Atala I

Sturm-en eta Liouville-ren teoria

Aurkibidea

Gaien Aurkibidea

1 Funtzio espazioak eta garapen ortogonalak

1.1 Problemaren adierazpen orokorra

Helburua

Demagun L eragile diferentziala (= adierazpen diferentziala + mugalde baldintzak).

Zein da ondoko problemaren soluzioa?

$$Lf = g\,.$$

Adibidea

$$\begin{aligned} y'' + y &= x\,, \\ y(0) = y(1) &= 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Ekuazioaren soluzio orokorra:

$$y(x) = x + \alpha \sin x + \beta \cos x\,.$$

Mugalde baldintzak ezarriz gero, $\beta = 0$ eta $\alpha = -\mathrm{cosec}(1)$:

$$y(x) = x - \frac{\sin x}{\sin 1}\,,$$

Problemaren soluzioa.

Iruzkinak

Soluziorik al dago beti?:

$$\begin{aligned} y'' + y &= \sin x\,, \\ y(0) = y(\pi) &= 0\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Ez du soluziorik: ekuazioaren soluzioa

$$-\frac{1}{2} x \cos x + \alpha \sin x + \beta \cos x\,,$$

π puntuan: $\pi/2 - \beta = 0$; eta 0 puntuan $\beta = 0$: ezinezkoa!! Funtsezko galderak:

- Zergatik ez?
- Noiz bai, noiz ez?
- Existitzekotan, nola kalkulatu?

Funtsezko idea

- Ekuazioa lineala dela eta, *soluzioa gainezarmen baten bidez idatzi*.
- *Mugalde baldintzek egokiak izan behar dute*
- Eta gai inhomogenoa bera maneiatu behar dugu.

Adibidea

$$Ly = y'' + \lambda y\,; \qquad y(0) = 0\,, \quad y(1) = 1\,. \tag{3}$$

Demagun y_1 eta y_2 funtzioak $Ly = 0$ ekuazioaren soluzioak direla. Hau dela eta,

$$(y_1 + y_2)'' + \lambda\,(y_1 + y_2) = 0\,,$$

baina

$$(y_1 + y_2)\,(1) = 2 \neq 1\,!!$$

Beraz, gainezarmena ez da problemaren soluzioa (nahiz eta ekuazioaren soluzioa izan).

Adibidea, jarr.

Problemaren soluzioa izango litzateke mugalde baldintza $y(1) = 0$ izango balitz: *Mugalde baldintza homogenoen* kasu berezia.

Ez bakarrik kasu horretan.

Beste mugalde baldintza mota batzuekin gainezarmena soluzioa izango litzateke (adib. $y(0) = y(1)$ mugalde baldintza periodikoa).

1.2 Soluzio aljebraikoa

Matrizeen problema

Antzeko matrize problema ondokoa dugu

$$A\mathbf{v} = \mathbf{w}\,, \tag{4}$$

non A matrizea $m \times n$-ekoa da, $\mathbf{u}$ n-bektorea, eta $\mathbf{w}$ m-bektorea. $\mathbf{w}$ ezaguna da (datua, jakina), eta gure helburua $\mathbf{u}$ dugu.

(Hau da: ekuazio-sistema lineala!)

Soluzioen existentzia

Problemak soluzioa izatea *heinearen* menpe dago; eta $\mathbf{w}$ bektorea A matrizeak sortua den.

Matrize karratuetan: alderantzizkorik dagoen.

Diagonalizazioa

Alderantzizkoa existitzeak ez dakar ondorio diagonalgarritasuna (adib. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alderantzizkoa $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, eta balio propio bakarraren azpiespazio propioaren dimentsioa 1 da).

Eta diagonalgarria izateak ez dakar alderantzizkoaren existentzia:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrize diagonalgarria

Demagun A matrizea diagonalgarria dela:

$\exists$ oinarri diagonala, $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^{n}$ s.t. $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$.

Demagun oinarria ortogonala dela (bestela, erabili Gram-Schmidt).

A matrizearen alderantzizkoa existitzen da baldin eta $\forall i \quad \lambda_i \neq 0$ bada.

Matrize diagonalgarria eta alderanzkarria

Garatu datu-bektorea eta bektore ezezaguna oinarri honetan:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \mathbf{v}_i \,, \qquad \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} w_i \mathbf{v}_i \,.$$

Ekuazioa honela berridazten dugu:

$$A \sum_{i=1}^{n} u_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} w_i \mathbf{v}_i \,,$$

eta, oinarria ortogonala dela eta,

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{\lambda_i} \mathbf{v}_i \,,$$

A matrizea alderanzkarria izanez gero.

