- Hirugarren kasuan $x_0 = 0$ punturako ondokoa dugu:

$$a_n = (n+1) \quad \forall n > 0.$$

Bestalde,

$$\rho(0) = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{n+2} \right| = 1.$$

Beraz, guztira

$$f_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n = (1-x)^{-2}. \qquad (|x| < 1).$$

- Laugarren kasuan, berretura guztiak bikotiak direnez, defini dezagun $y = x^2$ eta idaz dezagun orduan $f_4(x) = g_4(y(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n$. Hala izanik, ondokoa izango dugu:

$$b_n = \frac{n+1}{2^n} \quad \forall n > 0.$$

Eda 6. gaia

Ekuazio linealen serieen bidezko ebazpena
6.1 Berretura-serieen berrikusketa
6.2 Serieen bidezko soluzioak
6.3 Puntu arruntak
6.5 Frobenius-en metodoa

Bestalde,

$$\rho(0) = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right| =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)2^{n+1}}{(n+2)2^n} \right| = 2.$$

Beraz, guztira

$$f_4(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} (x^2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \left(\frac{x^2}{2} \right)^n =$$

$$\left(1 - \frac{x^2}{2} \right)^{-2}. \qquad (|x^2| < 2).$$

6.2 Serieen bidezko soluzioak

Eda 6. gaia

Ekuazio linealen serieen bidezko ebazpena
6.1 Berretura-serieen berrikusketa
6.2 Serieen bidezko soluzioak
6.3 Puntu arruntak
6.5 Frobenius-en metodoa

- Hemendik aurrera $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ ekuazioaren soluzioa bi moduko serieen bidez bilatuko dugu:
  - serie arruntak

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

  - eta Frobenius-en seriak

$$y = (x - x_0)^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

λ berretzailea seriearen indizea dugu.

- Puntu baten inguruko soluzioa bilatu ahal izateko, serie egokia aukeratu behar da, eta horretarako puntuaren izaera ezagutu behar da.
- $P(x)$ eta $Q(x)$ funtzioak x_0-ren inguruan analitikoak badira, puntua arrunta da. Bestela, puntua singularra da.
- Baina x_0 puntua singularra izanik,

$$p(x) \equiv (x - x_0)P(x), \qquad q(x) \equiv (x - x_0)^2 Q(x)$$

funtzioak puntu horren inguruan analitikoak badira, puntua singular erregularra izango da (hau da, $P(x)$ eta $Q(x)$ funtzioek gehienez lehen eta bigarren ordenako poloa dutenean hurrenez hurren). Bestela puntua singular irregularra dela esango dugu.

Eda 6. gaia

Ekuazio linealen serieen bidezko ebazpena
6.1 Berretura-serieen berrikusketa
6.2 Serieen bidezko soluzioak
6.3 Puntu arruntak
6.5 Frobenius-en metodoa

- Erosotasunagatik soluzioa $x_0 = 0$ puntuaren inguruan kalkulatu nahi dugula suposatuko dugu beti.
  - Hori lor daiteke traslazio bat eginez
  - edo $x = 1/t$ aldagai-aldaketa erabiliz infinituko puntuaren inguruan garatu nahi izatekotan.

6.3 ariketa

- Sailkatu ondoko ekuazioaren puntu singularrak:

$$x^2(x^2-1)^2y''-2x(x+1)y'-y=0.$$

- Argi dago ondokoa dugula:

$$P(x)=-\frac{2x(x+1)}{(x^2(x^2-1)^2)}=-\frac{2}{(x(x+1)(x-1)^2)},$$

$$Q(x)=-\frac{1}{(x^2(x-1)^2(x+1)^2)}.$$

Puntu singularrak $x=0$, $x=-1$ eta $x=1$ ditugu. Argi eta garbi, definizioak kontuan izanik, haien artean $x=0$ eta $x=-1$ erregularrak dira, baina $x=1$ irregularra.

6.3 Puntu arruntak

- Jo dezagun $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ ekuazioaren $P(x)$ eta $Q(x)$ koefizienteak analitikoak direla $x=0$ puntuaren inguaruan, orduan

$$P(x)=\sum_{n=0}^{\infty}P_nx^n,\quad Q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}Q_nx^n,$$

garapenak konbergenteak dira $|x|<\rho$ aldean $\rho>0$ balio egoki baterako.

