1. ¿Es lo que sigue cierto para todo $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$?

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(x)\cos(nx)\; dx \;&=\; \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big[\; \cos(n+1)x + \cos(n-1)x \;\big] dx \\ &=\; \frac{1}{2}\left[\; \frac{\sin(n+1)x}{n+1} \;+\; \frac{\sin(n-1)x}{n-1} \;\right]_0^{2\pi} = 0\,. \end{aligned}$$

2. Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dos soluciones del problema consistente en una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden $\mathrm{L}y = 0$ con condiciones de contorno $y(0) = 1$, $y(1) = 0$.

Verdadero o falso: La combinación lineal $y(x) = 3y_1(x) + 2y_2(x)$ es solución.

3. Una ecuación diferencial en derivadas parciales en la que todas las derivadas son respecto a una variable se integra como si fuera una ecuación diferencial ordinaria, pero reemplazando las constantes de integración por funciones arbitrarias de las demás variables.

a) Encuentre la solución general $u(x, y)$ de la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4x^4 u = x e^y\,.$$

b) ¿Y si u fuera una función de tres variables x, y, z?

c) Obtenga la solución general de $u_{xy} = 0$.

4. Verdadero o falso:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}\Big|_{-1}^{1} = -2$$

5. Encuentre una función ϕ cuyo gradiente sea $\nabla\phi = y^2 z\; \hat{\imath} + (2xyz + 3)\; \hat{\jmath} + (xy^2 - 2z)\; \hat{k}$. ¿Existe alguna relación entre las superficies definidas por la condición $\phi(x, y, z) =$ cte. y el campo vectorial $\nabla\phi$?

6. A partir de $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, e^{-ax^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/a}$, obtenga

$$\begin{aligned} I_{2n}(a) &:= \int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^{2n} e^{-ax^2} = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\frac{\pi}{a^{2n+1}}}\,, \\ I_{2n+1}(a) &:= \int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^{2n+1} e^{-ax^2} = \frac{n!}{2a^{n+1}}\,. \end{aligned}$$

7. Una función par es aquella que satisface $f(-x) = f(x)$; una función impar, $f(-x) = -f(x)$.

a) Demuestre que toda función con dominio $(-l, l)$ puede expresarse como suma de una función par y otra impar. (La función e^x es, por tanto, suma de una función par y otra impar. ¿Qué nombre reciben?)

b) Demuestre que $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0$ si f es impar.

c) Determine si alguna de las siguientes funciones es par o impar:

$$i)\ f(x) = (2x - x^3)^4\,; \quad ii)\ f(x) = \ln|\sin x|\,; \quad iii)\ f(x) = x^3 - 2x + 1\,.$$

d) Demuestre que la derivada de una función par es impar, y viceversa. ¿Qué podemos decir sobre $F = \int_0^x f(t)dt$?

8. Determine si las siguientes funciones son periódicas. Si lo son, ¿cuál es su período? $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ excepto en d), donde $n = 1, 2, ...$

$$a) \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & 2n-1 \le x < 2n \\ 1 & 2n \le x < 2n+1 \end{cases}$$

$$b) \qquad f(x) = \begin{cases} (-1)^n & 2n-1 \le x < 2n \\ 1 & 2n \le x < 2n+1 \end{cases}$$

$$c) \qquad f(x) = \tan(\pi x)$$

$$d) \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \frac{1}{2n+1} \le x < \frac{1}{2n} \\ 0 & \frac{1}{2n} \le x < \frac{1}{2n-1} \end{cases}$$

9. Calcule las siguientes integrales por medio de derivación con respecto a parámetros.

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,, \qquad \int_0^\infty \mathrm{d}x\, \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2}\,.$$

Calcule el comportamiento del integrando para $x \approx 0$ y para $x \to \infty$. ¿Pueden ser calculadas las siguientes integrales?

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, \frac{e^{-ax}}{x}\,; \qquad \int_0^\infty \mathrm{d}x\, \frac{e^{-ax^2}}{x^2}\,.$$

10. Verdadero o falso: El tomar un término más en una aproximación de Taylor mejora la aproximación.

Considere los primeros términos del desarrollo de Taylor de la función coseno en torno al punto 0. Evalúelos para $x = 2\pi$. ¿Qué está ocurriendo?

11. Sume la siguiente serie e indique su rango de validez:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^{n+4}\,.$$

12. Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{x} = yz\,, \qquad \dot{y} = xz\,, \qquad \dot{z} = -2xy$$

¿Cuáles son las primeras integrales de este sistema? ¿Cuál es la interpretación geométrica de las primeras integrales? ¿Y la interpretación geométrica de las soluciones del sistema? Escriba la solución general.

13. Considere la ecuación diferencial ordinaria $y'' + \lambda^2 y = 0$. Escriba aquellas soluciones de la ecuación que cumplan la condición $y(0) = 0$. ¿Es posible que simultáneamente se cumpla que $y(\pi) = 0$?