1. Obtenga la serie de Fourier de cada una de las siguientes funciones. Suponga una extensión periódica de las funciones fuera de los intervalos originales

$$a)\ f(x)=\sin^2 x, \qquad -\pi\le x\le\pi \qquad T=2\pi$$

$$b)\ f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\le x<0\\ x & 0\le x<\pi\end{cases} \qquad T=2\pi$$

$$c)\ f(x)=(1-x^2) \qquad -1\le x\le 1 \qquad T=2$$

2. Sea $f(t)$ una función par, continua a trozos y periódica, con periodo T. Determine cuáles de estas expresiones son correctas para la serie de Fourier de $f(t)$:

$$a)\quad \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\omega t),\quad \text{donde}\quad \omega=2\pi/T,\ a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)dx$$

$$b)\quad \frac{b_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cos(n\omega t),\quad \text{donde}\quad \omega=2\pi/T,\ b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/4}^{3T/4} f(x)\cos(n\omega x)dx$$

$$c)\quad \frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\Omega t),\quad \text{donde}\quad \Omega=\pi/T,\ c_n=\frac{1}{T}\int_0^{2T} f(x)\cos(n\Omega x)dx$$

$$d)\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}d_n e^{in\omega t},\quad \text{donde}\quad \omega=2\pi/T,\ d_n=\frac{1}{T}\int_0^{T} f(x)e^{-in\omega x}dx$$

Determine los cuatro primeros términos en cada caso para la función constante $f(t)=1$.

3. Considere la función $f(x)$ que coincide con el coseno en $(0,\pi)$. a) Dibuje la función periódica de periodo π que coincide con $f(x)$ en $(0,\pi)$ y halle su desarrollo en serie de Fourier. b) Encuentre una serie de Fourier de senos y otra de cosenos para $f(x)$ y dibujarlas. Indique en cada caso si las sumas parciales presentarán el fenómeno de Gibbs en $x=0$.

4. Cuando tenemos una función $f(x)$ definida en $0\le x\le L$, podemos representar f por una serie de cosenos o por una serie de senos construyendo extensiones pares o impares de f, respectivamente. Estas no son las únicas posibilidades; en este problema mostramos cómo pueden construirse otras series de Fourier que converjan a una función dada f en $(0,L)$.

a) Extendamos f a $(L,2L]$ de manera arbitraria. Despues extendamos la función resultante a $(-2L,0)$ como una función impar, y de ahí a todo el eje X como una función periódica de periodo $4L$. Muestre que esta función tiene una serie de Fourier de senos de la forma

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\pi x/2L)$$

donde

$$b_n=\frac{1}{L}\int_0^{2L}f(x)\sin(n\pi x/2L)dx$$

b) Extendamos f a $(L,2L]$ de manera que sea simétrica respecto a $x=L$, es decir, $f(2L-x)=f(x)$ para $0\le x\le L$. Entonces extendamos la función resultante a $(-2L,0)$ como una función impar, y de ahí a todo el eje X como una función periódica de periodo $4L$. Muestre que esta función tiene una serie de Fourier de senos de la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin[(2n-1)\pi x/2L]$$

donde

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin[(2n-1)\pi x/2L]dx$$

Ambas series convergen a la función original en $(0, L)$. De hecho, la segunda converge en $(0, L]$ (explique).

5. Calcule el desarrollo de Fourier de la función $f(x) = x$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Usando ese desarrollo, demuestre la siguiente igualdad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}\,.$$

6. Calcule el desarrollo de Fourier de la función $f(x) = \exp(x)$ en el intervalo $(-1, 1)$. ¿Cuál es el valor del desarrollo en el punto $x = 2$?

7. Integrando término a término el desarrollo del ejercicio anterior, y desarrollando en el mismo intervalo una función adecuada, demuestre (¡!) que $\int \mathrm{d}x\, \exp(x) = \exp(x) + c$. Asimismo, demuestre la siguiente igualdad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2} = \frac{e + 1/2 - e^2/2}{e^2-1}\,.$$

¿Qué ocurriría si derivábamos término a término el desarrollo del ejercicio anterior? Demuestre que tendríamos como consecuencia el siguiente resultado sin sentido: $\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m = -1/2$.

8. Consideremos una onda cuadrada y periódica, de período T. Demuestre que un filtro de paso de baja no necesita ser muy bueno para permitir el paso de la mayor parte de la potencia (esto es, calcule el número de armónicos que se requieren para transmitir el 90% de la potencia).

9. Compruebe que el desarrollo de Fourier de la función $f(x) = |x|$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$ es el siguiente.

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}\,.$$

Integrando término a término, calcule el valor de la siguiente serie:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3}\,.$$