Aljebratik ateratako ondorioak

- L eragilearentzat bektore propioen oinarri ortogonala existitzen bada, oinarri horretan garatzea erabilgarria izango da $Ly = f$ problemaren soluzioa aztertzeko. (L eragilea, mugalde baldintzak barne)
- L alderanzkarria ez bada ere, soluzioa existitu daiteke (baina hemen ez dugu kasu horiek aztertuko)
- Funtzioak eta bektore propioen oinarria? Zer da hori?
- Zein da matrize simetriko baten analogoa? (matrize simetrikoak diagonalgarriak baitira)

1.3 Funtzioen espazio linealak

Ideia

Lerro errealean definituriko funtzio konplexuekin:

- funtzio(multzo finito bat-)en batura trukakorra eta asoziatiboa;
- eskalar batekin (zenbaki konplexu batekin) biderkatzea banakorra da.
- $\exists$ 0 funtzioa, eta $\forall f$, $f + 0 = f$;
- $\forall f$, $f + (-f) = 0$, eta $-f$ bakarra da.

Beraz: lerro errealean definituriko funtzio konplexuen azpimultzo egokiak aurkituz gero, funtzioen espazio linealak lortuko ditugu. Egokia: 1) batuketa barne eragiketa izatea; 2) azpimultzoan 0 funtzioa dago; 3) azpimultzoko f funtzio guztien kasuan $-f$ funtzioa azpiespazioan dago.

Adibideak

1. Euskarri trinkoko funtzio jarraituen multzoa, $C_c\left(\mathbf{R}\right)$.
2. Jarraitasunez bi aldiz deribagarriak diren funtzioak, $C^2\left(\mathbf{R}\right)$.
3. $I := [a,b] \subset \mathbf{R}$; $A := \left\{f \in C^2\left(I\right) \ / \ f(a) = f(b) = 0\right\}$
4. $I := [a,b] \subset \mathbf{R}$; $A := \left\{f \in C^2\left(I\right) \ / \ f(a) = f(b)\right\}$

Linealtasuna, berriro

Ondoko multzoa *EZ* da espazio lineal bat, batuketa barne eragiketa ez delako ($I := [a,b] \subset \mathbf{R}$):

$$B := \left\{f \in C^2\left(I\right) \ / \ f(a) = 0\,, f(b) = 1\right\} \ .$$

Linealtasuna ona da, baina ez aski: infinito dimentsiotako espazioak; zein da oinarria?

1.4 Barne biderketako funtzio espazio linealak

Barne biderketa eta oinarrietako garapenak

- Espazio lineal batentzako barne biderketa, ($\langle\cdot,\cdot\rangle$);
- Oinarria, $\{\mathbf{v}_i\}$, biderketa horrekiko ortogonal,

$$\langle\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j\rangle = \langle\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i\rangle\delta_{ij} \ ;$$

Ondorioz, $\mathbf{u}$ bektorearen koefizienteak oinarri horretan:

$$\mathbf{u} = \sum_i \frac{\langle\mathbf{v}_i,\mathbf{u}\rangle}{\langle\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i\rangle}\mathbf{v}_i \ .$$

Barne biderketa: definizioa

Barne biderketak, $\langle\cdot,\cdot\rangle$, V espazio linealean, $(a,b) \in V \times V$ bikote bakoitzari esleitzen dio $\langle a,b\rangle$ zenbakia (eskalarra), ondoko baldintzen pean, $\forall a,b,c \in V$ eta λ eskalar guztientzat:

i) $\langle a+b,c\rangle = \langle a,c\rangle + \langle b,c\rangle$;

ii) $\langle a,\lambda b\rangle = \lambda\langle a,b\rangle$;

iii) (eskalarren konjokatua definituta egonez gero; geuretzat konplexu konjokatua) $\langle b,a\rangle = \overline{\langle a,b\rangle}$;

iv) $\langle a,a\rangle > 0 \ \forall a \neq 0$.

Barne biderketa: adibideak, funtzioekin

$C^2(I)$ espazioan, non $I := [a, b]$ den, barne biderketa *kanonikoa* ondokoa dugu:

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\, \bar{f}(x)g(x)\,.$$

Beste adibide batzuk:

$$\langle f, g\rangle_\rho = \int_a^b \mathrm{d}x\, \bar{f}(x)g(x)\rho(x)\,,$$

non $\rho(x) > 0$, tartean definituta, barne biderketaren *haztapena* edo pisua den.

Hilbert-en espazioak

- Definizioa: barne biderketa duen espazio lineal *osoa* (osoa barne biderketaren metrikaren topologian), infinito dimentsiotakoa, *Hilbert-en espazioa* da. (Dimentsioa ∞: $\forall n$ naturala linealki independenteak diren n elementuz osatutako multzoa existitzen da)
- Adibidez: $C^2(I)$ barne biderketa kanonikoarekin ez da Hilbert-en espazio bat; bai ordea $L^2(I)$ espaziora osatuz (I tartean karratu integragarria duen funtzioen baliokidetasun-klaseak)
- Adibidez: l_2; zenbaki konplexuen segidak, $\{z\} := \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, non $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^2$ konbergentea eta finitoa den; barne biderkadura

$$\langle \{z\}\,, \{w\}\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{z_k} w_k\,.$$

Hilbert-en espazioak: garrantzia

Hilbert-en espazioetan elementu guztiak *era bakarrean* deskonposa daitezke Hilbert-en espazioaren azpiespazioekiko: *batura ortogonala* eta orto-osagarritasuna zuzenean agertzen dira.