Eda 6. gaia

Ekuazio linealen serieen bidezko ebazpena
6.1 Berretura-serieen berrikusketa
6.2 Serieen bidezko soluzioak
6.3 Puntu arruntak
6.5 Frobenius-en metodoa

- Kontsidera dezagun orain soluzioaren eta haren deribatuen serieak:
  - $$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$
    $$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1},$$
    $$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}.$$

- Serietan berretzaileak n berriro izan daitezen:
  - y'-ren seriean $n \to n+1$ aldaketa egingo dugu
    $$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n+1=1}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^{(n+1)-1} =$$
    $$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n,$$
  - eta y''-ren seriean $n \to n+2$ aldaketa egingo dugu
    $$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} =$$
    $$\sum_{n+2=2}^{\infty} (n+2)((n+2)-1) c_{n+2} x^{(n+2)-2} =$$
    $$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n.$$

- Ikusitako propietateak erabiliz honela idatziko dira gure ekuazioaren zatiak:
  - $$Qy = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} Q_{n-k} c_k \right] x^n,$$
  - $$Py' = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} (k+1) P_{n-k} c_{k+1} \right] x^n,$$
  - $$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n.$$
- Orduan, guztira,

$$y'' + Py' + Qy = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n+2)(n+1) c_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} [Q_{n-k} c_k + (k+1) P_{n-k} c_{k+1}] \right\} x^n.$$

- Beraz, proposatu dugun seriea ekuazioaren soluzioa izan dadin, ondoko erlazioa bete behar da n balio bakoitzerako, hau da, $n = 0, 1, 2, \ldots$ balioetarako:

$$(n+2)(n+1) c_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} [Q_{n-k} c_k + (k+1) P_{n-k} c_{k+1}] = 0$$

- Ikus daiteke c_0 eta c_1 aske geratzen direla, hau da, nahi bezala aukeratu ahal dira.
- Orduan, $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ ezagunak badira c_{n+2} kalkulatu ahal da

$$c_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)(n+1)} \sum_{k=0}^{n} [Q_{n-k} c_k + (k+1) P_{n-k} c_{k+1}]$$

erabiliz.

Eda 6. gaia

Ekuazio linealen serieen bidezko ebazpena
6.1 Berretura-serieen berrikusketa
6.2 Serieen bidezko soluzioak
6.3 Puntu arruntak
6.5 Frobenius-en metodoa

6.4 ariketa

- Erabili serieen metodoa

$$(x^2-1)y''+4xy'+2y=0$$

  ekuaziaoren soluzioa aurkitzeko.
- Adierazpen hauek izango ditugu lagungarri:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n=\dots$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n.$$

- Orduan

$$(x^2-1)y''+4xy'+2y=x^2\left(\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}\right)-$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n+4x\left(\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}\right)+$$

$$2\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)=\left(\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n\right)+$$

$$4\left(\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\left(2c_n-(n+2)(n+1)c_{n+2}\right)x^n$$

Eda 6. gaia

Ekuazio linealen serieen bidezko ebazpena
6.1 Berretura-serieen berrikusketa
6.2 Serieen bidezko soluzioak
6.3 Puntu arruntak
6.5 Frobenius-en metodoa

- Erabili serieen metodoa

$$(x^2-1)y''+4xy'+2y=0$$

ekuaziaoren soluzioa aurkitzeko.
- Kasuaren arabera y, y' edo y'' ondoko moduetako batean adieraztea izango da komenigarrien:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$$

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n=\dots$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)nc_{n+2}x^n.$$

6.5 Frobenius-en metodoa

- Atal honetan jatorrian dugun puntu arrunt edo singular erregula bati dagokion emaitza orokorra frogatuko dugu.
- Kalkulua erosoagoa gertatzen da gure ekuazioa ondoko moduan aurkezten badugu:

$$x^2y''+xp(x)y'+q(x)y=0.$$

- Jatorriaren propietateengatik ondokoa betetzen da:

$$p(x)=xP(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n x^n,\quad q(x)=x^2Q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_n x^n$$

garapenak konbergenteak dira $|x|<\rho$ aldean $\rho>0$ balio egoki baterako.
- Ikus daiteke jatorria puntu arrunta izateko baldintza beharrezko eta nahikoa $p_0=q_0=q_1=0$ dela.

- Frobenius-en metodoa ondoko hipotesian datza:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\lambda} \quad (c_0 \neq 0).$$

  Serie hura gutxienez $0 < |x| < \rho$ aldean izango da konebergentea
- Horren arabera hauxek dira gure ondorioak:

$$xy' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) c_n x^{n+\lambda}$$

$$x^2 y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda-1)(n+\lambda) c_n x^{n+\lambda}$$

Ekuazio linealen serieen bidezko ebazpena
6.1 Berretura-serieen berrikusketa
6.2 Serieen bidezko soluzioak
6.3 Puntu arruntak
6.5 Frobenius-en metodoa

- Orain, $q(x)$ eta $p(x)$ funtzioen garapenak erabiliz, ondokoa dugu:
  - $$qy = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} q_{n-k} c_k \right] x^{n+\lambda},$$
  - $$xpy' = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} (k+\lambda) p_{n-k} c_k \right] x^{n+\lambda}.$$
  - Guztira, hauxe da ebatzi behar dugun berdintza berria:

$$(n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n + \sum_{k=0}^{n} \left[(k+\lambda) p_{n-k} + q_{n-k} \right] c_k = 0$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ balioetarako.

