1. Ondokoa betetzen al da edozein n-rentzat? (non $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ den)

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos(x)\cos(nx)\; dx \;&=\; \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big[\; \cos(n+1)x + \cos(n-1)x \;\big] dx \\ &=\; \frac{1}{2}\left[\; \frac{\sin(n+1)x}{n+1} \;+\; \frac{\sin(n-1)x}{n-1} \;\right]_0^{2\pi} = 0\,.\end{aligned}$$

2. Demagun $\mathrm{L}y = 0$ bigarren ordenako ekuazio diferentzial arruntak eta linealak eta $y(0) = 1$, $y(1) = 0$ mugalde-baldintzek osotzen duten mugalde-problemaren soluzio bi, $y_1(x)$ eta $y_2(x)$, dauzkagula.

Egia ala gezurra: $y(x) = 3y_1(x) + 2y_2(x)$ batura problemaren soluzioa da.

3. Deribatu partzialetako ekuazio diferentzial batean aldagai bakar batekiko deribatuak agertzen direnean ekuazioa arrunta balitz bezala ebazten da, baina integrazio konstanteen ordez beste aldagaien menpeko funtzioak jarriz.

a) Aurki ezazu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4x^4 u = x e^y$$

deribatu partzialetako ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra.

b) Eta u funtzioak x, y, z hiru aldagaien menpekotasuna izango balu?

c) Lor ezazu $u_{xy} = 0$ ekuazioaren soluzio orokorra.

4. Egia ala gezurra:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}\bigg|_{-1}^{1} = -2$$

5. Aurki ezazu ϕ funtzio bat, non ϕ funtzioaren gradientea $\nabla\phi = y^2 z\ \hat{\imath} + (2xyz + 3)\ \hat{\jmath} + (xy^2 - 2z)\ \hat{k}$ den. Ba al dago erlaziorik $\phi(x, y, z) = \text{ktea}$ baldintzak definituriko gainazalen eta $\nabla\phi(x, y, z)$ eremu bektorialaren artean?

6. $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, e^{-ax^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/a}$ adierazpena erabiliz, lor itzazu

$$\begin{aligned} I_{2n}(a) &:= \int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^{2n} e^{-ax^2} = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\frac{\pi}{a^{2n+1}}}\,, \\ I_{2n+1}(a) &:= \int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^{2n+1} e^{-ax^2} = \frac{n!}{2a^{n+1}}\,. \end{aligned}$$

7. Funtzio bikoitiek $f(-x) = f(x)$ betetzen dute; bakoitiek, aldiz, $f(-x) = -f(x)$.

a) Froga ezazu $(-l, l)$ tartean definituriko edozein funtzio bi funtzioen baturaren bidez adierazi dezakegula, haietariko bat bakoitia eta bestea bikoitia izanik. (Beraz, e^x esponentziala funtzio bakoiti baten eta funtzio bikoiti baten batura da. Zein da funtzio horien izena?)

b) Froga ezazu $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0$ dela baldin eta f bakoitia bada.

c) Ondorengo funtzioen artean, zeintzuk dira bakoitiak eta zeintzuk bikoitiak?

$$i)\ f(x) = (2x - x^3)^4\,; \quad ii)\ f(x) = \ln|\sin x|\,; \quad iii)\ f(x) = x^3 - 2x + 1\,.$$

d) Froga ezazu funtzio bakoitiaren deribatua bikoitia dela, eta alderantziz. Zer esan dezakegu $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ funtzioari buruz?

8. Aztertu hurrengo funtzioen periodikotasuna. Periodikoak badira, zein da haien periodoa? $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, d) kasuan izan ezik (han $n = 1, 2, ...$ daukagu).

$$a) \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & 2n-1 \le x < 2n \\ 1 & 2n \le x < 2n+1 \end{cases}$$

$$b) \qquad f(x) = \begin{cases} (-1)^n & 2n-1 \le x < 2n \\ 1 & 2n \le x < 2n+1 \end{cases}$$

$$c) \qquad f(x) = \tan(\pi x)$$

$$d) \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \frac{1}{2n+1} \le x < \frac{1}{2n} \\ 0 & \frac{1}{2n} \le x < \frac{1}{2n-1} \end{cases}$$

9. Parametroekiko deribazioa erabiliz, kalkula itzazu ondorengo integralak:

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,, \qquad \int_0^\infty \mathrm{d}x\, \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2}\,.$$

Azter itzazu integrakizunaren joera jatorriaren eta infinituko puntuaren inguruan ($x \approx 0$ eta $x \to +\infty$, alegia). Ondorengo integralak kalkula daitezke?.

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, \frac{e^{-ax}}{x}\,; \qquad \int_0^\infty \mathrm{d}x\, \frac{e^{-ax^2}}{x^2}\,.$$

10. Egia ala gezurra: Taylor-en hurbilketa bati gai bat gehitzeak beti hobetzen du hurbilketa.

Kontsidera itzazu cosinu funtzioaren $x = 0$ puntuaren inguruko Taylor-en garapenaren lehenengo gaiak. Kalkula itzazu $x = 2\pi$ puntuan. Zer gertatzen da?

11. Batu ezazu hurrengo seriea, eta azaldu bere baliogarritasunaren eremua:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n+4}\,.$$

12. Demagun

$$\dot{x} = yz\,, \qquad \dot{y} = xz\,, \qquad \dot{z} = -2xy$$

ekuazio diferentzial arrunten sistema. Zeintzuk dira sistema honen lehen integralak? Zein da lehen integralen interpretazio geometrikoa? Zein da sistemaren soluzioen interpretazio geometrikoa? Idatz ezazu soluzio orokorra.

13. Demagun $y'' + \lambda^2 y = 0$ ekuazio diferentzial arrunta. Idatz itzazu ekuazioaren soluzioen artean $y(0) = 0$ betetzen dutenak. $y(\pi)$ aldi berean zero izan daiteke?