Ondorioz, *Hilbert-en espazio banangarriek sistema ortogonal osoa onartzen dute*, hau da, *oinarri osoa*.

2 Eragileak eta oinarri propioak

2.1 Adibideak

Adibidea

$$Ly := -y''\,, \qquad \mathrm{dom}(L) = \left\{y \in C^2[0, \pi] :\, y(0) = y(\pi) = 0\right\}\,.$$

Balio eta funtzio propioen problema:

$$Ly = \lambda y \equiv y'' + \lambda y = 0\,, \quad y(0) = y(\pi) = 0\,.$$

Ekuazioaren soluzio orokorra ($\lambda \neq 0$): $y(x) = \alpha \sin\left(\sqrt{\lambda} x\right) + \beta \cos\left(\sqrt{\lambda} x\right)$.

0 puntuko baldintza: $\beta = 0$; π puntuko baldintza: $\alpha \sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right)$. Soluzioa tribiala *ez* izateko:

$$\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0\,.$$

Adibidea, jarraipena

Ekuazio sekularra: $\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0$; bere soluzio multzoa $\lambda \in \left\{n^2\right\}_{n=1}^{\infty}$. ($\lambda = 0$ aparte aztertuz, ez da balio propioa)

Funtzio propioak

$$y_n(x) = \sin(nx)\ .$$

Ortogonaltasuna? Barne biderketa kanonikoa $\langle f, g\rangle = \int_0^\pi \mathrm{d}x\, \overline{f}(x) g(x)$.

$$\begin{aligned} \langle y_n, y_m\rangle &= \int_0^\pi \mathrm{d}x\, \sin(nx)\, \sin(mx) \\ &= \delta_{nm}\frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Adibidea, jarraipena

$\{\sin(nx)\}_{n=1}^{\infty}$ multzoa *oinarri ortogonala* da. Hala ere, $\mathrm{dom}(L)$ ez da Hilbert-en espazioa, eta oinarri honekiko garapen batzuk ez dira hor egongo, bai ordea $L^2([0,\pi])$ espazioan:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi \mathrm{d}\xi\, \sin(n\xi)\, f(\xi)\right)\sin(nx)\ .$$

Berdintza hau $L^2([0,\pi])$ espazioan gauzatzen da; orokorrean *ez da* berdintza puntuz puntu, orokorrean ez da funtzioen berdintza $\mathrm{dom}(L)$ espazioan.

Adibidea, jarraipena

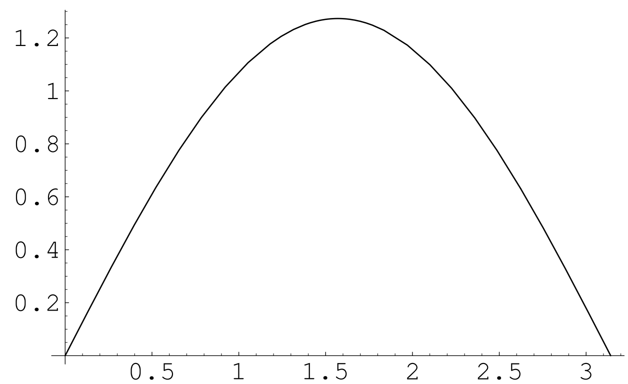
Adibidez, $f(x) = 1$. Adi egon: $f(0) \neq 0$. Hala ere, $L^2([0,\pi])$ espazioan

$$1 = \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2}{2m+1}\sin\left[(2m+1)\,x\right]\ .$$

Ez da puntuz-puntuko berdintza!.

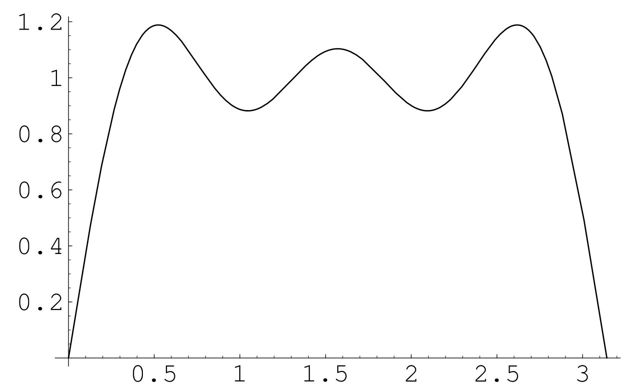
Adibidea, jarraipena

Batugai bat:



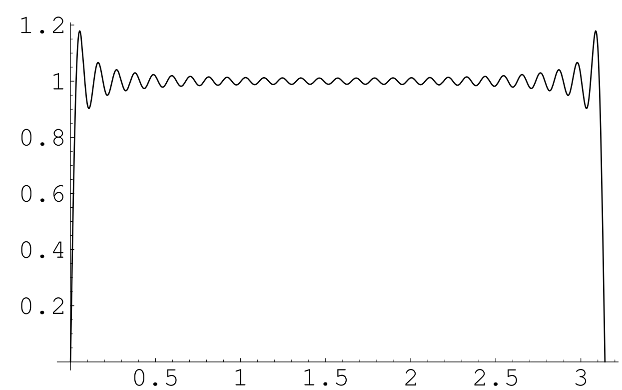
Adibidea, jarraipena

Hiru batugai:



