1. Método de Newton Supongamos que queremos resolver la ecuación algebraica $g(x) = 0$, con un método numérico iterativo Denotaremos la sucesión de aproximaciones por medio de la recurrencia $x_{n+1} = x_n + \Delta_n$. Para que efectivamente las aproximaciones sean sucesivamente mejores, necesitamos que los valores $g(x_{n+1})$ sean pequeños. Por otro lado, tenemos que $g(x_{n+1}) = g(x_n)+g'(x_n)\Delta_n+O(\Delta_n^2)$. Por este motivo, tomaremos $\Delta_n = -g(x_n)/g'(x_n)$, y, como consecuencia,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} .$$

Calcule las soluciones de la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$ por el método anterior.
Calcule la solución de la ecuación $x - 2\sin x = 0$ cercana al punto $x_0 = 2$.

2. Por medio de un desarrollo perturbativo, resuelva la ecuación $x^3 + (4+\epsilon)x^2 + 5x + 2 = 0$ cerca del punto $x_0 = -2$ (ϵ es un número pequeño). ¿Qué ocurriría con el desarrollo perturbativo en torno al punto $x_0 = -1$? (*Sugerencia:* investigue la ecuación $(x+1)^2 + \epsilon x^2 = 0$, para entender mejor lo que está ocurriendo.)

3. ¿Sabría resolver la ecuación $z^2 - 2\epsilon z - 2\epsilon = 0$ por medio de un desarrollo perturbativo ordinario en potencias de ϵ? ¿Por qué o por qué no? Intente un cambio de incógnita de la forma $z = \epsilon^p w$.

4. Resuelva por un desarrollo perturbativo el problema siguiente:

$$y'' + (1+\epsilon x)y = 0 , \qquad y(0) = 0 , \quad y'(0) = 1 .$$

¿Es adecuado el desarrollo obtenido cuando $x > 1/\epsilon$?

5. Resuelva por un desarrollo perturbativo el problema siguiente hasta orden ϵ^2:

$$y'' - y' + \epsilon y^2 = 0 , \qquad y(0) = 1 , \quad y'(0) = 0 .$$

6. Use el método de Lindstedt-Poincaré para resolver el siguiente problema:

$$y'' + y + \epsilon y|y| = 0 , \qquad |\epsilon| \ll 1 , \quad x > 0 , \quad y(0) = 1 , \quad y'(0) = 0 .$$

7. Para calcular la preceśion del perihelio de Mercurio, examinaremos la ecuación generalizada de Binet,

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2 .$$

Tomaremos como perturbación el último término. m es la masa del Sol, y h está relacionada con el momento angular de la partícula. Usando el método de Lindstet, calcule la precesión.

8.* (**Problema difícil**) Supongamos que en un punto de una cuerda homogénea hemos colocado una pequeña masa m. Los extremos de la cuerda son fijos, y el sistema conjunto de cuerda y masa se encuentra bajo tensión, siendo el valor de ésta τ.

1.- Demuestre que en la aproximación de oscilaciones pequeñas el desplazamiento vertical de la cuerda, $u(x,t)$, satisface la ecuación

$$\rho(x)u_{tt} = \tau u_{xx} ,$$

siendo

$$\rho(x) = \rho_0 + m\delta(x-a)$$

la densidad lineal del sistema conjunto. ρ_0 es la densidad lineal de la cuerda homogénea.

2.- Queremos ahora examinar los modos normales. Esto es, escribiremos la función $u(x,t)$ en la forma $v(x)e^{-i\omega t}$. La función v debe cumplir las condiciones de contorno $v(0) = v(b) = 0$. ¿Cuál es la ecuación diferencial que debe satisfacer?

3.- Definamos la función $G_0(x, \xi; k)$ como la solución del siguiente problema, cuando exista:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right) G_0(x,\xi;k) = -\delta(x-\xi)\,;$$
$$G_0(0,\xi;k) = G_0(b,\xi;k) = 0\,.$$

Demuestre que las frecuencias normales del sistema cuerda+masa cumplen la siguiente relación:

$$\frac{m}{\tau} G_0(a,a;\omega\sqrt{\rho_0/\tau})\omega^2 = 1\,.$$

4.- Demuestre que la n-ésima frecuencia normal viene dada por el siguiente desarrollo perturbativo, si se cumple que $m << \rho_0 b$):

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\tau}{\rho_0}}\,\frac{n\pi}{b}\left(1 - \frac{m}{\rho_0 b}\sin^2\left(\frac{n\pi a}{b}\right) + O\left(\left(\frac{m}{\rho_0 b}\right)^2\right)\right)\,.$$

9. Obtenga el desarrollo asintótico de la función

$$f(x) = \int_0^\infty dt\, \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$$

en torno al punto $x = \infty$.

10. Consideremos la función

$$f(x) = xe^{x^2}\mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} xe^{x^2}\int_x^\infty dt\, e^{-t^2}\,.$$

Obtenga un desarrollo asintótico en torno al punto $x = \infty$ por integración por partes (*Sugerencia:* haga primero el cambio de variable $\tau = t^2$ en la integral). Demuestre que el desarrollo es divergente para todo x.