- Komenigarria da indize-funtzioa definitzea:

$$\mathcal{I}(u) \equiv u(u-1) + p_0 u + q_0.$$

- Definizio hura erabiliz gure ekuazio nagusia honelaxe geratzen da:

$$\mathcal{I}(n+\lambda)c_n + \sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+\lambda)p_{n-k} + q_{n-k}\right] c_k = 0$$

- Orain $n=0$ eginez

$$\mathcal{I}(n+\lambda)c_0 = (\lambda(\lambda-1) + p_0 u + q_0)c_0 = 0$$

lortzen dugu, eta $c_0 \neq 0$ erabiliz aurreko ekuazioak λ indizearen balio posible biak ematen digu.

- Frobenius-en teoremagatik indize bietako handienerako (λ_1) beti dago bermatuta ondo moduko soluzioaren existentzia

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\lambda_1} \quad (c_0 \neq 0).$$

- Erreztasunagatik bigarren soluzioa d'Alembert-en metodoa aplikatuz lortuko dugu orokorrean.

Eda 6. gaia

Ekuazio linealen serieen bidezko ebazpena
6.1 Berretura-serieen berrikusketa
6.2 Serieen bidezko soluzioak
6.3 Puntu arruntak
6.5 Frobenius-en metodoa

Gomendioa

- Ekuazioa
$$h(x)y'' + xp(x) + q(x)y = 0$$
moduan ematen bazaigu, $h(x)$ polinomio bat izanik, komeni du x-en berretura egokiarekin biderkatzea ekuazio osoa y'' faktore moduan geratuko zaigun polinomioan agertzen den berreturarik txikiena x^2 izateko.
- Hala eginez metodoa aplikatu ahal izango dugu berdinki, baina indize ekuazioaren itxura ezberdina izango da.

Adibidea: Urtarrila 2005

Eda 6. gaia

Ekuazio linealen serieen bidezko ebazpena
6.1 Berretura-serieen berrikusketa
6.2 Serieen bidezko soluzioak
6.3 Puntu arruntak
6.5 Frobenius-en metodoa

- Ebatz ezazu ondoko ekuazioa
$$x(x-1)y'' + 3y' - 2y = 0$$

Adibidea: Iraila 2002

- Ebatz ezazu ondoko ekuazioa

$$x(x-3)y'' - (x^2-6)y' + 3(x-2)y = 0.$$

Adibidea: Iraila 2006

- Ebatz ezazu ondoko ekuazioa

$$xy'' + xy' + y = 0.$$

Bessel-en ekuazioak

- Azter dezagun ondoko ekuazio-mota:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \mu^2)y = 0$$

  - Jatorria puntu singular erregularra da.
  - Beraz, Frobenius-en serie bat erabiliko dugu.
- Ohiko kalkuluek zera ematen digute:

$$(\lambda^2 - \mu^2)c_0 = 0,$$

$$[(\lambda+1)^2 - \mu^2)c_1 = 0,$$

$$[(\lambda+n)^2 - \mu^2)]c_n + c_{n-2} = 0, \ n = 2, 3, \ldots$$

Eda 6. gaia

Ekuazio linealen serieen bidezko ebazpena
6.1 Berretura-serieen berrikusketa
6.2 Serieen bidezko soluzioak
6.3 Puntu arruntak
6.5 Frobenius-en metodoa

- Ondorioz, ekuazioaren indizeak $\lambda = \pm\mu$ dira.
- Koefizienteen propietateetan oinarrituta ikus daiteke ekuazioak honelako soluzio biak onartzen dituela:

$$y_1 = J_\nu(x) \ \text{ eta } \ y_2 = J_{-\nu}(x),$$

non

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\lambda+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+2k}.$$

- Funtzio horri lehen motako Bessel-en funtzio deritzo
- Printzipioz, Bessel-en ekuazioaren soluzio orokorra hauxe dela pentsa dezakegu:

$$y = AJ_\nu(x) + BJ_{-\nu(x)},$$

baina

$$W[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)] = -\frac{2\sin(\nu\pi)}{\pi x}$$

dugunez, hori ez da egia μ osoa bada.

- Zein da konponbidea? Defini dezagun bigarren motako Bessel-en funtzioa:

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\nu x) J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu x)}.$$

- Ikus daiteke, $W[J_\nu(x), Y_\nu(x)] \neq 0 \, \forall \nu$, eta orduan Bessel-en ekuazioaren soluzio orokorra hauxe da:

$$y = AJ_\nu(x) + BY_\nu(x).$$

- Bukatzeko, aipa dezagun Bessel-en ekuazioarekin estuki lotuta dagoen ekuazioa beste hau dugula:

$$x^2 y'' + (2c+1)xy' + [a^2 b^2 x^{2b} + (c^2 - \nu^2 b^2)]y = 0.$$

  - Haren soluzio orokorra hauxe da:

$$y = x^{-c}[AJ_\nu(ax^b) + BY_\nu(ax^b)]$$