Adibidea, jarraipena

Hogeita bederatzi batugai:



2. Adibidea

$$Ly := -y'' - 2y' - y\,,\ \mathrm{dom}(L) = \left\{y \in C^2[0,\pi] :\ y(0) = y(\pi) = 0\right\}\,.$$

Balio propioen problema:

$$Ly = \lambda y \equiv y'' + 2y' + (1+\lambda)y = 0\,, \quad y(0) = y(\pi) = 0\,.$$

Ekuazioaren soluzio orokorra ($\lambda \neq 0$):

$$y(x) = e^{-x}\left[\alpha \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) + \beta\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)\right]$$

0 puntuko baldintza: $\beta = 0$; π puntuko baldintza: $\alpha e^{-\pi}\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right)$. Soluzioa tribiala *ez* izateko:

$$\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0\,.$$

2. adibidea, jarr.

Ekuazio sekularra: $\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0$, bere soluzioa: $\lambda \in \left\{n^2\right\}_{n=1}^{\infty}$. ($\lambda = 0$ bere aldetik aztertuz, ez da balio propioa)

Funtzio propioak

$$y_n(x) = e^{-x}\sin(nx)\,.$$

Ortogonaltasuna? Barne biderketa kanonikoa $\langle f, g\rangle = \int_0^\pi \mathrm{d}x\,\overline{f}(x)g(x)$.

$$\begin{aligned}\langle y_n, y_m\rangle &= \int_0^\pi \mathrm{d}x\, e^{-2x}\sin(nx)\,\sin(mx)\\ &= \mathrm{nahaste-borrastea}\,.\end{aligned}$$

2. adibidea jarr.

Barne biderketa *haztatua*, haztapena $\rho(x) = e^{2x}$

$$\langle f, g\rangle_\rho = \int_0^\pi \mathrm{d}x\,\overline{f}(x)e^{2x}g(x)$$

$$\begin{aligned}\langle y_n, y_m\rangle_\rho &= \int_0^\pi \mathrm{d}x\, e^{-2x}\sin(nx)\,\sin(mx)\,e^{2x}\\ &= \delta_{nm}\frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

2. adibidea jarr.

$\{e^{-x}\sin(nx)\}_{n=1}^{\infty}$ *oinarri ortogonala*:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\mathrm{d}\xi\, e^{2\xi}\, e^{-\xi}\sin(n\xi)\, f(\xi)\right)e^{-x}\sin(nx)\ .$$

Bardintza $L^2\left([0,\pi]\right)_\rho$ espazioan; *ez da* (orokorrean) funtzioen berdintza.

2. adibidea jarr.

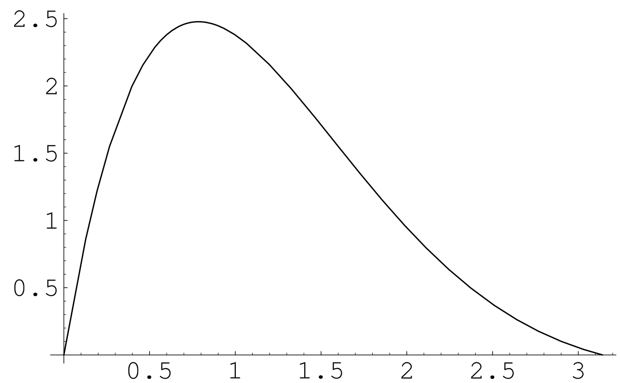
Adibidez, $f(x)=1$. $L^2\left([0,\pi]\right)_\rho$ *espazioan*

$$1=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\,(1-(-1)e^{\pi})}{n^2+1}e^{-x}\sin(nx)\ .$$

Ez da puntuz-puntuko berdintza.

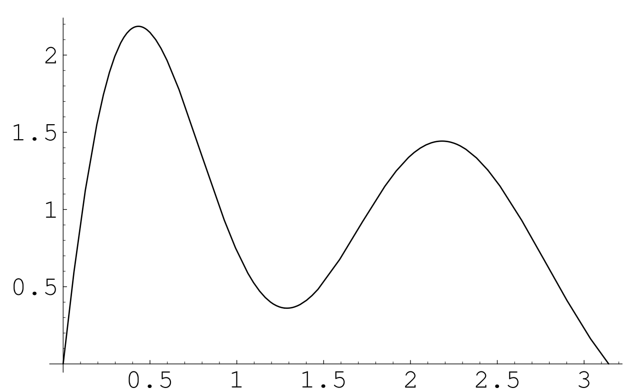
2. adibidea jarr.

