1. Considere la ecuación de ondas $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ en un medio unidimensional infinito con condiciones iniciales $u(x,0) = f(x)$ y $u_t(x,0) = 0$ en $-\infty < x < \infty$ para $t > 0$, donde

$$f(x) = \begin{cases} 2 & -1 < x < 1, \\ 0 & \text{fuera.} \end{cases}$$

Dibuje $f(x)$. Compruebe que

$$f(x-ct) = \begin{cases} 2 & -1+ct < x < 1+ct, \\ 0 & \text{fuera,} \end{cases}$$

obtenga $f(x+ct)$ y dibuje la solución $u(x,t)$ del problema en los instantes $t = 0$, $t = 1/2c$, $t = 1/c$ y $t = 2/c$. Compruebe que el desplazamiento inicial produce dos ondas moviéndose en direcciones opuestas (cada una con la mitad del desplazamiento inicial).

2. Encuentre las características de la ecuación $\phi_{xy} + xy\phi_{yy} - \phi_y = 0$.

3. Obtenga la ecuación de las características de la E.D.P.

$$u_{xx} + 3u_{xy} - 4u_{yy} - u_x + u_y = 0\,,$$

y, mediante un cambio de variable adecuado, demuestre que su solución general es

$$u(x,y) = F(y-4x)e^{\frac{x+y}{5}} + g(x+y)\,,$$

donde F y g son funciones arbitrarias. A continuación demuestre que la solución que satisface las condiciones de contorno

$$u|_{y=4x} = 5x + e^x\,, \qquad \text{y} \qquad u|_{y=-x} = 1$$

es $u(x,y) = x + y + e^{(x+y)/5}$. (Las condiciones de contorno están dadas sobre curvas características, y sin embargo el problema tiene solución única. Explique este hecho).

4. Demuestre que la solución general $u(x,y)$ de la E.D.P.

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} = x^2$$

es $u(x,y) = \phi(xy) - x^2 y + f(x)$, donde ϕ y f son funciones arbitrarias.

5. Clasifique las siguientes ecuaciones y sistemas en hiperbólicos, elípticos y parabólicos. En el caso de ser mixtos, indique los dominios diferenciados para cada tipo:

a) $u_{xx} = \rho(x)u_{tt} + h(x)u_t + f(x)e^{i\omega t}\,, \qquad \rho(x) > 0\,;$

b) $u_{xx} + (1-x)^2 u_{yy} = 6\,;$

c) $\phi_{xy} + xy\phi_{yy} - \phi_y = 0\,;$

d) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \rho(x)\dfrac{\partial F}{\partial t} + h(x)F + f(x,t)\,;$

e) $u_x = (1-u)^2 u_{yy}\,;$

f) $\begin{cases} e_x + Ri &= 0, \\ i_x + Ce_t &= 0. \end{cases}$

6. Integre las siguientes ecuaciones, en las que u es una función de las variables x e y ($p = u_x$, $q = u_y$):

a) $(x-y)\;p + (x+y)\;q = 0\,,$

b) $x/u\;p + u/y\;q = 0\,,$

c) $xy(p-q) = (x-y)u\,,$

d) $x(y-u)p + y(u-x)q = u(x-y)\,.$

7. Obtenga las soluciones generales de las siguientes ecuaciones:
a) $u_x + u_y + u_z = 0$;
b) $xu_x + yu_y + zu_z = u$;
c) $u(u_x + u_y + u_z) = 1$;
d) $yzu_x + zxu_y + xyu_z = xyz$;
e) $(y - z)u_x + (z - x)u_y + (x - y)u_x = 0$.

8.* Encuentre la solución de la siguiente ecuación que pasa por la curva $x = 0$, $y = u$:

$$(x + u_x)\, u_x = u_y \, .$$

9.* Encuentre la solución de la siguiente ecuación que pasa por la curva $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$:

$$z_x^2 + z_y^2 = 1 \, .$$

10. Dado el campo vectorial $\vec{V} = X(x, y, z)\mathbf{u}_x + Y(x, y, z)\mathbf{u}_y + Z(x, y, z)\mathbf{u}_z$, podemos determinar las líneas tangentes al campo en cada uno de sus puntos; estas curvas reciben el nombre de curvas integrales o curvas vectoriales, y son la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{dx}{X(x, y, z)} = \frac{dy}{Y(x, y, z)} = \frac{dz}{Z(x, y, z)} \; (= dt) \; .$$

Obtenga las líneas vectoriales y las superficies ortogonales para el campo $\vec{F} = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y - z\mathbf{u}_z$.

