1. Determine si el método de separación de variables se puede aplicar a problemas en los que aparezcan las siguientes ecuaciones en derivadas parciales, haciendo abstracción de las dificultades posibles debidas a las condiciones de contorno:

$$\begin{array}{ll} a) & xu_{xx} + u_t = 0\,, \\ b) & tu_{xx} + xu_t = 0\,, \\ c) & u_{xx} + u_{xt} + u_t = 0\,, \\ d) & [p(x)u_x]_x - r(x)u_{tt} = 0\,, \\ e) & u_{xx} + (x+y)u_{yy} = 0\,. \end{array}$$

2. Una esfera de radio R cumple la ecuación del calor; esto es, la temperatura $T(r,t)$ cumple la ecuación

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r} \right) ,$$

donde c es una constante. Calcule la función T en todos los puntos de la esfera para todo instante $t > 0$, bajo las siguientes condiciones:

a) la temperatura de la superficie de la esfera es nula en todo instante;
b) en todos los puntos de la esfera la temperatura es finita, incluyendo el centro, $r = 0$;
c) el valor inicial de la temperatura es

$$T(r,0) = \frac{T_0 R}{r} \sin\left(\frac{\pi r}{R}\right) .$$

(*Sugerencia:* Compruebe que la función $S(r,t) = rT(r,t)$ debe cumplir la ecuación $S_t = c^2 S_{rr}$. ¿Cuál es el valor de la función S en el centro de la esfera?)

3. Use los resultados de una hoja anterior para comprobar que

$$\frac{d}{dx}\left[x^2\left(J_m^2(x) - J_{m+1}(x)J_{m-1}(x)\right)\right] = 2xJ_m^2(x)\,.$$

De aquí obtenga una expresión para el producto escalar $\int_0^1 dx\, xJ_m(k_i x)J_m(k_j x)$, siendo $k_i = \sqrt{\lambda_i^{(m)}}$ y $k_j = \sqrt{\lambda_j^{(m)}}$ ceros de la función $J_m(x)$.

¿Qué son los números $\lambda_j^{(m)}$? (*Sugerencia:* Recuerde la existencia de los operadores de Sturm-Liouville...) ¿Por qué aparece x en el producto escalar?

4. Las vibraciones transversales de una membrana elástica vienen descritas por la ecuación de ondas $u_{tt} = a^2\nabla^2 u$, siendo la función $u(t,r,\theta)$ la deformación transversal. Supongamos una membrana circular con borde fijo, cuyo radio es la unidad. Asimismo supongamos que el instante $t = 0$ la deformación no depende del ángulo polar θ, y que se suelta la membrana sin velocidad inicial, esto es,

$$u(t,1,\theta) = 0, \quad t > 0 \qquad\qquad u(0,r,\theta) = f(r), \quad u_t(0,r,\theta) = 0 \qquad 0 \le r \le 1\,,$$

donde $f(r)$ es la configuración inicial, y la función f satisface la condición $f(1) = 0$. Además, u debe ser siempre acotada. Demuestre que la función u es descrita por la siguiente expresión:

$$u(t,r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\sqrt{\lambda_n} r)\cos(a\sqrt{\lambda_n} t)\,.$$

Encuentre expresiones adecuadas para los coeficientes c_n. Calcúlelos para el caso $f(r) = (1-r^2)^2$.

5. Obtenga $u(t,r,\theta)$ función de deformación de una membrana circular de radio unidad, siendo las condiciones iniciales $u(0,r,\theta) = J_1(\sqrt{\lambda_1^{(1)}}r)\cos\theta$ y $u_t(0,r,\theta) = 0$. Dibuje aproximadamente las condiciones iniciales.

6. Obtenga la solución de la ecuación $u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x)\cos\omega t$ en el intervalo $0 < x < \pi$ cuando $t > 0$, bajo las condiciones iniciales y de contorno $u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$ y $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$, en los siguientes casos:
a) ω difiere de todas las frecuencias naturales, $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$.
b) ω es muy semejante a la frecuencia natural ω_m de un modo normal.
c) ω y ω_m son iguales (¿cómo nombramos este fenómeno?)

