Atala I

Sturm-en eta Liouville-ren teoria

Aurkibidea

Gaien Aurkibidea

1 Funtzio espazioak eta garapen ortogonalak

1.1 Problemaren adierazpen orokorra

Helburua

Demagun L eragile diferentziala (= adierazpen diferentziala + mugalde baldintzak).

Zein da ondoko problemaren soluzioa?

$$Lf = g\,.$$

Adibidea

$$\begin{aligned} y'' + y &= x\,, \\ y(0) = y(1) &= 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Ekuazioaren soluzio orokorra:

$$y(x) = x + \alpha \sin x + \beta \cos x\,.$$

Mugalde baldintzak ezarriz gero, $\beta = 0$ eta $\alpha = -\mathrm{cosec}(1)$:

$$y(x) = x - \frac{\sin x}{\sin 1}\,,$$

Problemaren soluzioa.

Iruzkinak

Beti ez dago soluziorik:

$$\begin{aligned} y'' + y &= \sin x \,, \\ y(0) = y(\pi) &= 0 \,. \end{aligned} \tag{2}$$

Funtsezko galderak:

- Zergatik ez?
- Noiz bai, noiz ez?
- Existitzekotan, nola kalkulatu?

Funtsezko idea

- Ekuazioa lineala dela eta, *soluzioa gainezarmen baten bidez idatzi*.
- *Mugalde baldintzek egokiak izan behar dute*
- Eta gai inhomogenoa bera maneiatu behar dugu.

Adibidea

$$Ly = y'' + \lambda y \,; \qquad y(0) = 0 \,, \quad y(1) = 1 \,. \tag{3}$$

Demagun y_1 eta y_2 funtzioak $Ly = 0$ ekuazioaren soluzioak direla. Hau dela eta,

$$(y_1 + y_2)'' + \lambda \, (y_1 + y_2) = 0 \,,$$

baina

$$(y_1 + y_2) \, (1) = 2 \neq 1 \,!!$$

Beraz, gainezarmena ez da problemaren soluzioa (nahiz eta ekuazioaren soluzioa izan).

Adibidea, jarr.

Problemaren soluzioa izango litzateke mugalde baldintza $y(1) = 0$ izango balitz: *Mugalde baldintza homogenoen* kasu berezia.

Ez bakarrik kasu horretan.

Beste mugalde baldintza mota batzuekin gainezarmena soluzioa izango litzateke (adib. $y(0) = y(1)$ mugalde baldintza periodikoa).

1.2 Soluzio algebraikoa

Matrizeen problema

Antzeko matrize problema ondokoa dugu

$$A\mathbf{v} = \mathbf{w} \,, \tag{4}$$

non A matrizea $m \times n$-ekoa da, $\mathbf{u}$ n-bektorea, eta $\mathbf{w}$ m-bektorea. $\mathbf{w}$ ezaguna da (datua, jakina), eta gure helburua $\mathbf{u}$ dugu.

(Hau da: ekuazio-sistema lineala!)

Soluzioen existentzia

Problemak soluzioa izatea *heinearen* menpe dago; eta $\mathbf{w}$ bektorea A matrizeak sortua den.

Matrize karratuetan: alderantzizkorik dagoen.

Diagonalizazioa

Alderantzizkoa existitzeak ez dakar ondorio diagonalgarritasuna (adib. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alderantzizkoa $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, eta balio propio bakarraren azpiespazio propioaren dimentsioa 1 da).

Eta diagonalgarria izateak ez dakar alderantzizkoaren existentzia:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Matrize diagonalgarria

Demagun A matrizea diagonalgarria dela:

$\exists$ oinarri diagonala, $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$ s.t. $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$.

Demagun oinarria ortogonala dela (bestela, erabili Gram-Schmidt).

A matrizearen alderantzizkoa existitzen da baldin eta $\forall i \quad \lambda_i \neq 0$ bada.

Matrize diagonalgarria eta alderanzkarria

Garatu datu-bektorea eta bektore ezezaguna oinarri honetan:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{v}_i \,, \qquad \mathbf{w} = \sum_{i=1}^n w_i \mathbf{v}_i \,.$$

Ekuazioa honela berridazten dugu:

$$A \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n w_i \mathbf{v}_i \,,$$

eta, oinarria ortogonala dela eta,

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\lambda_i} \mathbf{v}_i \,,$$

A matrizea alderanzkarria izanez gero.

