1. Lor bitez ondorengo funtzioen Fourier-en serieak. Eman ezazu funtzioen hedadura periodikoa.

$$
\begin{array}{lll}
a)\ f(x)=\sin^2 x, & -\pi\le x\le\pi & T=2\pi \\
b)\ f(x)=\begin{cases} 0 \\ x \end{cases} & \begin{array}{r} -\pi\le x<0 \\ 0\le x<\pi \end{array} & T=2\pi \\
c)\ f(x)=(1-x^2) & -1\le x\le 1 & T=2
\end{array}
$$

2. Demagun $f(t)$ funtzioa bikoitia, zatikako jarraia, eta T periododuna dela. $f(t)$ funtzioaren Fourier-en garapena idazteko egokiak al dira hurrengo adierazpenak?

$$a)\quad \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega t)\,,\quad \omega=2\pi/T\,,\ a_n=\frac{2}{T}\int_0^T \mathrm{d}x\, f(x)\cos(n\omega x)\,;$$

$$b)\quad \frac{b_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} b_n\cos(n\omega t)\,,\quad \omega=2\pi/T\,,\ b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/4}^{3T/4} \mathrm{d}x\, f(x)\cos(n\omega x)\,;$$

$$c)\quad \frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos(n\Omega t)\,,\quad \Omega=\pi/T\,,\ c_n=\frac{1}{T}\int_0^{2T} \mathrm{d}x\, f(x)\cos(n\Omega x)\,;$$

$$d)\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{in\omega t}\,,\quad \omega=2\pi/T\,,\ d_n=\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}x\, f(x)e^{-in\omega x}\,.$$

Lor itzazu kasu bakoitzean $f(t)=1$ funtzio konstanteari dagozkion lehenengo lau gaiak.

3. Kontsidera ezazu $(0,\pi)$ tartean cosinuaren berdina den $f(x)$ funtzioa. a) Marraz ezazu π periodoa duen eta $(0,\pi)$ tartean f funtzioaren berdina den funtzioa. Kalkula ezazu berari dagokion Fourier-en garapena. b) Lortu eta marraztu sinuetako eta cosinuetako Fourier-en serieak f funtzioarentzat. Batura partzialek Gibbs-en fenomenoa azalduko digute?

4. $f(x)$ funtzioa $0\le x\le L$ tartean definituta dagoenean, f kosinuetako edo sinuetako serieen bidez adieraz dezakegu, f funtzioaren hedadura bakoitia edo bikoitia eraikiz. Hauek ez dira ahalbide bakarrak; ariketa honetan ikusiko dugu $(0,L)$ tartean f funtzioa eta Fourier-en garapen desberdinak bat etor daitezkeela.

a) Heda dezagun f funtzioa $(L,2L]$ tartean gura dugun moduan. Hori eginda, heda dezagun lorturiko funtzioa $(-2L,0)$ tarteara funtzio bakoiti bezala, eta handik x ardatz osoari $4L$ periododun funtzio bezala. Egiazta ezazu horrela prestaturiko funtzioak

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(n\pi x/2L)$$

sinuetako seriea daukala,

$$b_n=\frac{1}{L}\int_0^{2L}\mathrm{d}x\, f(x)\sin(n\pi x/2L)\quad \text{izanik.}$$

b) Heda dezagun f funtzioa $(L, 2L]$ tarteara $x = L$ puntuarekiko simetrikoa izan dadin, hau da, $f(2L - x) = f(x)$ bete dadin $0 \leq x \leq L$ denean. Orain lorturikoa $(-2L, 0)$ tarteara funtzio bakoiti bezala hedatuko dugu, eta handik x ardatz osoari $4L$ periododun funtzio bezala. Egiazta ezazu horrela prestaturiko funtzioak

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin[(2n-1)\pi x/2L]$$

sinuetako seriea daukala,

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \mathrm{d}x\, f(x) \sin[(2n-1)\pi x/2L] \quad \text{izanik.}$$

Bi serieak hasierako funtzioarekin bat datoz $(0, L)$ tartean. Gainera, bigarrena $(0, L]$ tartean ere bat dator f funtzioarekin (azaldu).

5. Kalkula ezazu $f(x) = x$ funtzioaren Fourier-en garapena $(-\pi, \pi)$ tartean. Hori erabiliz, frogatu ondokoa:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}\,.$$

6. Kalkula ezazu $f(x) = \exp(x)$ funtzioaren Fourier-en garapena $(-1, 1)$ tartean. Zein da garapenaren balioa $x = 2$ puntuan?

7. Aurreko ariketan lortutako garapena gaiz gai integratuz, eta beste funtzio egoki bat tarte berean garatuz, egiazta ezazu $\int \mathrm{d}x\, \exp(x) = \exp(x) + c$. Honezaz gain, froga ezazu ondoko emaitza:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2\pi^2} = \frac{e + 1/2 - e^2/2}{e^2 - 1}\,.$$

Zer gertatuko litzateke aurreko ariketako garapena gaiz gai deribatuz? Froga ezazu ondoko zentzugabeko emaitza ondorioztatzen dela: $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m = -1/2$.

8. Demagun uhin karratu eta periodikoa, T periododuna. Froga ezazu maiztasun txikiak pasatzen uzten duen iragazkiak ez duela oso ona izan behar seinalearen potentzia gehiena pasa dadin (hau da, kalkula ezazu potentziaren %90a pasa dadin beharrezkoa den harmonikoen kopurua).

9. Egiazta ezazu $f(x) = |x|$ funtzioaren Fourier-en garapena $(-\pi, \pi)$ tartean ondokoa dela:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}\,.$$

Hau gaiz gai integratuz, kalkula ezazu ondoko seriaren balioa:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3}\,.$$