7. Como extensión del problema anterior, considere la ecuación $u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)$ en el intervalo $0 < x < \pi$ cuando $t > 0$, bajo las condiciones iniciales y de contorno $u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$ y $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$. Escriba la solución en términos de una serie.

8.* *Paradoja.* En el problema anterior aparecen series como $g(\chi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sin\left((2k+1)\chi/2\right)/(2k+1)$. Defina la función $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k+1/2}/(2k+1)$; derívela, sume la derivada y, usando que $f(0) = 0$, escriba una expresión compacta para $f(z)$ en la región $|z| < 1$. Use este resultado para calcular $g(\chi)$ (sugerencia: $\sin(\zeta) = \Im[\exp(i\zeta)]$): ¡es constante! Como consecuencia, la serie del problema anterior parece ser nula. ¿Qué está ocurriendo?

9.* Resuelva el problema de conducción del calor en una esfera aislada (la derivada normal de la temperatura, normal a la superficie de la esfera, debe ser cero), con la condición inicial $T(r,\theta,\phi,t=0) = f(r,\theta,\phi)$ (*Sugerencia:* Puede ser conveniente en algún momento hacer un cambio de variable dependiente $R(r) = r^{-1/2}S(r)$ y utilizar las propiedades de las funciones de Bessel de orden semientero.)

10. Encuentre la función $u(x,t)$ que satisface la ecuación $u_{xx} = u_{tt} + \sin x$ con las condiciones de contorno $u(0,t) = 7(1-t)\,,\ u_x(\pi,t) = 0\,,\ u(x,0) = 7,\ u_t(x,0) = 0$.

11. Halle la solución $u(x,y)$ de la ecuación de Laplace en el rectángulo $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, con las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} u(0,y) &= 0\,, \qquad u(a,y) = f(y)\,, \qquad 0 \le y \le b\,,\\ u(x,0) &= 0\,, \qquad u(x,b) = g(x)\,, \qquad 0 \le x \le a\,. \end{aligned}$$

12. La temperatura de los extremos de una varilla es fija, esto es, $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$. Supongamos que para los instantes $t < 0$ la temperatura en todos los puntos de la varilla es nula, y que introducimos una perturbación en el instante $t = 0$, siendo así la temperatura inicial (correspondiente al instante $t = 0$) dada por $u(x,0) = u_0\delta(x-x')$. El punto x' es interior a la varilla. Calcule la distribución de temperaturas para los instantes $t > 0$. ¿Cómo utilizaría el resultado anterior para calcular la evolución de distribuciones de temperatura más generales, manteniendo las condiciones de contorno?

13. El laplaciano en coordenadas esféricas (r,θ,ϕ) se escribe como sigue:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r) + \frac{1}{r^2\mathrm{sen}\theta}\partial_\theta(\mathrm{sen}\theta\partial_\theta) + \frac{1}{r^2\mathrm{sen}^2\theta}\partial_{\phi\phi}$$

Cierto o falso: $\nabla^2(1/r) = 0$. (Considere una situación física adecuada)

14. El laplaciano en dos dimensiones se escribe en coordenadas polares (r, φ) como sigue:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r) + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 \,.$$

Cierto o falso: $\nabla^2 \ln r = 0$.

15. Supongamos un planeta esférico con una distribución superficial de temperaturas que sólo depende de la latitud, y cuya distribución interior de temperaturas tampoco presenta dependencia en el ángulo ϕ. Calcule la temperatura $u(r, \theta)$, en el estado estacionario bajo la condición de que la temperatura superficial sea $u(R, \theta) = \sin^2\theta$.