11. El teorema de Liouville nos garantiza que la probabilidad en el espacio de fases se conserva. Como consecuencia, la densidad de probabilidad en el espacio de fases de una sola partícula, $f(q, p, t)$, satisface la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \{H, f\} \; ,$$

donde H es el hamiltoniano $H(p, q, t)$, y el corchete de Poisson se define para un par de funciones definidas en el espacio de fases, $g(p, q)$ y $h(p, q)$ como

$$\{g, h\} = \frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial h}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial h}{\partial q}$$

(tenga en cuenta que la variable temporal es mera espectadora en lo que al corchete de Poisson concierne). Utilice el método de características para resolver la ecuación de la densidad de probabilidad en el espacio de las fases con la condición inicial $f(q, p, 0) = f_0(q, p)$ en los casos de partícula libre y oscilador armónico. (N.B.: tenga en cuenta que al ser f una función de tres variables, la solución general requiere una función arbitraria de dos variables; adicionalmente, si no quiere trabajar mucho, puede ser conveniente calcular primero el caso de la partícula en un potencial armónico, y luego tomar el límite en el que la frecuencia del oscilador tiende a cero). Sin utilizar el método de las características, ¿sabría inferir del cálculo anterior la solución para el caso de un campo gravitatorio uniforme? (Sugerencia: compare sus resultados con la solución de la ecuación del movimiento para una partícula en cada uno de los casos, o, más directamente, las ecuaciones de las características con las ecuaciones del movimiento para una partícula)

Anexo:
Ejercicios de últimos exámenes

12. Sea $\phi(t,x)$ una función que satisface la ecuación $x^2\phi_{xx} + x\phi_x = \phi_{tt}$ y las condiciones de contorno $\phi(t,1) = 0$, $\phi(t,2) = 0$, $\phi(0,x) = 1$, $\phi_t(0,x) = 0$, para $t > 0$ y $1 < x < 2$.
a) Clasifique la ecuación como hiperbólica, parabólica o elíptica.
b) Utilizando el método de separación de variables encuentre una expresión para $\phi(t,x)$ de la forma

$$\phi(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(t,x) \ .$$

(Indique claramente la expresión de los coeficientes c_n en términos de integrales. **No es necesario calcular las integrales**.) (Junio 94, asignatura MMF)

13. Encuentre la superficie integral $z(x,y)$ de la ecuación

$$x\ (x+y)\ \frac{\partial z}{\partial x}\ -\ y\ (x+y)\ \frac{\partial z}{\partial y}\ =\ (x-y)\ z$$

que contiene a la recta $y = x + 1,\ z = 1$. (Segundo parcial 94, asignatura MMF)

14. (Septiembre - 2002) Consideremos la curva dada en forma paramétrica como

$$x(t) = t\,, \quad y(t) = t\,, \quad u(t) = t^2\,.$$

Calcule la superficie integral de la siguiente ecuación que pasa por esa curva:

$$2xy\frac{\partial u}{\partial x} - 2xy\frac{\partial u}{\partial y} = (x-y)u\,.$$

¿Qué ocurriría si buscáramos la solución que pasa por la curva $x(t) = t$, $y(t) = -t$, $u(t) = t^2$?

15. (Septiembre - 2003) Obtenga la solución de la ecuación

$$2y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy(2y^2 - x^2)$$

que satisface la condición $u(x,1) = x^2$ para $0 \le x \le 3$. Si es posible, dé el valor $u(2,2)$. Si no es posible, explique por qué.

16. (Febrero - 2004) Resuelva, si es posible, el siguiente problema ¿Cuál es la superficie solución de la ecuación

$$2xt\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = u$$

que pasa por la recta definida en forma paramétrica por $x = \sinh(\tau)$, $t = 0$, y $u = \sinh(\tau)$, con τ yendo de $-\infty$ a $+\infty$?

