1. Dada una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \qquad (i)$$

buscamos un factor integrante $\mu(x)$ tal que, al multiplicar la ecuacion (i) por $\mu(x)$, resulte

$$\left[\mu(x)P(x)y'\right]' + \mu(x)R(x)y = 0\,. \qquad (ii)$$

a) Demuestre que μ debe ser solución de la ecuación $P\mu' = (Q - P')\mu$, y obtenga

$$\mu(x) = C\frac{1}{P(x)}\exp\int \mathrm{d}x\,\frac{Q(x)}{P(x)}\,,$$

donde C es una constante arbitraria.

b) Transforme las siguientes ecuaciones diferenciales en ecuaciones de la forma (ii):

$$\begin{aligned} y'' - 2xy' + \lambda y &= 0\,, && \text{ec. de Hermite}\,,\\ x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y &= 0\,, && \text{ec. de Bessel}\,,\\ xy'' + (1-x)y' + \lambda y &= 0\,, && \text{ec. de Laguerre}\,,\\ (1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y &= 0 && \text{ec. de Tchebyschev}\,. \end{aligned}$$

¿Por qué es interesante esta transformación?

2. Calcule el producto escalar en $L_2(0,\infty)_w$ de las funciones $f(x) = 2$ y $g(x) = 3x$ con una función peso $w(x) = e^{-x^2}$. Encuentre una combinación lineal $\alpha f + \beta g$ que sea ortogonal a f y de norma unidad. Repita el problema en $L_2(-\infty,\infty)_w$.

$$\text{Nota :} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha \mathrm{x}^2}\mathrm{dx} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,.$$

3. El método de ortogonalización de Gram-Schmidt transforma un conjunto de vectores $\{v_1, v_2 ... v_n\}$ linealmente independientes en un conjunto ortogonal $\{e_1, e_2 ... e_n\}$ mediante el proceso inductivo

$$\begin{aligned} e_1 &= v_1\,,\\ e_2 &= v_2 - \frac{< e_1, v_2 >}{< e_1, e_1 >}\, e_1\,,\\ &\vdots \\ e_n &= v_n - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{< e_i, v_n >}{< e_i, e_i >}\, e_i\,. \end{aligned}$$

a) Compruebe gráficamente que el método funciona para $n = 3$.

b) Las funciones $f_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2 ...$ forman una base no ortogonal en $L_2[-1, 1]$. Utilizando Gram-Schmidt encuentre los primeros cuatro términos de la correspondiente base ortogonal.

c) Los polinomios de Legendre $\{P_0(x), P_1(x), \ ... \ \}$ se obtienen a partir de dicha base ortogonal imponiendo la condición de normalización $P_i(1) = 1$. Calcule $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ y $P_3(x)$. (¿En que problema físico aparecen estos polinomios?)

4. Encuentre **gráficamente** las autofunciones del problema regular homogéneo de Sturm Liouville $y'' + \lambda y = 0$ con las condiciones de contorno *i)* $y(0) = y'(1) = 0$; *ii)* $y'(3) = y'(7) = 0$; *iii)* $y(-\frac{\pi}{2}) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$; *iv)* $y'(-5.2) = y(-3.4) = 0$.

5.* Demuestre que las autofunciones del sistema de Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(1) - 2y'(1) = 0$$

son $\{\sin\sqrt{\lambda_n}x\}$, siendo los autovalores soluciones de la ecuación transcendental $\tan\sqrt{\lambda} = 2\sqrt{\lambda}$ excepto para $\lambda = 0$. Examinando gráficamente la ecuación transcendental, compruebe que $\lambda_n \approx ((2n-1)^2\pi^2/4$ cuando $n \to \infty$. Desarrolle $f(x) = x$ en términos de las autofunciones (el desarrollo difiere del las series de Fourier "normales" en que no es armónica, es decir, las frecuencias no son múltiplos de una frecuencia fundamental).

6. Estudie la ecuación $y'' + 2y' + y + \lambda y = 0$, en el intervalo $(0, \pi)$, bajo las condiciones $y(0) = y(\pi)$ e $y'(0) = e^{2\pi}y'(\pi)$. ¿Hay degeneración?

7. Compruebe que la ecuación

$$y'' + a\delta(x)y + \lambda y = 0\,,$$

en el intervalo $(-\pi, \pi)$ y bajo la condición $y(\pm\pi) = 0$, siendo a real, da lugar a valores propios positivos, que satisfacen la igualdad

$$\tan(\pi\sqrt{\lambda}) = \frac{2\sqrt{\lambda}}{a}\,.$$

[Además de estos tiene otra familia de valores propios, dados por $\lambda_n^{(e)} = n^2$] ¿Qué se requiere para que haya valores propios negativos? Compare con la ecuación de Schrödinger, proporcione una explicación física.