Algebratik ateratako ondorioak

- L eragilearentzat bektore propioen oinarri ortogonala existitzen bada, oinarri horretan garatzea erabilgarria izango da $Ly = f$ problemaren soluzioa aztertzeko. (L eragilea, mugalde baldintzak barne)
- L alderanzkarria ez bada ere, soluzioa existitu daiteke (baina hemen ez dugu kasu horiek aztertuko)
- Funtzioak eta bektore propioen oinarria? Zer da hori?
- Zein da matrize simetriko baten analogoa? (matrize simetrikoak alderanzkarriak baitira)

1.3 Funtzioen espazio linealak

Ideia

Lerro errealean definituriko funtzio konplexuekin:

- funtzio(multzo finito bat-)en batura trukakorra eta asoziatiboa;
- eskalar batekin (zenbaki konplexu batekin) biderkatzea banakorra da.
- $\exists$ 0 funtzioa, eta $\forall f$, $f + 0 = f$;
- $\forall f$, $f + (-f) = 0$, eta $-f$ bakarra da.

Beraz: lerro errealean definituriko funtzio konplexuen azpimultzo egokiak aurkituz gero, funtzioen espazio linealak lortuko ditugu. Egokia: 1) batuketa barne eragiketa izatea; 2) azpimultzoan 0 funtzioa dago; 3) azpimultzoko f funtzio guztien kasuan $-f$ funtzioa azpiespazioan dago.

Adibideak

1. Euskarri trinkoko funtzio jarraituen multzoa, $C_c(\mathbf{R})$.
2. Jarraitasunez bi aldiz deribagarriak diren funtzioak, $C^2(\mathbf{R})$.
3. $I := [a, b] \subset \mathbf{R}$; $A := \left\{ f \in C^2(I) \ / \ f(a) = f(b) = 0 \right\}$
4. $I := [a, b] \subset \mathbf{R}$; $A := \left\{ f \in C^2(I) \ / \ f(a) = f(b) \right\}$

Linealtasuna, berriro

Ondoko multzoa *EZ* da espazio lineal bat, batuketa barne eragiketa ez delako ($I := [a, b] \subset \mathbf{R}$):

$$B := \left\{ f \in C^2(I) \ / \ f(a) = 0 \, , f(b) = 1 \right\} \, .$$

Linealtasuna ona da, baina ez aski: infinito dimentsiotako espazioak; zein da oinarria?

1.4 Barne biderketako funtzio espazio linealak

Barne biderketa eta oinarrietako garapenak

- Espazio lineal batentzako barne biderketa, $(\langle\cdot,\cdot\rangle)$;
- Oinarria, $\{\mathbf{v}_i\}$, biderketa horrekiko ortogonal,

$$\langle\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j\rangle = \langle\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i\rangle\delta_{ij}\,;$$

Ondorioz, $\mathbf{u}$ bektorearen koefizienteak oinarri horretan:

$$\mathbf{u} = \sum_i \frac{\langle\mathbf{v}_i,\mathbf{u}\rangle}{\langle\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i\rangle}\mathbf{v}_i\,.$$

Barne biderketa: definizioa

Barne biderketak, $\langle\cdot,\cdot\rangle$, V espazio linealean, $(a,b)\in V\times V$ bikote bakoitzari esleitzen dio $\langle a,b\rangle$ zenbakia (eskalarra), ondoko baldintzen pean, $\forall a,b,c\in V$ eta λ eskalar guztientzat:

i) $\langle a+b,c\rangle = \langle a,c\rangle + \langle b,c\rangle$;

ii) $\langle a,\lambda b\rangle = \lambda\langle a,b\rangle$;

iii) (eskalarren konjokatua definituta egonez gero; geuretzat konplexu konjokatua) $\langle b,a\rangle = \overline{\langle a,b\rangle}$;

iv) $\langle a,a\rangle > 0\ \forall a\neq 0$.