16.* (**El método de las imágenes**) En este problema resolveremos el problema de conducción de calor en la semirrecta $x \geq 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,; \qquad x \geq 0\,; \quad t \geq 0\,;$$
$$u(x,0) = f(x)\,; \quad u(0,t) = 0\,, \qquad \text{y } u \text{ acotada}\,.$$

Aquí no puede usarse directamente la transformada de Fourier, y buscaremos otro truco. Escribamos la solución en la forma siguiente:

$$u(x,t) = \int_0^\infty ds\, [G(s-x,t) - G(s+x,t)]\, f(s)\,.$$

Otra posibilidad consiste en resolver el siguiente problema:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,; \qquad x \in \mathbf{R}\,; \quad t \geq 0\,;$$
$$u(x,0) = \begin{cases} f(x)\,, & x > 0; \\ -f(-x)\,, & x < 0; \end{cases} \qquad \text{eta } u \text{ acotada}\,.$$

En el fondo, ¿son realmente diferentes estos métodos?

17.* Consideremos la siguiente familia de problemas:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - \frac{c^2}{l}u_x + \frac{c^2\mu}{l^2}u\,;$$
$$u(L,t) = e^{\gamma L/l}u(0,t)\,, \qquad u_x(L,t) = e^{\gamma L/l}u_x(0,t)\,;$$
$$u(x,0) = f(x)\,, \qquad u_t(x,0) = g(x)\,.$$

L es la longitud del intervalo, y, l, por otro lado, es una longitud característica de difusión. Los parámetros μ y γ son adimensionales. Cuando el parámetro γ toma el valor $1/2$ es factible usar el método de separación de variables; para otros valores se complica. ¿Por qué? Calcule la solución en el caso $\gamma = 1/2$. Busque una interpretación física.

18.* Un qubit (spin) evoluciona bajo la influencia de una fuerza externa clásica del tipo del ruido blanco. La densidad de probabilidad de encontrarlo en el estado puro determinado por los ángulos de Bloch θ y ϕ en el instante de tiempo t, $P(\theta,\phi,t)$, obedece la siguiente ecuación de Fokker-Planck:

$$\partial_t P(\theta,\phi,t) = \left[\eta^2\partial_\theta^2 + \frac{\eta^2}{4\tan^2\theta}\partial_\phi^2 + \frac{\omega}{2}\partial_\phi\right] P(\theta,\phi,t)\,.$$

η es un parámetro que denota la intensidad del acoplo entre el qubit y el campo clásico (es cero cuando el qubit evoluciona libremente); ω es la frecuencia de rotación del qubit clásico (cuando no hay acoplo el Hamiltoniano es $\hbar\omega\sigma_z/2$). Los ángulos de Bloch parametrizan el estado como $|\psi\rangle = \cos\theta|+\rangle + e^{i\phi}\sin\theta|-\rangle$, y ϕ y θ van de 0 a 2π y π respectivamente. Describa la evolución de $P(\theta,\phi,t)$ para una densidad inicial genérica y para la densidad inicial $P(\theta,\phi,0) = \delta(\theta-\theta_0)\delta(\phi-\phi_0)$. ¿A qué tiende P cuando el tiempo tiende a infinito? (de otro modo: ¿existe algo que tome el papel de una densidad estacionaria?) [ref: M. Schulz and S. Trimper, *Persistence of Quantum Information*, `quant-ph/0609221`]

Anexo:

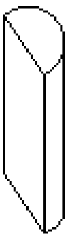
Ejercicios de últimos exámenes

---

19. (Febrero 2004) Un cilindro homogéneo, con base de radio a y altura h, es conductor de calor. El exterior del cilindro, salvo su base, se mantiene a una temperatura fija, T_0. Por contra la base se mantiene a una temperatura $T_0 + 100$ K. Halle la distribución estacionaria de temperaturas en el interior del cilindro.

20. (Febrero 2004) ¿Cuál es la menor frecuencia normal de un tambor con forma de semicírculo? (Sugerencia: considere los modos de un tambor circular...)

