1. Biz $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ uhin-ekuazioa, dimentsio batean, $-\infty < x < \infty$ eta $t > 0$ tartean, hasierako baldintzak $u(x,0) = f(x)$ eta $u_t(x,0) = 0$ izanik, non

$$f(x) = \begin{cases} 2 & -1 < x < 1, \\ 0 & \text{kanpoan.} \end{cases}$$

Marraztu $f(x)$. Egiazta ezazu ondokoa:

$$f(x - ct) = \begin{cases} 2 & -1 + ct < x < 1 + ct, \\ 0 & \text{kanpoan,} \end{cases}$$

lor ezazu $f(x + ct)$, eta marraz ezazu $u(x,t)$ problemaren soluzioa $t = 0$, $t = 1/2c$, $t = 1/c$ eta $t = 2/c$ uneetan. Egiazta ezazu bi uhin sortzen direla, aurkako norabideetan hedatzen direnak, eta bakoitzaren anplitudea hasierakoaren erdia dela.

2. Lor itzazu ondo ekuazioaren berezko lerroak: $\phi_{xy} + xy\phi_{yy} - \phi_y = 0$

3. Lor itzazu ondoko ekuazioaren berezko lerroak:

$$u_{xx} + 3u_{xy} - 4u_{yy} - u_x + u_y = 0\,.$$

Aldagai aldaketa egokia eginez, froga ezazu ekuazioaren soluzio orokorra ondorengoa dela:

$$u(x,y) = F(y - 4x)e^{\frac{x+y}{5}} + g(x+y)\,,$$

F eta g edozein funtzio izanik. Hau kontuan hartuz froga ezazu ondoko mugalde baldintzak betetzen duen soluzioa $u(x,y) = x + y + e^{(x+y)/5}$ dela:

$$u|_{y=4x} = 5x + e^x\,, \qquad \text{y} \qquad u|_{y=-x} = 1$$

(Mugalde baldintzak berezko lerrotan zehar emonak dira, baina soluzioa bakarra dago. Azaldu emaitza hau).

4. Froga ezazu ondoko ekuazioaren soluzio orokorra $u(x,y) = \phi(xy) - x^2 y + f(x)$ dela, ϕ eta f funtzioak nolanahikoak izanik:

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} = x^2$$

5. Sailkatu ondorengo ekuazio eta sistemak hiperbolikoak, parabolikoak edo eliptikoak bezala. Mota mistokoak badira, zehaztu bakoitzari dagozkion eremuak.

a) $\quad u_{xx} = \rho(x)u_{tt} + h(x)u_t + f(x)e^{i\omega t}\,, \qquad \rho(x) > 0\,;$

b) $\quad u_{xx} + (1-x)^2 u_{yy} = 6\,;$

c) $\quad \phi_{xy} + xy\phi_{yy} - \phi_y = 0\,;$

d) $\quad \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \rho(x)\dfrac{\partial F}{\partial t} + h(x)F + f(x,t)\,;$

e) $\quad u_x = (1-u)^2 u_{yy}\,;$

f) $\quad \begin{cases} e_x + Ri &= 0, \\ i_x + Ce_t &= 0. \end{cases}$

6. Ebatz itzazu ondoko ekuazioak, u funtzioa x eta y aldagaien funtzioa eta $p = u_x$ eta $q = u_y$ izanik:
a) $(x-y)p + (x+y)q = 0$;
b) $(x/u)p + (u/y)q = 0$;

c) $xy(p-q) = (x-y)u$;
d) $x(y-u)p + y(u-x)q = u(x-y)$.

7. Lor itzazu $u(x,y,z)$ funtzio ezezaguna dituen ondoko ekuazioen soluzio osoak:
a) $u_x + u_y + u_z = 0$;
b) $xu_x + yu_y + zu_z = u$;
c) $u(u_x + u_y + u_z) = 1$;
d) $yzu_x + zxu_y + xyu_z = xyz$;
e) $(y-z)u_x + (z-x)u_y + (x-y)u_z = 0$.

8.* Aurki ezazu $x = 0$, $y = u$ lerrotik pasatzen den ondoko ekuazioaren soluzioa:

$$(x + u_x)\, u_x = u_y \,.$$

9.* Aurki ezazu $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$ lerrotik pasatzen den ondoko ekuazioaren soluzioa:

$$z_x^2 + z_y^2 = 1 \,.$$

10. $\vec{V} = X(x,y,z)\mathbf{u}_x + Y(x,y,z)\mathbf{u}_y + Z(x,y,z)\mathbf{u}_z$ eremu bektoriala ezagutuz gero, puntu guztietan eremua tangentea izaten duten lerroak lor daitezke; kurba hauei *lerro integralak* edo *lerro bektorialak* deritzegu, eta ondoko sistemaren soluzioak dira:

$$\frac{dx}{X(x,y,z)} = \frac{dy}{Y(x,y,z)} = \frac{dz}{Z(x,y,z)} \; (= dt) \; .$$

Lor itzazu $\vec{F} = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y - z\mathbf{u}_z$ eremuaren lerro bektorialak eta gainazal ortogonalak.