Barne biderketa: adibideak, funtzioekin

$C^2(I)$ espazioan, non $I:=[a,b]$ den, barne biderketa *kanonikoa* ondokoa dugu:

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\,\bar{f}(x)g(x)\,.$$

Beste adibide batzuk:

$$\langle f,g\rangle_\rho = \int_a^b \mathrm{d}x\,\bar{f}(x)g(x)\rho(x)\,,$$

non $\rho(x)>0$, tartean definituta, barne biderketaren *haztapena* edo pisua den.

Hilbert-en espazioak

- Definizioa: barne biderketa duen espazio lineal *osoa* (osoa barne biderketaren metrikaren topologian), infinito dimentsiotakoa, *Hilbert-en espazioa* da. (Dimentsioa ∞: $\forall n$ naturala linealki independenteak diren n elementuz osatutako multzoa existitzen da)

- Adibidez: $C^2(I)$ barne biderketa kanonikoarekin ez da Hilbert-en espazio bat; bai ordea $L^2(I)$ espaziora osatuz (I tartean karratu integragarria duen funtzioen baliokidetasun-klaseak)

- Adibidez: l_2; zenbaki konplexuen segidak, $\{z\} := \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, non $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^2$ konbergentea eta finitoa den; barne biderkadura

$$\langle \{z\}\,, \{w\} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{z_k} w_k \,.$$

Hilbert-en espazioak: garrantzia

Hilbert-en espazioetan elementu guztiak *era bakarrean* deskonposa daitezke Hilbert-en espazioaren azpiespazioekiko: *batura ortogonala* eta orto-osagarritasuna zuzenean agertzen dira.

Ondorioz, *Hilbert-en espazio banangarriek sistema ortogonal osoa onartzen dute*, hau da, *oinarri osoa*.

2 Eragileak eta oinarri propioak

2.1 Adibideak

Adibidea

$$Ly := -y''\,, \qquad \mathrm{dom}(L) = \left\{ y \in C^2[0,\pi] : \; y(0) = y(\pi) = 0 \right\} \,.$$

Balio eta funtzio propioen problema:

$$Ly = \lambda y \equiv y'' + \lambda y\,, \quad y(0) = y(\pi) = 0\,.$$

Ekuazioaren soluzio orokorra ($\lambda \neq 0$): $y(x) = \alpha \sin\left(\sqrt{\lambda} x\right) + \beta \cos\left(\sqrt{\lambda} x\right)$.

Condition at 0: $\beta = 0$; cond. at π: $\alpha \sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right)$. For the solution not to be trivial:

$$\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0\,.$$

Adibidea, jarraipena

Ekuazio sekularra: $\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0$; bere soluzio multzoa $\lambda \in \left\{n^2\right\}_{n=1}^{\infty}$. ($\lambda = 0$ aparte aztertuz, ez da balio propioa)

Funtzio propioak

$$y_n(x) = \sin\left(nx\right) \,.$$

Ortogonaltasuna? Barne biderketa kanonikoa $\langle f, g\rangle = \int_0^\pi \mathrm{d}x\, \overline{f}(x) g(x)$.

$$\begin{aligned}\langle y_n, y_m\rangle &= \int_0^\pi \mathrm{d}x\, \sin(nx)\, \sin(mx) \\ &= \delta_{nm}\frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

Adibidea, jarraipena

$\{\sin(nx)\}_{n=1}^\infty$ multzoa *oinarri ortogonala* da. Hala ere, $\mathrm{dom}(L)$ ez da Hilbert-en espazioa, eta oinarri honekiko garapen batzuk ez dira hor egongo, bai ordea $L^2([0,\pi])$ espazioan:

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi \mathrm{d}\xi\, \sin(n\xi)\, f(\xi)\right)\sin(nx)\ .$$

Berdintza hau $L^2([0,\pi])$ espazioan gauzatzen da; orokorrean *ez da* berdintza puntuz puntu, orokorrean ez da funtzioen berdintza $\mathrm{dom}(L)$ espazioan.

