1. ¿Tiene función de Green el siguiente problema inhomogéneo?

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dx}\right] = 2(x+1)\,, \qquad\qquad y(1) = y(2) = 0 \quad ?$$

Si la respuesta es afirmativa, calcule la función de Green. Si en cambio es negativa, aclare por qué.

2. Uno de los dos siguientes problemas de contorno puede resolverse por el método de la función de Green, y el otro no.

$$i) \qquad \left(\frac{y'}{x+1}\right)' = \cos x \qquad\qquad y(0)=0, \qquad y(\sqrt{2}) + y'(\sqrt{2}) \;=\; 0$$

$$ii) \qquad \left(\frac{y'}{x+1}\right)' = \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}x \qquad\qquad y(0)=0, \qquad y(\sqrt{2}) - y'(\sqrt{2}) \;=\; 0$$

a) ¿Cuál no puede resolverse por este método? ¿Por qué?
b) Calcule la función de Green del otro problema.

3.* Consideremos el siguiente operador de Sturm-Liouville:

$$L[y](x) = -x^2 y''(x) - xy'(x)\,, \qquad D_L = \{y \in C^2(1, e^\pi) \,|\, y(1) = 0 \,\&\, y'\,(e^\pi) = 0\}\,.$$

Calcule las funciones y los valores propios del operador (esto es, los que satisfacen no trivialmente la ecuación $L[y] = \lambda y$). ¿Cómo se requiere que sea el producto escalar para que las funciones propias sean ortogonales? Resuelva el siguiente problema de Sturm-Liouville:

$$L[y](x) = \lambda y + \ln(x)\,, \qquad y(1) = 0 \quad \& \quad y'\,(e^\pi) = 0\,.$$

Calcule el inverso del operador $L_\lambda = L - \lambda$ (esto es, la función de Green G_λ, que cumple $L_\lambda G_\lambda(x,z) = \delta(x-z)$).

4. Consideremos el siguiente operador de Sturm-Liouville:

$$L[y](x) = -y'' - y' - \frac{1}{4}y\,, \qquad D_L = \{y \in C^2(0,1) \,|\, y(0) = 0 \,\&\, y'(1) + \frac{1}{2}y(1) = 0\}\,.$$

Calcule las funciones y los valores propios del operador. Resuelva el siguiente problema de Sturm-Liouville:

$$y'' + y' + \frac{1}{4}y = e^{-x/2}\,, \qquad y(0) = 0\,, \quad y'(1) + \frac{1}{2}y(1) = 0\,.$$

Calcule el inverso del operador $L_\lambda = L - \lambda$ (esto es, la función de Green G_λ, que cumple $L_\lambda G_\lambda(x,z) = \delta(x-z)$).

5. Calcule la función de Green para el problema $y''(x) = f(x)$, $y(0) = e^\mu y(\pi)$, $y'(0) = e^{-\mu} y'(\pi)$. ¿Qué ocurre cuando μ tiende a cero? (Adición: manteniendo las condiciones de contorno, ¿cuál sería la solución del problema dado por la ecuación $y''(x) + \lambda y(x) = \delta(x-z)$?)

6. Estudie la familia de problemas

$$x^2 y'' + 2xy' + \left(\lambda + \frac{1}{4}\right) y = f(x)\,, \qquad y(1) = y(e) = 0\,.$$

¿En qué casos tiene el problema solución única? ¿Por qué? Calcule las funciones y valores propios del operador asociado.

Desarrolle en esa base la función $1/\sqrt{x}$.

En el caso de existir, exprese la solución del problema para el valor $\lambda = 0$ por medio de una transformación integral de la función $f(x)$ (esto es, usando la forma compacta de la función de Green).

Aplique sus resultados a la resolución del problema

$$x^2 y'' + 2xy' + \frac{1}{4} y = \frac{1}{\sqrt{x}}\,, \qquad y(1) = y(e) = 0\,.$$

7. (Septiembre 2006) Considere la familia de problemas inhomogéneos parametrizados por λ

$$y'' + \frac{2}{x} y' - \frac{\lambda}{x^2} y = f(x)\,, \qquad y(1) = 0 = y'(2)\,.$$

¿Para qué valores de λ será posible escribir la solución en la forma $\int_1^2 \mathrm{d}\xi\, H(x,\xi) f(\xi)$? Calcule la función H para $\lambda = -1/4$, si es posible.

8. (Febrero 2007) Calcule la función de Green $G(t, t_0)$ solución de

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} G + \alpha \frac{\partial}{\partial t} G = \delta(t - t_0)$$

bajo las condiciones iniciales $G(0, t_0) = \frac{\partial}{\partial t} G(0, t_0) = 0$ para $t_0 > 0$. Use su resultado para calcular la solución de

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} = A e^{-\beta t} \theta(t)\,, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0\,,$$

donde θ es la función de paso de Heaviside.

9. Escriba la solución de la familia de problemas

$$y^{(\mathrm{IV})} = f(x)\,, \qquad y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0$$

por medio de una integral (esto es, $y(x) = \int_0^1 \mathrm{d}\xi\, G(x,\xi) f(\xi)$).

10. (Febrero 2008) Una partícula se mueve bajo los efectos de un potencial parabólico. En un cierto instante, en el que la particula está pasando por el lugar en el que se encuentra el mínimo del potencial, se enciende repentinamente una fuerza dependiente del tiempo, sinusoidal en el mismo. Tras un cierto intervalo, considerado como dato, la partícula regresa por primera vez al lugar del mínimo. Use el método de la función de Green para estudiar el problema. Comente la existencia y unicidad de la solución propuesta. Proporcione explicaciones para los casos excepcionales.¿Con qué velocidad se desplazaba la partícula en el instante en que se enciende la fuerza exterior?