1. Demuestre que, para $t \neq 0$, la función de paso o función escalón de Heaviside $\theta(t)$ puede representarse mediante la integral compleja

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \mathrm{d}\sigma\, \frac{e^{\sigma t}}{\sigma}\,,$$

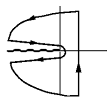
con s real positivo. ¿Qué valor tendrá la integral compleja indicada en el caso en que $t = 0$?

2. Halle la inversa de las siguientes transformadas de Laplace directamente de la fórmula de inversión

$$\text{a)}\,\frac{1}{s^2+a^2}\,;\quad \text{b)}\,\frac{s}{s^2+a^2}\,;\quad \text{c)}\,\frac{1}{s^3}\,;\quad \text{d)}\,\frac{e^{-as}}{s}\quad (a \geq 0)\,.$$

3. Calcule las transformadas de Fourier de

$$\text{a)}\,\frac{1}{x^2+a^2}\,;\quad \text{b)}\,e^{-\alpha|x|}\,.$$

4.* Utilice el contorno  para hallar la inversa de la siguiente transformada de Laplace, usando la fórmula de inversión .

$$\frac{1}{\sqrt{s}}\,.$$

5.* Resuelva la siguiente ecuación integral:

$$f(x) = x + \int_0^x \mathrm{d}y\, f(y)\,.$$

(Sugerencia: escriba la integral como una convolución con la función paso de Heaviside, y calcule la transformada de Laplace; como siempre, compruebe su resultado en la ecuación; observe que las transformaciones integrales son útiles también para ecuaciones integrales)

6. Como de costumbre, vamos a estudiar el oscilador amortiguado de otra manera. Queremos obtener una solución particular de la familia de ecuaciones diferenciales

$$\ddot{f} + 2\gamma\dot{f} + \omega_0^2 f = g$$

en la forma

$$f_p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds\, G(t-s)g(s)\,.$$

¿Cuál es la ecuación algebraica que debe satisfacer la transformada de Fourier de la función G? Esto es, la condición que debe satisfacer la función

$$\hat{G}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i\omega t} G(t)\,.$$

¿Dónde se encuentran las singularidades de la función $\hat{G}$? Clasifique estas singularidades, en los tres distintos casos, es decir, a) con amortiguamiento subcrítico; b) con amortiguamiento crítico; c) en el caso sobreamortiguado. Intente comprender el fenómeno de la resonancia en esta imagen. ¿Es única la función G, o acaso un conjunto de funciones? ¿Cómo cambiaría la función G si cambiaran las condiciones generalizadas de contorno?

7. Calculamos la correlación (correlación cruzada) de dos funciones por medio de la siguiente expresión:

$$C(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau\, f^*(\tau) g(t+\tau)\,.$$

Cuando los elementos de la correlación son iguales, la denominamos autocorrelación. Demuestre que la transformada de Fourier de la correlación es, salvo un factor constante global, el producto de las transformadas de Fourier. Calcule la autocorrelación de la función $\theta(t)\exp(-\gamma t)\sin(\Omega t)$. Investigue su sentido físico.

8. En algunos sistemas anisotrópicos de estado sólido, para temperaturas bajas se puede presentar el estado de "ondas de carga y densidad". En ese estado, la densidad de carga presenta una modulación, debida al cambio de la estructura del cristal. En este ejercicio examinaremos un modelo simplificado. Consideremos un sistema infinito en las variables x yz, limitado al intervalo $(-h, h)$ en la coordenada y. Supongamos que la densidad de carga dentro del sólido es $A\cos(qx)$ (no hay dependencia en y, y en lo que a la variable z concierne, dentro la función es constante, y fuera nula - si se quiere se puede escribir la dependencia con respecto de z por medio de la función $\theta(h-|z|)$, donde θ es la función de Heaviside). Usando la transformada de Fourier respecto de la variable z, calcule el potencial electrostático. Compruebe que se cumplen las condiciones físicas (fuera del sólido no hay cargas, la simetría, etc.).

9. Escriba el propagador del siguiente problema en términos de una integral d-dimensional:

$$u_t = \mathbf{a}\cdot\nabla u + c^2\nabla^2 u\,, \qquad u(\mathbf{r},0) = f(\mathbf{r})\,.$$

[Explicación: escriba la solución del problema en la forma $u(\mathbf{r},t) = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{d}\mathbf{x}\, G(\mathbf{r}-\mathbf{x},t) f(\mathbf{x})$, y use transformadas de Laplace y Fourier] Calcule explícitamente el propagador en el caso $d=1$.

Asimismo calcule la función de Green, de utilidad para resolver el problema

$$u_t = \mathbf{a}\cdot\nabla u + c^2\nabla^2 u + f(\mathbf{r},t)\,, \qquad u(\mathbf{r},0) = 0\,.$$

(Sugerencia: calcule la función de Green para el problema con $\mathbf{a}=0$, y evalúela en $\mathbf{x}+\mathbf{a}t$)