Adibidea, jarraipena

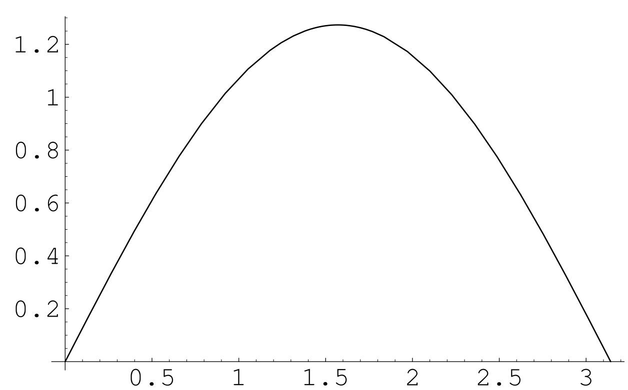
Adibidez, $f(x) = 1$. Adi egon: $f(0) \neq 0$. Hala ere, $L^2([0,\pi])$ espazioan

$$1 = \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^\infty \frac{2}{2m+1}\sin\left[(2m+1)\,x\right]\ .$$

Ez da puntuz-puntuko berdintza!.

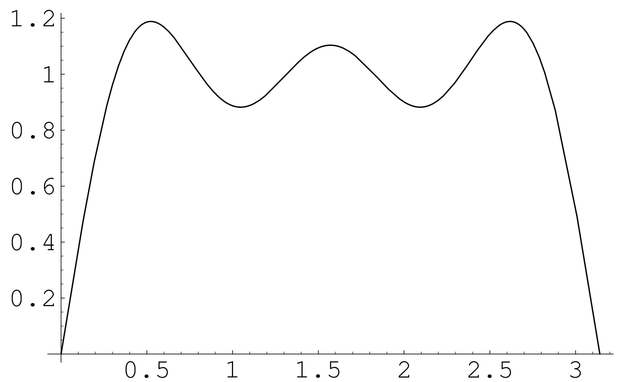
Adibidea, jarraipena

Batugai bat:



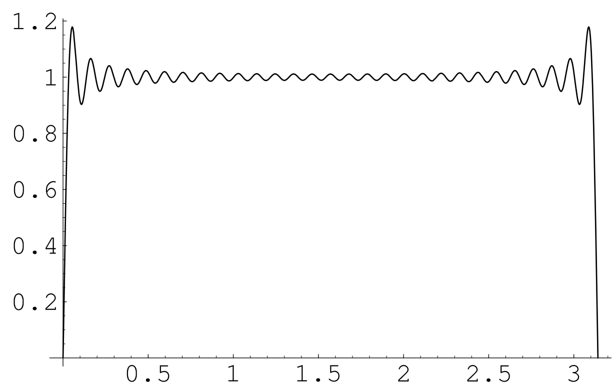
Adibidea, jarraipena

Hiru batugai:



Adibidea, jarraipena

Hogeita bederatzi batugai:



2. Adibidea

$$Ly := -y'' - 2y' - y\,,\ \mathrm{dom}(L) = \left\{y \in C^2[0,\pi] :\ y(0) = y(\pi) = 0\right\}\ .$$

Balio propioen problema:

$$Ly = \lambda y \equiv y'' + 2y' + (1+\lambda)y\,, \quad y(0) = y(\pi) = 0\,.$$

Ekuazioaren soluzio orokorra ($\lambda \neq 0$):

$$y(x) = e^{-x}\left[\alpha \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) + \beta\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)\right]$$

0 puntuko baldintza: $\beta = 0$; π puntuko baldintza: $\alpha e^{-\pi} \sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right)$. Soluzioa tribiala *ez* izateko:

$$\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0\,.$$

2. adibidea, jarr.

Ekuazio sekularra: $\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0$, bere soluzioa: $\lambda \in \left\{n^2\right\}_{n=1}^{\infty}$. ($\lambda = 0$ bere aldetik aztertuz, ez da balio propioa)

Funtzio propioak

$$y_n(x) = e^{-x} \sin(nx)\ .$$

Ortogonaltasuna? Barne biderketa kanonikoa $\langle f, g\rangle = \int_0^{\pi} \mathrm{d}x\, \overline{f}(x) g(x)$.

$$\begin{aligned}\langle y_n, y_m\rangle &= \int_0^{\pi} \mathrm{d}x\, e^{-2x} \sin(nx)\, \sin(mx) \\ &= \text{nahaste} - \text{borrastea}\,.\end{aligned}$$

2. adibidea jarr.