Batugai bat:



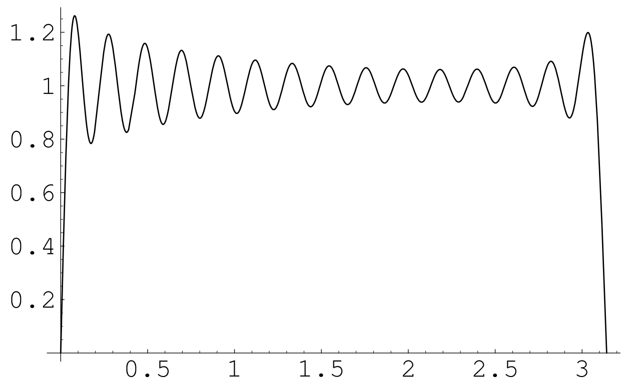
2. adibidea jarr.

Hiru batugai:



2. adibidea jarr.

Hogeita bederatzi batugai:



2.2 Analogia aljebraikoa

Analogia aljebraikoa

Demagun $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Bektore propioak $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eta $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ez dira ortogonalak... barne biderketa kanonikoarekiko.

Hala ere, defini dezagun $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_B = \mathbf{a}^\dagger \cdot (B\mathbf{b})$, non $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ definitu positiboa den. $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ barne biderketa da.

Eta $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eta $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ortogonalak dira $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ biderketarekiko.

Gainera, $A^\dagger B = BA$, beraz, A simetrikoa da $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ biderketarekiko.

2.3 Simetria izateko baldintzak

Analisi orokorra

Demagun $(L[y])(x) = a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x)$ *adierazpen diferentziala*. Zatikako integrazioz,

$$\begin{aligned}
\int_a^b \mathrm{d}x\, \rho \bar{f} L[g] &= \int_a^b \mathrm{d}x\, \rho \bar{f}\left(a_0 g'' + a_1 g' + a_2 g\right) \\
&= \left[\rho a_0\left(\bar{f} g' - \bar{f}' g\right) + \left(a_1 \rho - (a_0\rho)'\right)\bar{f} g\right]_a^b + \\
&\quad \int_a^b \mathrm{d}x\, \left[\left(a_0 \rho \bar{f}\right)'' - \left(a_1 \rho \bar{f}\right)' + a_2 \bar{f} \rho\right] g
\end{aligned}$$

Analisi orokorra

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \mathrm{d}x\, \rho \bar{f} L[g] \quad &= \quad \text{B.T.} + \int_a^b \mathrm{d}x\, \rho \overline{L[f]} g + \\
&\int_a^b \mathrm{d}x\, g \left\{ \rho \left(a_0 - \overline{a_0} \right) \bar{f}'' + \right. \\
&\quad \left[2 \left(\rho a_0 \right)' - \rho \left(a_1 + \overline{a_1} \right) \right] \bar{f}' + \\
&\quad \left. \left[\left(\rho a_0 \right)'' - \left(\rho a_1 \right)' + \rho \left(a_2 - \overline{a_2} \right) \right] \bar{f} \right\}
\end{aligned}
$$

Analisi orokorra

Nahi dugu, $\forall f,\ g \in \mathrm{dom}(L)$, soberazko gaiak desagertzea :

- $\bar{f}''$ gaia: $a_0 = \overline{a_0}$ erreala.
- $\bar{f}'$ gaia: $(\rho a_0)' = \rho \Re(a_1)$.
- $\bar{f}$ gaia: $(\rho \Im(a_1))' = 2\rho \Im(a_2)$.

Desagertzen dira a_i erreala *eta* $(\rho a_0)' = \rho a_1$ badira (hauen ondorioa;

$$
\rho(x) = \frac{1}{a_0(x)} \exp \left(\int^x \mathrm{d}\xi\, \frac{a_1(\xi)}{a_0(\xi)} \right)) .
$$

Adierazen diferentzial errealaren haztapena

Biz $(L[y])(x) = a_0(x) y''(x) + a_1(x) y'(x) + a_2(x) y(x)$ non a_i errealak diren, defini dezagun

$$
\rho(x) = \frac{1}{a_0(x)} \exp \left(\int^x \mathrm{d}\xi\, \frac{a_1(\xi)}{a_0(\xi)} \right) .
$$

Hau dela eta,

$$
\rho L[y] = \left(\rho a_0 y' \right)' + \rho a_2 y \, .
$$

Eta

$$
\int_a^b \mathrm{d}x\, \bar{f} \rho L[g] = \left[\rho a_0 \left(\bar{f} g' - \bar{f}' g \right) \right]_a^b + \int_a^b \mathrm{d}x\, \overline{L[f]} \rho g \, .
$$

Eragile simetrikoa eta mugalde baldintzak

L eragilearen eremuaren definizioan mugalde baldintzak sartzen dira. Eremua ondo aukeratuz gero, aurreko adierazpenetan mugalde gaiak desagertuko dira $\forall f,\ g \in \mathrm{dom}(L)$, eta L eragileari $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$ biderketarekiko simetrikoa deritzogu. Hala izan, balio propioak errealak dira, eta balio propio ezberdineko funtzio propioak ortogonalak dira $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$ biderketarekiko. (Alderantzizko baieztapena ez da betetzen)

2.4 Mugalde baldintza homogeneoak

Mugalde baldintza homogeneoak

Demagun ρ eta a funtzio "zintzoak"direla, eta ezberdin zero tartearen muturretan. Kasu honetan, mugalde gaiak nuluak izan daitezke baldin eta, *mutur bakoitza bere aldetik*, eragilearen eremuko edozein elementu bikoterentzat W wronskiarra nulua bada, non

$$W[\bar{f}, g](x) := \bar{f}(x)g'(x) - \bar{f}'(x)g(x)\,.$$

Honek eta *eremuaren linealtasunak* sortzen dituzte ondoko formako baldintzak:

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0\,, \qquad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0\,,$$

eta hauei *mugalde baldintza homogeneoak* (eta bananduak) deritzegu.