8. Estudiemos el operador

$$Ly = \frac{1}{4}(1+x^2)^2 y'' + \frac{1}{2}x(1+x^2)y' + ay\,,$$

en el intervalo $(-1, 1)$. a es una constante. El dominio de definición de L lo componen las funciones que se anulan en los puntos -1 y 1. ¿Cuál es el peso útil? Haciendo el cambio de variable $x = \tan(\theta/2)$, calcule los valores propios y las funciones propias.

9.* (**Propiedades de las funciones de Bessel**) Las funciones $J_n(x)$, es decir, las funciones de Bessel de primera especie, cumplen la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0\,.$$

Para n entero se cumple

$$J_n(0) = \delta_{n0}\,,$$

donde δ_{nm} es la delta de Kronecker, y

$$J_n'(x) = \frac{1}{2}\left(J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right)\,.$$

Demuestre que la función

$$g(x,t) = e^{x(t-1/t)/2}$$

es la función generatriz de las funciones de Bessel, esto es, que satisface la siguiente igualdad

$$e^{x(t-1/t)/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n \,.$$

(*Sugerencia:* Demuestre que ambos lados de la igualdad cumplen la misma ecuación diferencial en derivadas parciales. A continuación demuestre que $g(0,t)$ y $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(0)t^n$ coinciden. Asimismo, demuestre que $\partial_x g(0,t)$ y $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(0)t^n$ son iguales. De estos tres hechos concluya el resultado pedido)

Por derivación de la función generatriz, obtenga las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)\,; \\ &\text{b)} \quad J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J_n'(x)\,. \end{aligned}$$

Haciendo uso de ellas, consiga las que se expresan a continuación:

$$\begin{aligned} &\text{c)} \quad \frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right] = x^n J_{n-1}(x)\,; \\ &\text{d)} \quad \frac{d}{dx}\left[x^{-n} J_n(x)\right] = -x^{-n} J_{n+1}(x)\,. \end{aligned}$$

Compruebe, usando la propiedad $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, que la relación d) es consecuencia de la c).

10. Sin usar el teorema de Sturm-Liouville, demuestre directamente que las funciones $J_\nu(\lambda_n^{(\nu)} x)$ y $J_\nu(\lambda_m^{(\nu)} x)$ son ortogonales en el intervalo $(0,1)$ con respecto al peso x, en el caso $m \neq n$, y siendo $J_\nu(\lambda_n^{(\nu)}) = J_\nu(\lambda_m^{(\nu)}) = 0$. (Sugerencia: use la propia ecuación de Bessel e integración por partes para estudiar el wronskiano de esas dos funciones).

11.* (**Propiedades de los polinomios de Legendre**) Usando la función generatriz de los polinomios de Legendre

$$F(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \,, \quad |t| < 1\,,$$

obtenga la siguiente expresión para la distancia entre dos puntos:

$$\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\theta)\,, \quad \begin{cases} r_< = \min(r_1, r_2) & \text{y} \\ r_> = \max(r_1, r_2) & , \end{cases}$$

siendo $\cos\theta = \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 / (r_1 r_2)$.

Por derivación de la función generatriz, obtenga las siguientes relaciones:

a) $(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$;
b) $P_n'(x) - 2xP_{n-1}'(x) + P_{n-2}'(x) = P_{n-1}(x)$;
c) $P_{n+1}'(x) - xP_n'(x) = (n+1)P_n(x)$;

d) $xP_n'(x) - P_{n-1}'(x) = nP_n(x)$;
e) $P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = (2n+1)P_n(x)$;
f) $(x^2-1)P_n'(x) = nxP_n(x) - nP_{n-1}(x)$.
Compruebe que los polinomios de Legendre, $P_n(x)$, son soluciones de la ecuación

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0\,.$$

Verifique, usando la función generatriz, que $P_n(1) = 1$. Sea la expresión diferencial $Ly = -(1-x^2)y'' + 2xy'$. ¿De qué tipo es? ¿Bajo qué condiciones tendremos un operador de Sturm-Liouville "aprovechable"? ¿Existe alguna relación entre los polinomios de Legendre y este operador? ¿Con respecto a qué producto escalar serán ortogonales los polinomios de Legendre?

12.* **¡Difícil!** Considere el problema determinado por la ecuación $u'' + \omega^2\,(1 + a\delta(x))\,u = 0$ y las condiciones de contorno $u(l) = u(-l)$ y $u'(l) = u'(-l)$. ¿Para qué valores de ω existe solución no trivial? (Advertencia: no olvide examinar la posibilidad de valores complejos).

13.* Considere el espacio de funciones definidas en la recta real, normalizables con función peso unidad (dese cuenta de que su representante continuo tiende a cero al menos tan rápidamente como x^{-1} cuando $|x| \to \infty$). Alguno de los siguientes operadores es hermítico, definidos sobre ese espacio?

$$i) \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x\,; \quad ii) \quad -i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x^2\,; \quad iii) \quad ix\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,; \quad iv) \quad i\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\,.$$