11. Liouville-ren teoremak ziurtatzen du fase espazioan probabilitatea konserbatzen dela. Hau dela eta, $f(q,p,t)$ partikula baten fase espazioko probabilitate dentsitateak ondoko ekuazioa betetzen du,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \{H, f\} \; ,$$

non $H(q,p,t)$ hamiltondarra dugun, eta $\{\cdot,\cdot\}$ Poisson-en kortxetea fase espazioan definituriko funtzio bikoteentzat honela dago definituta:

$$\{g,h\} = \frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial h}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial h}{\partial q}$$

(t denbora aldagaiak ez du parte hartzen Poisson-en kortxetean). Erabil ezazu karakteristiken metodoa fase espazioko probabilitate dentsitatearen ekuazioa ebazteko, $f(q,p,0) = f_0(q,p)$ hastapen baldintzaren pean, bai partikula askearen kasuan baita osziladore harmonikoarenean ere. (N.B.: f hiru aldagaien funtzioa da, beraz soluzio orokorra bi aldagaien funtzioaren bidez adieraziko dugu; honezaz gain, lan gehiegi ez egiteko, komenigarria liteke hasteko osziladore harmonikoaren soluzioa kalkulatzea, eta gero maistazuna zerorantz doan limitea hartzea). Karakteristiken metodoa erabili gabe, eremu grabitazional uniformearen kasuan soluzioa zuzenean idatz dezakegu? (Iradokizuna: alderatu zure emaitzak, kasuz kasu, partikula baten higidura-soluzioarekin, edo, agian zuzenago, karakteristiken ekuazioak partikularen higiduraren ekuazioekin.)

Gehigarria:
Azken urteetako azterketen ariketa batzuk

12. Biz $x^2\phi_{xx} + x\phi_x = \phi_{tt}$ ekuazioa eta $\phi(t,1) = 0$, $\phi(t,2) = 0$, $\phi(0,x) = 1$, $\phi_t(0,x) = 0$ mugalde baldintzak betetzen dituen $\phi(x,t)$ funtzioa, $t > 0$, $1 < x < 2$ tartean definiturik.
a) Nolakoa da ekuazioa: hiperbolikoa, parabolikoa edo eliptikoa?
b) Aldagai banantzea erabiliz lor ezazu $\phi(x,t)$ funtzioaren ondoko adierazpena:

$$\phi(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(t,x) \; .$$

(Idatz itzazu c_n koefizienteak integralen bidez. **Integralak kalkulatzea ez da beharrezkoa**.) (94.eko ekainan, FMM irakasgaian)

13. Aurki ezazu ondoko ekuazioaren $z(x,y)$ gainazal integrala, $y = x+1$, $z = 1$ lerroa barnean duena:

$$x(x+y)\frac{\partial z}{\partial x} - y(x+y)\frac{\partial z}{\partial y} = (x-y)z \, .$$

(94.eko bigarren azterketa partziala, FMM irakasgaian)

14. (2002 - Iraila) Demagun forma parametrikoan definitutako ondorengo lerroa:

$$x(t) = t \, , \quad y(t) = t \, , \quad u(t) = t^2 \, .$$

Kalkula ezazu lerro horretatik pasatzen den ondoko ekuazioaren $u(x,y)$ gainazal integrala:

$$2xy\frac{\partial u}{\partial x} - 2xy\frac{\partial u}{\partial y} = (x-y)u \, .$$

Zer gertatuko litzateke $x(t) = t$, $y(t) = -t$, $u(t) = t^2$ lerrotik pasatzen den soluzioa aztertuko bagenu?

15. (2003 - Iraila) Lor ezazu

$$2y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy(2y^2 - x^2)$$

ekuazioaren soluzioa, $u(x,1) = x^2$ $(0 \leq x \leq 3)$ baldintzaren menpean. Posible bada, eman ezazu $u(2,2)$ balioa. Posible ez bada, argitu horren zergatia.

16. (2004 - Otsaila) Posible bada, aska ezazu ondoko problema. Zein da $x(\tau) = \sinh(\tau)$, $t = 0$, eta $u(\tau) = \sinh(\tau)$ deskripzio parametrikoarekin deskribatutako lerrotik pasatzen den eta

$$2xt\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = u$$

ekuazioaren soluzioa den gainazala? (Non τ aldagaia $-\infty$-tik ∞-ra doan)

17. (2004 - Iraila) Lor ezazu

$$y\,(2u+1)\,\frac{\partial u}{\partial x} + x\left(4ux^2 + 2x^2\right)\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy(2x^2 - 1)$$

ekuazioaren soluzio orokorra.

$$\left\{y = x^2 \, , \quad u = x \, , \quad x > 0\right\}$$

kurbatik pasatzen den soluziorik existitzen al da? Eta

$$\left\{y = \sqrt{x^4 + x}\,, \quad u = x^2\,, \quad x > 0\right\}?$$

kurbari dagokienez? Zergatik?