17. (Septiembre - 2004) Obtenga la solución general de la ecuación

$$y\,(2u+1)\,\frac{\partial u}{\partial x} + x\left(4ux^2 + 2x^2\right)\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy(2x^2 - 1)\,.$$

¿Existe una solución que pase por la curva

$$\left\{y = x^2\,, \quad u = x\,, \quad x > 0\right\}\,.$$

¿Y por la curva

$$\left\{y = \sqrt{x^4 + x}\,, \quad u = x^2\,, \quad x > 0\right\}?$$

¿Por qué?

18. (Febrero - 2005) Clasifique la ecuación

$$y\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (y - x)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - x\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + a\frac{x - y}{x + y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (x^2 + y^2)(x + y)^2\,.$$

Resuelva la ecuación para el caso $a = 1$ (obtenga la solución general). ¿Qué ocurriría si $a \neq 1$? En el caso $a = 1$, calcule, si existe, la solución que cumple $f(x, 0) = 0$, $\partial_y f(x, 0) = 0$. Asimismo, calcule, si existe, la solución que cumple $f(x, x) = 0$, $\partial_y f(x, x) = 0$. Explique sus resultados.

19. (Febrero - 2005) Una cuerda infinita por la que se propagan ondas con velocidad c presenta un desplazamiento inicial dado por

$$y(x) = \begin{cases} \sin(\pi x/a) & -a \leq x \leq a, \\ 0 & |x| > a. \end{cases}$$

Se suelta sin velocidad en el instante $t = 0$, siendo descrito su desplazamiento posterior por $y(x, t)$. Usando funciones escalón de Heaviside, obtenga una expresión general del desplazamiento como función del tiempo para todo x, y, en particular, para i) $x = 0$; ii) $x = a$; iii) $x = a/2$.

20. (Septiembre - 2005) Resuelva los siguientes problemas, si tienen solución, e indique la región de validez de la solución. Si no la tienen, explique porqué.

$$(1) \qquad \tan x u_x + u_y = 1\,, \qquad u(\pi/2, y) = 0\,.$$

$$(2) \qquad 3x u_x + 2y u_y = 1\,, \qquad u(\sqrt{81 - t^3}, t) = 0\,, \quad t < 3\,.$$

21. (Febrero - 2006) Encuentre las soluciones de la ecuación

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + (x + y + 1)\frac{\partial u}{\partial y} = axu$$

que pasan por las curvas $u = 7$, $y = -1 + \alpha x \ln x$, con α un parámetro. ¿Hay alguna restricción sobre el valor de α? ¿Por qué?

22. (Septiembre -2006) Encuentre las soluciones de la ecuación

$$2x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u$$

que pasan por la recta $u = y$, $x = 1$.

23. (Febrero - 2007) La ecuación que describe los desplazamientos transversales pequeños de un tubo flexible por el que fluye un fluido incompresible es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2v\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \left(v^2 - \frac{T}{\rho A}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,,$$

donde u es el desplazamiento transversal , v la velocidad del flujo, T la tensión del tubo, ρ la densidad del fluido, y A la sección transversal del tubo.

(1) Demuestre que la solución general de la ecuación comprende dos ondas viajeras con diferentes velocidades. ¿En qué caso puede darse que ambas viajen en el mismo sentido? Dé un argumento físico para justificar su resultado. Compruebe el mismo considerando el límite $v \to 0$.

(2) Suponga un desplazamiento inicial $a \cos kx$, soltándose el tubo desde el reposo. Describa el movimiento a partir de ese momento.

24. (Septiembre - 2007) ¿Para qué valores de α tiene solución única que incluya la línea $z = x^2y^2$, $x + y = \alpha$ la ecuación

$$x(x + 2y)z_x - (2x + y)yz_y = (x - y)z?$$

Cuandoquiera que exista, escriba la solución, y proporciones razones para la existencia o no y unicidad o no de la solución, según corresponda.

25. (Febrero - 2008) Resuelva, si es posible, la siguiente ecuación diferencial. ¿Qué ocurre si $v = c$?

$$u_{tt} + 2vu_{xt} + \left(v^2 - c^2\right) u_{xx} = \frac{\beta}{u} \left[\left(v^2 - c^2\right) u_x^2 + u_t^2 + 2vu_t u_x\right] .$$

26. (Septiembre - 2008) Calcule la solución general de

$$ux \cosh y \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u \cosh y\, .$$

Particularice a aquella solución que incluye $y = 0$, $x = e^{-u}$.