M.B. homogeneoak: adibidea

$$Ly = -y''\,, \qquad y(0) = 0\,, \quad y'(\pi) = 0\,.$$

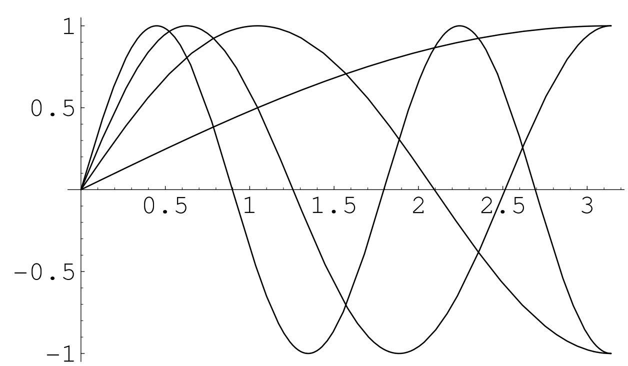
Ekuazioari ($y'' + \lambda y = 0$) dagokionez, bi kasu: 1) $\lambda = 0$ kasuan, soluzio orokorra $ax + b$ dugu (soluzio orokorra soluzio familia da); aldi berean soluzioa izateko eta mugalde baldintzak betetzeko: tribiala, $y = 0$.

2) $\lambda \neq 0$ kasuan, soluzio orokorra $a \sin \sqrt{\lambda}x + b \cos \sqrt{\lambda}x$ dugu; 0 puntuko m.b.-k $b = 0$ ondorioa dakar; π puntuan, *ekuazio sekularra* $\cos \sqrt{\lambda}\pi = 0$, soluzioaK $\lambda_k = (2k+1)^2/4$ for $k = 0, 1, 2, \ldots$

Funtzio propioak:

$$y_k = \sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right)\,.$$

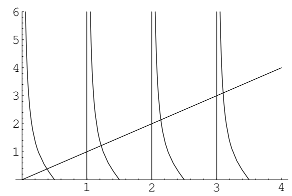
Adibidea



M.B. homogeneoak: 2. adibidea

$$Ly = -y'' - 2y' - y\,, \qquad y(0) + y'(0) = 0\,, \quad y'(\pi) = 0$$

0 ez da balio propioa. $\lambda \neq 0$ kasuan soluzio orokorra $e^{-x}\left(a\sin\sqrt{\lambda}x + b\cos\sqrt{\lambda}x\right)$ da. 0 puntuan m.b. dela eta, $a = 0$. π-n m.b., ekuazio sekularra $\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi = \cos\sqrt{\lambda}\pi$. Soluzio grafikoak



2.5 Mugalde baldintza periodikoak

Mugalde baldintza (pseudo)periodikoak

Bi alboak lotuta A matrize baten bidez:

$$\begin{pmatrix} y(b) \\ y'(b) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \end{pmatrix}$$

Wronskiarra determinantea da, beraz,

$$W[\bar{f}, g](b) = |A| W[\bar{f}, g](a)$$

eta mugalde gaiak nuluak dira baldin

$$\rho(b)a_0(b)|A| = \rho(a)a_0(a)\,.$$

M.B. periodikoak, adibideak

$$Ly = -y''\,, \qquad y(0) = y(l)\,, \quad y'(0) = y'(l)\,. \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Funtzio propioak: $y_0(x) = 1$, $y_k^e(x) = \cos\left(\frac{2\pi kx}{l}\right)$, $y_k^o(x) = \sin\left(\frac{2\pi kx}{l}\right)$, balio propioak $\lambda_0 = 0$, $\lambda_k = 4\pi^2k^2/l^2$, endekapen bikoitza $k = 1, 2, \ldots$

$$Ly = -y''\,, \qquad \begin{pmatrix} y(l) \\ y'(l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}$$

M.B. periodikoak, adibideak

$$Ly = y'' + 2y' + y\,, \qquad y(0) = e^l y(l)\,, \quad y'(0) = e^l y'(l)\,.$$
$$A = \begin{pmatrix} e^{-l} & 0 \\ 0 & e^{-l} \end{pmatrix}\,, \qquad \rho(x) = e^{2x}\,.$$

Funtzio propioak: $y_0(x) = e^{-x}$, $y_k^e(x) = e^{-x}\cos\left(\frac{2\pi kx}{l}\right)$, $y_k^o(x) = e^{-x}\sin\left(\frac{2\pi kx}{l}\right)$, balio propioak $\lambda_k = -4\pi^2k^2/l^2$, endekapen bikoitza $k = 1, 2, \ldots$