21. (Septiembre 2004) ¿Cuál es la menor frecuencia normal de la cavidad de la figura?



22. (Septiembre 2002) Resuelva el siguiente problema de condiciones iniciales y de contorno (Sugerencia: no olvide la ortogonalidad)

$$\begin{aligned} &\phi_t = \phi_{xx} + 2\phi_x\,, \qquad 0 \le x \le \pi\,, \quad t \ge 0\,; \\ &\phi(0,t) = 2t\,, \quad \phi(\pi,t) = 2t+2\,; \\ &\phi(x,0) = 2x/\pi\,. \end{aligned}$$

23. (Septiembre 2003) La temperatura de un cuerpo cilíndrico (de altura infinita y radio R) con una fuente interna de calor homogénea y constante obedece la ecuación

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2\nabla^2 T + b^2\,,$$

donde b y a son números reales. La temperatura inicial es 0 en todo el interior del cilindro. Por otra parte, el cilindro emite por las paredes, cumpliéndose la relación

$$T + R\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{en} \quad r = R$$

para todo instante de tiempo y ángulo. Calcule la distribución de temperaturas en todos los instantes posteriores al inicial.

24. (Febrero 2005) Resuelva el siguiente problema:

$$\begin{gathered} u_t = c^2 u_{xx}\,, \qquad x \in [0, L]\,, \quad t > 0\,, \\ u(0,t) = 1\,, \quad u(L,t) = 2e^{-\mu t}\,, \quad u(x,0) = 3x + 1\,. \end{gathered}$$

25. (Septiembre 2005) Resuelva el siguiente problema de contorno:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0\,,$$

con ϕ función de x e y, siendo $x \geq a$, que cumple las condiciones $\partial\phi/\partial x = 0$ en $x = a$, y

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \to A\cos y\,, \qquad \frac{1}{x}\frac{\partial \phi}{\partial y} \to -A\sin y$$

cuando $x \to +\infty$.

26. (Febrero 2006) Un gimnasta salta sobre una cama elástica circular de 5 metros de radio. En el momento en que la tela vuelve a pasar por la posición inicial (del reposo), presenta una velocidad hacia arriba dada por la fórmula $(5\ \mathrm{m} - r) \times 10/\mathrm{s}$, con r la distancia al centro. Calcule la forma de la tela en cualquier instante posterior.

27. (Febrero 2006) Considere un sector circular de ángulo $\pi/6$. Si se dispusiera como un tambor, ¿cuál sería su menor frecuencia natural? Supongamos ahora que el sector circular es un material conductor y que el radio es a. Bajo las siguientes condiciones de contorno, ¿cuál es la distribución estacionaria de temperaturas? (La temperatura es descrita por una función u del radio r y ángulo ϕ.)

$$u(r,0) = 0\,, \quad u\left(r, \frac{\pi}{6}\right) = 0\,, \quad 0 \leq r \leq a\,; \qquad u(a,\phi) = \phi\,, \quad 0 \leq \phi < \frac{\pi}{6}\,.$$

Clasifique la ecuación que ha resuelto.

28. (Septiembre 2006) Considere una barra delgada de longitud 2 m, aislada lateralmente (el calor sólo fluye longitudinalmente). Inicialmente la temperatura u es

$$\left[(4/\pi^2)\sin(\pi x/2\ \mathrm{m}) + 500\right]\mathrm{K}\,.$$

Ambos extremos están conectados con termostatos, y mientras que la temperatura del extremo izquierdo está fijada a 500 K, el derecho se mantiene a 100 K. También contamos con un calentador que proporciona un flujo constante de calor a la barra, $q(x) = Q\sin(\pi x/2\ \mathrm{m})$. Calcule el campo de temperaturas $u(x,t)$ en la barra para todo instante. ¿Qué ocurre cuando $t \longrightarrow \infty$?