Barne biderketa *haztatua*, haztapena $\rho(x) = e^{2x}$

$$\langle f, g\rangle_{\rho} = \int_0^{\pi} \mathrm{d}x\, \overline{f}(x) e^{2x} g(x)$$

$$\begin{aligned}\langle y_n, y_m\rangle_{\rho} &= \int_0^{\pi} \mathrm{d}x\, e^{-2x} \sin(nx)\, \sin(mx)\, e^{2x} \\ &= \delta_{nm} \frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

2. adibidea jarr.

$\{e^{-x} \sin(nx)\}_{n=1}^{\infty}$ *oinarri ortogonala*:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \mathrm{d}\xi\, e^{2\xi}\, \sin(n\xi)\, f(\xi)\right) e^{-x} \sin(nx)\ .$$

Bardintza $L^2\left([0,\pi]\right)_{\rho}$ espazioan; *ez da* (orokorrean) funtzioen berdintza.

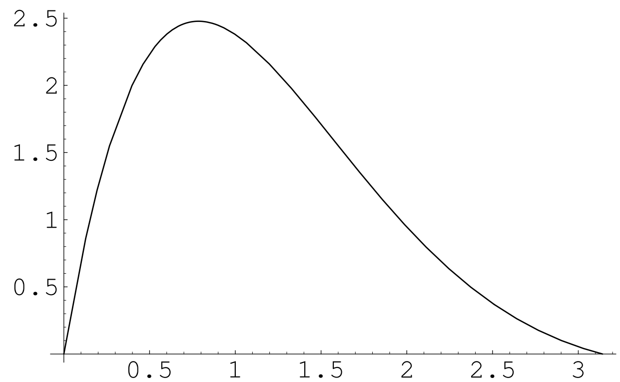
2. adibidea jarr.

Adibidez, $f(x) = 1$. $L^2\left([0,\pi]\right)_{\rho}$ *espazioan*

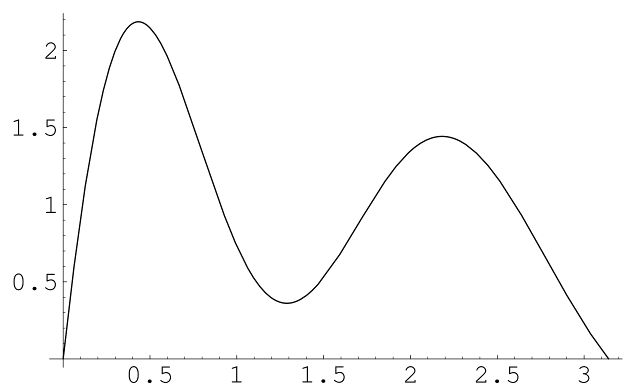
$$1 = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\left(1 - (-1)e^{\pi}\right)}{n^2 + 1} e^{-x} \sin(nx)\ .$$

Ez da puntuz-puntuko berdintza.

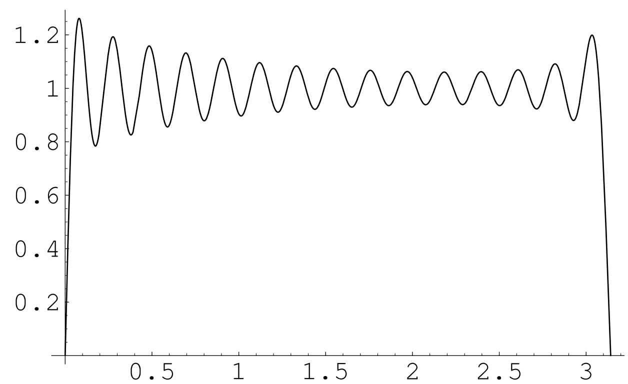
2. adibidea jarr.
Batugai bat:



2. adibidea jarr.
Hiru batugai:



2. adibidea jarr.
Hogeita bederatzi batugai:



2.2 Analogia aljebraikoa

Analogia aljebraikoa

Demagun $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Bektore propioak $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eta $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ez dira ortogonalak... barne biderketa kanonikoarekiko.

Hala ere, defini dezagun $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_B = \mathbf{a}^\dagger \cdot (B\mathbf{b})$, non $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ definitu positiboa den. $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ barne biderketa da.

Eta $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eta $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ortogonalak dira $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ biderketarekiko.