M.B. periodikoak, endekapena

Bitez $y_1(x;\lambda)$ eta $y_2(x;\lambda)$ funtzio linealki independenteak $a_0y''+a_1y'+a_2y = \lambda y$ ekuazioaren soluzioak. Soluzio orokorra eta bere deribatua honela idatz ditzakegu

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x;\lambda) & y_2(x;\lambda) \\ y_1'(x;\lambda) & y_2'(x;\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Mugalde baldintza periodikoak direla eta,

$$\left[A \begin{pmatrix} y_1(a;\lambda) & y_2(a;\lambda) \\ y_1'(a;\lambda) & y_2'(a;\lambda) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1(b;\lambda) & y_2(b;\lambda) \\ y_1'(b;\lambda) & y_2'(b;\lambda) \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0\,.$$

M.B. periodikoak, endekapena

Tribiala ez den soluzioa existetzeko baldintza:

$$\left|A \begin{pmatrix} y_1(a;\lambda) & y_2(a;\lambda) \\ y_1'(a;\lambda) & y_2'(a;\lambda) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1(b;\lambda) & y_2(b;\lambda) \\ y_1'(b;\lambda) & y_2'(b;\lambda) \end{pmatrix}\right| = 0\,.$$

Matrizea nulua bada balio propio batentzat, α eta β sistema linealaren soluzio espazioaren dimentsioa bi da, eta endekapen bikoitza agertzen da.

2.6 Mugalde baldintza singularrak

Mugalde baldintza singularrak

Mutur batean $\rho a_0 = 0$ bada, badirudi inolako baldintzarik beharrezkoa ez dela.

Ez da egia: wronskiarrak eztanda egingo balu, posible izango litzateke $\rho a_0 W$ funtzioaren limitea nulua ez izatea!

M.B. singularra: adibidea

$$Ly = -y'' - \frac{1}{x}y'\,, \qquad y(0)? \quad y(1) = 0\,.$$

$\rho(x) = x$, $a_0(x) = -1$, beraz $\rho(0)a_0(0) = 0$. Balio propioen ekuazioa: Bessel, zerogarrena, $y'' + y'/x + \lambda y = 0$. Berretura seriearen bidezko soluzioa, $y(x) = \alpha J_0\left(\sqrt{\lambda}x\right) + \beta Y_0\left(\sqrt{\lambda}x\right)$.

$x \to 0$ limitean, $Y_0 \sim \ln x$, $Y_0'(x) \sim 1/x$.

$\rho a_0 W \to$ konstantea da (edo dibergentea) orokorrean. Nulua Y_0 osagairik ez badago $\Rightarrow 0$ puntuan mugalde baldintza: funtzio erregularrak.

Mugalde baldintza singularrak: adibidea

1 puntuan m.b.: ekuazio sekularra $J_0\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0$. Funtzio propioak: $y_n(x) = J_0(\sqrt{\lambda_n}x)$.

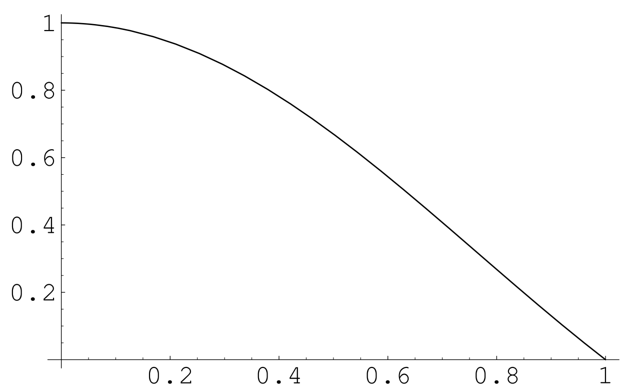
Garapenak:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{J_1^2(\sqrt{\lambda_n})} \left(\int_0^1 \mathrm{d}\xi\, f(\xi) J_0(\sqrt{\lambda_n}\xi) \right) J_0(\sqrt{\lambda_n}x)\,.$$

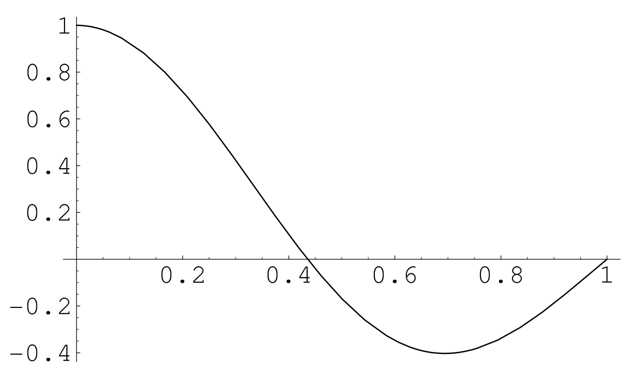
[Horretarako:

$$\langle y_n, y_m \rangle_\rho = \int_0^1 \mathrm{d}x\, x\, J_0(\sqrt{\lambda_n}x) J_0(\sqrt{\lambda_m}x) = \delta_{nm} \frac{1}{2} J_1^2(\sqrt{\lambda_n})\,.]$$