29. (Septiembre 2006) Hannibal Chew, el diseñador de ojos de la Corporación Tyrell (Blade Runner), tiene varios ojos sumergidos en tres cuartas partes en un líquido a la temperatura del cuerpo humano, mientras que el otro cuarto está en contacto con el aire a temperatura ambiente de 20 °C. Calcule la distribución de temperatura dentro de uno de estos ojos. Si su respuesta es una serie, calcule los coeficientes numéricos de los dos primeros términos.

30. (Febrero 2007) Un cilindro conductor infinito se encuentra a temperatura uniforme cuando, de repente, es sumergido en un fluido (que sirve de fuente de calor) con una temperatura distinta. Describa la evolución temporal de la temperatura en cada punto del cilindro. ¿Cómo cambiaría su resultado si el cilindro fuera de altura finita? Dé la temperatura en cada punto del cilindro para cada instante después de la inmersión también en este segundo caso.

31. (Febrero 2007) Un sólido conductor llena uniformemente el espacio entre dos esferas concéntricas. Su frontera interna se mantiene a temperatura constante, idéntica sobre toda esa superficie, mientras que la superficie externa presenta una temperatura constante, no uniforme, y proporcional a $1 - \cos\theta$. Calcule la distribución estacionaria de temperatura en el sólido.

32. (Septiembre 2007) Calcule el potencial existente en el interior de un cilindro infinito de material dieléctrico, tal que la parte externa de un semicilindro se mantiene a potencial V mientras que la del otro a potencial $-V$.

33. (Septiembre 2007) Una placa infinita de cierto grosor se ha introducido en un baño térmico. Antes de ello, la distribución de temperaturas en su interior sólo dependía de la coordenada transversal, era simétrica respecto del plano central de la placa, y presentaba un único máximo. Describa la evolución de la temperatura bajo estas condiciones. Escoja finalmente un modelo concreto para la distribución inicial de temperaturas y realice para éste los cálculos completos.

34. (Febrero 2008) Un cilindro conductor infinito sin carga es introducido en un campo eléctrico constante, perpendicular a su eje. ¿Cuál es el potencial electrostático tras la introducción del cilindro?

35. (Febrero 2008) La ecuación de propagación de ondas en el Universo en expansión es

$$\frac{1}{c^2} u_{tt} = a^2(t)\nabla^2 u \,,$$

con ∇^2 el Laplaciano, c la velocidad de la luz, y $a(t)$ una función del tiempo conocida como "factor de escala".

Considere una situación física en la que la distancia a un plano no condicione la propagación ondulatoria, siendo el plano determinado (por ejemplo) por una galaxia espiral. Imaginemos que las ondas se anulan en el borde de la galaxia. Use separación de variables, conjuntamente con el método WKBJ en la parte temporal, para obtener una descripción matemática de esa situación. ¿Bajo qué condiciones es buena la aproximación? Entre todos los modos posibles, y dados los datos siguientes, ¿para cuáles es mejor la aproximación? El radio de la galaxia es 10^5 años-luz, la constante de Hubble ($H = \dot{a}/a$) vale $(1.3 \times 10^{10}\ \text{year})^{-1}$, y el factor de escala es de la forma $Ct^{2/3}$.

36. (Septiembre 2008) Dos esferas concéntricas, el radio de la exterior el doble del de la interior, se cortan (cada una) en dos hemisferios por medio de la misma placa no conductora. El hemisferio superior interior y el inferior externo se mantienen al mismo potencial constante $-V$, mientras que los otros dos hemisferios (superior externo e inferior interior) se encuentran en un potencial V. Calcule el potencial electrostático en la región entre las esferas.

37. (Septiembre 2008) Resuelva la ecuación

$$u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho - u_{tt} = 0$$

bajo las siguientes condiciones: 1) la solución es regular en el eje $\rho = 0$; 2) la solución se comporta asintóticamente ($\rho \to \infty$) como $\sqrt{5/\pi\rho}(\cos 5\rho + \sin 5\rho)\cos 5t$.