11. Calcule el desarrollo asintótico de la siguiente integral, cuando $\lambda \to \infty$:

$$\int_0^\infty dt\, e^{\lambda(t(1+i)-t^3)}\,.$$

12. Calcule el desarrollo asintótico de la siguiente integral, cuando $\lambda \to \infty$:

$$\int_0^\infty dt\, e^{-\lambda t}\frac{\sqrt{t}e^t}{1+t}\,.$$

13. Calcule el desarrollo asintótico de la siguiente integral para ω grande:

$$\int_3^5 dt\, \frac{\cos \omega t}{1+t^2}\,.$$

14.* Demuestre que cuando $\lambda \to \infty$ se cumple que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{e^{i\lambda x}}{(1+x^2)^\lambda} \sim \frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})\pi}}{\lambda^{1/2}} e^{(1-\sqrt{2})\lambda} \left(2\sqrt{2}-2\right)^{-\lambda}\,.$$

15.* (Largo, si no acierta al principio con la notación) Aplique el método de Lindstedt-Poincaré al siguiente sistema de ecuaciones y compare con la solución exacta:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -4y + 2z + \epsilon z\,,\\ \dot{y} &= 4x - 4z\,,\\ \dot{z} &= -2x + 4y - \epsilon x\,.\end{aligned}$$

Compruebe la aplicabilidad del método antes de lanzarse a hacer cálculos.

Anexo:

Problemas de exámenes de los últimos años

---

16. Calcule de forma aproximada los valores propios y las funciones propias del operador $Ly = -y'' - \epsilon x^2 y$, $y(0) = y(1) = 0$, esto es, los valores de λ que conducen a soluciones no triviales para el problema $Ly = \lambda y$. La variable x es adimensional, y ϵ un número pequeño ($|\epsilon| \ll 1$). ¿Es posible desarrollar funciones en el intervalo $(0,1)$ como una superposición de funciones propias? ¿Por qué? Si fuera posible, ¿cómo calcularía los coeficientes? (Febrero 2006)

17. Obtenga una solución aproximada del siguiente problema. Discuta su validez.

$$y'' = (1+x)^2 y\,, \qquad y(0) = 1\,, \quad y'(\infty) = 0\,.$$

(Febrero 2005)

18. Calcule los primeros términos del desarrollo asintótico de la siguiente función, cuando $t \to \infty$:

$$f(t) = \int_1^\infty \mathrm{d}y \frac{y^{-t-1}}{1+(\ln y)^2}\,.$$

(Septiembre 2005)

19. Obtenga una solución aproximada válida para x positivos de la ecuación

$$y'' - \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{5}{4x^2} + \frac{1}{x^4})y = 0\,.$$

(Sugerencia: obtenga la ecuación equivalente $v'' + \phi(x)v = 0$, por medio del cambio de variable dependiente $y(x) = \mu(x)v(x)$) (Febrero 2004)

20. Obtenga una solución aproximada válida para x positivos de la ecuación

$$y'' - 2y' + \left(2 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) y = 0 \,.$$

(Septiembre 2004)

21. Obtenga una solución aproximada par, adecuada para todo x, de la ecuación

$$y'' + (1 + \epsilon x^2)^2 y = 0 \,.$$

(Septiembre 2003)

22. Calcule el desarrollo asintótico cuando $x \to \infty$ de la siguiente integral. ¿Es convergente la serie obtenida? Justifique su respuesta.

$$\int_0^\infty dx\, e^{-xt} \log(1 + x) \,.$$

(Febrero 2002)

23. Considere la ecuación $y'' - g^2(x) y = 0$, siendo la función g "lenta". Si la función g fuera constante, las soluciones serían exponenciales.

Sea $\epsilon \ll 1$ un número real positivo. Obtenga una solución aproximada, válida en todo punto x, del siguiente problema:

$$\epsilon^2 y'' = (1 + x^2)^2 y \,,$$
$$y(0) = 0 \,, \quad y'(0) = 1 \,.$$

(Febrero 2002)

24. Calcule al menos los tres primeros términos de un desarrollo en serie para λ grande de la siguiente integral (Sugerencia: puede ser oportuno un cambio de variable)

$$\int_1^\infty \mathrm{d}\tau\, \frac{\tau^{-\lambda-1}}{1+\tau} \,.$$

(Septiembre 2007)

25. (Febrero 2008) La ecuación de propagación de ondas en el Universo en expansión es

$$\frac{1}{c^2} u_{tt} = a^2(t) \nabla^2 u \,,$$

con ∇^2 el Laplaciano, c la velocidad de la luz, y $a(t)$ una función del tiempo conocida como "factor de escala".

Considere una situación física en la que la distancia a un plano no condicione la propagación ondulatoria, siendo el plano determinado (por ejemplo) por una galaxia espiral. Imaginemos que las ondas se anulan en el borde de la galaxia. Use separación de variables, conjuntamente con el método WKBJ en la parte temporal, para obtener una descripción matemática de esa situación. ¿Bajo qué condiciones es buena la aproximación? Entre todos los modos posibles, y dados los datos siguientes, ¿para cuáles es mejor la aproximación? El radio de la galaxia es 10^5 años-luz, la constante de Hubble ($H = \dot{a}/a$) vale $(1.3 \times 10^{10}$ year$)^{-1}$, y el factor de escala es de la forma $Ct^{2/3}$.

26. (Septiembre 2008) Calcule al menos los dos primeros términos de un desarrollo en serie para s grande de la siguiente integral:

$$\int_{-\pi/4}^{5\pi/8} \mathrm{d}t\, e^{-s \cos^2 t} \sinh t \,.$$