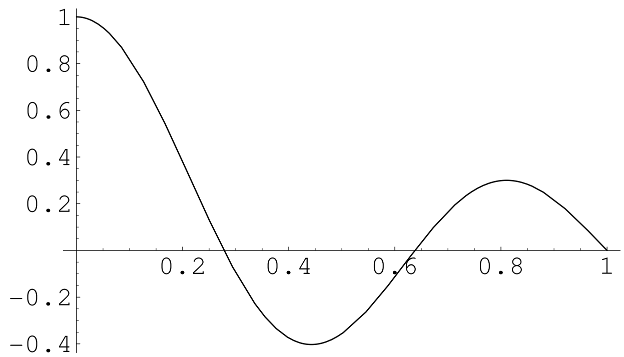
Mugalde baldintza singularrak: adibidea



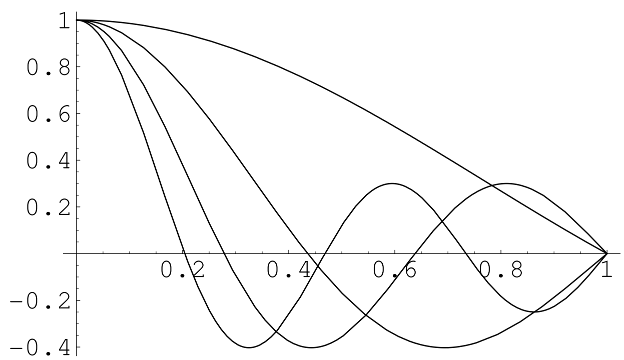
Mugalde baldintza singularrak: adibidea



Mugalde baldintza singularrak: adibidea



Mugalde baldintza singularrak: adibidea



3 Sturm-Liouville-ren teoria

3.1 Banaketa eta alderaketaren teoremak

Banaketaren teorema

Bitez y_1 eta y_2 funtzioak ekuazio diferentzial baten soluzio independenteak. Demagun x_1 eta x_2 ondoz ondoko y_1-ren erroak direla ($y_1(x_1) = y_1(x_2)$).

y_2 funtzioak erro bat du x_1 eta x_2 puntuen artean.

Frogapena: (reductio ad absurdum) Demagun $y_2 \neq 0\,\forall x \in (x_1, x_2)$; ondorioz y_1/y_2 jarraitua da, eta nulua (x_1, x_2) tartearen muturretan. Hau honela izanda $(y_1/y_2)'$ funtzioak nulua izan behar da tartearen puntu batean (gutxienez bat). Baina

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \frac{1}{y_2^2} W[y_2, y_1]$$

ez da inon nulua izango, kontraesana.

Sturm-en oinarrizko teorema

Bitez u eta v hurrenez hurren ekuazioen soluzioak, $(pu')' = q_1 u$ eta $(pv')' = q_2 v$ non $q_1 \geq q_2$, $q_1 \neq q_2$, $p > 0$ diren. Hau honela, x_1 eta x_2 ondoz ondoko u-ren erroak badira, v funtzioak erro bat du (x_1, x_2) tartean.

Adibidez:

$$y'' + m^2 y = 0$$

ekuazioaren soluzioak

$$y'' + n^2 y = 0$$

ekuazioarenak baino azkarrago oszilatzen dira $m > n$ bada.

4 Fourier-en analisia

Fourier-en eragilea

$$Ly = -y'' , \qquad y(\tau) = y(\tau + T) , \quad y'(\tau) = y'(\tau + T) .$$

Balio propioak: $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, \cdots$, endekapen bikoitza, eta $\lambda_0 = 0$, endekapenik gabe.

Funtzio propioak: balio propio endekatuentzat aukera batzuk:

$$1) \left\{ \cos \frac{2n\pi(t-\tau)}{T} \right\} \cup \left\{ \sin \frac{2n\pi(t-\tau)}{T} \right\} ;$$

$$2) \left\{ \cos \frac{2n\pi t}{T} \right\} \cup \left\{ \sin \frac{2n\pi t}{T} \right\} ;$$

Fourier-en garapenak

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} \mathrm{d}s\, f(s) \cos \frac{2\pi s}{T} ,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} \mathrm{d}s\, f(s) \sin \frac{2\pi s}{T} ,$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2\pi t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi t}{T} \right] .$$

Batez besteko konbergentzia, Gibbs-en fenomenoa.

Garapen periodikoak

Garapena $t \in (\tau, \tau + T)$ tartean definitu dugu. Luzapen periodikoa lerro erreal osora.

Alderantziz: T periodoa duen funtzio periodikoak aurreko garapen mota onartzen du, integrala T luzerako *edozein* tartetan eginda.

Parseval-en teorema

T luzerako edozein tartetan, T periodoa duen edozein funtziorentzat:

$$\frac{1}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} \mathrm{d}s\,|f(s)|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)\ .$$

Gaiz gai deribazioa eta integrazioa

f funtzioa "zintzoa"bada, bere Fourier-en garapena gaiz gai integratu eta deribatu dezakegu.