18. (2005 - Otsaila) Sailkatu ondoko ekuazioa:

$$y\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (y-x)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - x\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + a\frac{x-y}{x+y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (x^2+y^2)(x+y)^2\,.$$

Ebatz ezazu ekuazioa $a = 1$ kasurako (lor ezazu soluzio orokorra). Zer gertatuko litzateke $a \neq 1$ izango balitz? $a = 1$ kasuan, existitzen bada, kalkula ezazu $f(x,0) = 0$ eta $\partial_y f(x,0) = 0$ baldintzak bete dituen soluzioa. Era berean, existitzen bada, kalkula ezazu $f(x,x) = 0$ eta $\partial_y f(x,x) = 0$ baldintzak bete dituen soluzioa. Azaldu zure emaitzak.

19. (2005 - Otsaila) Soka infinitu batetik c abiadurako uhinak hedatzen dira. Sokaren hasierako desplazamendua

$$y(x) = \begin{cases} \sin(\pi x/a) & -a \leq x \leq a, \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

dugu. Abiadurarik gabe uzten diogu higitzen $t = 0$ unean, bere ondorengo desplazamendua $y(x,t)$ funtzioak emana. Heaviside-ren urrats funtzioak erabiliz, lor ezazu x guztientzako desplazamenduaren adierazpen orokorra; bereziki ondoko puntuetan: i) $x = 0$; ii) $x = a$; iii) $x = a/2$.

20. (2005 - Iraila) Aska itzazu ondoko problemak, soluzioa izanez gero, eta azaldu soluzioaren baliagarritasun eremua. Soluziorik ez badago, azaldu zergaitik.

$$(1) \qquad \tan x u_x + u_y = 1\,, \qquad u(\pi/2, y) = 0\,.$$

$$(2) \qquad 3x u_x + 2y u_y = 1\,, \qquad u(\sqrt{81 - t^3}, t) = 0\,, \quad t < 3\,.$$

21. (2006 - Otsaila) Lor ezazu $u = 7$, $y = -1 + \alpha x \ln x$ lerroetatik pasatzen diren ondoko ekuazioaren soluzioak, α parametro bat izanik. Edozein α erabil dezakegu? Zergatik?

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + (x+y+1)\frac{\partial u}{\partial y} = axu\,.$$

22. (2006 - Iraila) Lor ezazu $u = y$, $x = 1$ lerrotik pasatzen diren ondoko ekuazioaren soluzioak:

$$2x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u$$

23. (2007 - Otsaila) Hodi mehe eta malgua jariakin konprimaezinaz beteta dago. Hori dela eta, bere zeharkako higidura txikiak ondoko ekuazioak deskribatzen ditu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2v\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \left(v^2 - \frac{T}{\rho A}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,,$$

non u zeharkako desplazemendua, v jarioaren abiadura, T hodiaren tentsioa, ρ jariakinaren dentsitatea, eta A zeharkako sekzioa diren.

(1) Froga ezazu ekuazioaren soluzio orokorrean bi uhin bidairi agertzen direla, abiadura ezberdinekoak. Biek norantza bera izatea posible al da? Zein kasutan? Soluzio orokorraren egitura justifikatzeko eman ezazu argudio fisikoa. Egiaztatu zure emaitza $v \to 0$ limitea aztertuz.

(2) Demagun hasieran hodiaren desplazamendu $a \cos kx$ dela, eta pausagunetik higitzen uzten zaiola. Deskriba ezazu bere higidura.

24. (2007 - Iraila) Kontsidera dezagun ondoko problema:

$$x(x+2y)z_x - (2x+y)yz_y = (x-y)z$$

ekuazioaren soluzioa, $z = x^2y^2$, $x+y = \alpha$ lerrotik pasatzen dena aurkitu nahi dugu. Nolakoa izan behar du α zenbakiak soluzioa existitzeko eta bakarra izateko? Azaldu existitzeko ala ez existitzeko, eta bakartasunaren aldeko eta kontrako arrazoiak. Existitzekotan, kalkula ezazu soluzioa.

25. (2008 - Otsaila) Ebatzi, posible bada, ondoko ekuazio diferentziala. Zer gertatzen da $v = c$ kasuan?

$$u_{tt} + 2vu_{xt} + \left(v^2 - c^2\right) u_{xx} = \frac{\beta}{u} \left[\left(v^2 - c^2\right) u_x^2 + u_t^2 + 2vu_t u_x\right] .$$

26. (2008 - Iraila) Kalkula ezazu ondoko ekuazioaren soluzio orokorra:

$$ux \cosh y \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u \cosh y \, .$$

Zein da $y = 0$, $x = e^{-u}$ multzoa barruan duen soluzioa?