2.3 Simetria izateko baldintzak

Analisi orokorra

Demagun $(L[y])(x) = a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x)$ *adierazpen diferentziala*. Zatikako integrazioz,

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathrm{d}x\, \rho \bar{f} L[g] &= \int_a^b \mathrm{d}x\, \rho \bar{f}\left(a_0 g'' + a_1 g' + a_2 g\right) \\ &= \left[\rho a_0\left(\bar{f}g' - \bar{f}'g\right) + \left(a_1\rho - (a_0\rho)'\right)\bar{f}g\right]_a^b + \\ &\quad \int_a^b \mathrm{d}x\, \left[\left(a_0\rho\bar{f}\right)'' - \left(a_1\rho\bar{f}\right)' + a_2\bar{f}\rho\right] g \end{aligned}$$

Analisi orokorra

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \mathrm{d}x\,\rho\bar{f}L[g] \quad &= \quad \mathrm{B.T.} + \int_a^b \mathrm{d}x\,\rho\overline{L[f]}g + \\
&\int_a^b \mathrm{d}x\,g\left\{\rho\left(a_0-\overline{a_0}\right)\bar{f}''+\right. \\
&\quad\left[2\left(\rho a_0\right)'-\rho\left(a_1+\overline{a_1}\right)\right]\bar{f}'+ \\
&\quad\left.\left[\left(\rho a_0\right)''-\left(\rho a_1\right)'+\rho\left(a_2-\overline{a_2}\right)\right]\bar{f}\right\}
\end{aligned}
$$

Analisi orokorra

Nahi dugu, $\forall f,\ g\in\mathrm{dom}(L)$, soberazko gaiak desagertzea :

- $\bar{f}''$ gaia: $a_0=\overline{a_0}$ erreala.
- $\bar{f}'$ gaia: $(\rho a_0)'=\rho\Re(a_1)$.
- $\bar{f}$ gaia: $(\rho\Im(a_1))'=2\rho\Im(a_2)$.

Desagertzen dira a_i erreala *eta* $(\rho a_0)'=\rho a_1$ badira (hauen ondorioa;

$$
\rho(x)=\frac{1}{a_0(x)}\exp\left(\int^x \mathrm{d}\xi\,\frac{a_1(\xi)}{a_0(\xi)}\right)).
$$

Adierazen diferentzial errealaren haztapena

Biz $(L[y])(x)=a_0(x)y''(x)+a_1(x)y'(x)+a_2(x)y(x)$ non a_i errealak diren, defini dezagun

$$
\rho(x)=\frac{1}{a_0(x)}\exp\left(\int^x \mathrm{d}\xi\,\frac{a_1(\xi)}{a_0(\xi)}\right).
$$

Hau dela eta,

$$
\rho L[y]=\left(\rho a_0 y'\right)'+\rho a_2 y\,.
$$

Eta

$$
\int_a^b \mathrm{d}x\,\bar{f}\rho L[g]=\left[\rho a_0\left(\bar{f}g'-\bar{f}'g\right)\right]_a^b+\int_a^b \mathrm{d}x\,\overline{L[f]}\rho g\,.
$$

Eragile simetrikoa eta mugalde baldintzak

L eragilearen eremuaren definizioan mugalde baldintzak sartzen dira. Eremua ondo aukeratuz gero, aurreko adierazpenetan mugalde gaiak desagertuko dira $\forall f,\ g\in\mathrm{dom}(L)$, eta L eragileari $\langle\cdot,\cdot\rangle_\rho$ biderketarekiko simetrikoa deritzogu. Hala izan, balio propioak errealak dira, eta balio propio ezberdineko funtzio propioak ortogonalak dira $\langle\cdot,\cdot\rangle_\rho$ biderketarekiko. (Alderantzizko baieztapena ez da betetzen)

2.4 Mugalde baldintza homogeneoak

Mugalde baldintza homogeneoak

Demagun ρ eta a funtzio "zintzoak"direla, eta ezberdin zero tartearen muturretan. Kasu honetan, mugalde gaiak nuluak izan daitezke baldin eta, *mutur bakoitza bere aldetik*, eragilearen eremuko edozein elementu bikoterentzat W wronskiarra nulua bada, non

$$W[\bar{f}, g](x) := \bar{f}(x)g'(x) - \bar{f}'(x)g(x)\,.$$

Honek eta *eremuaren linealtasunak* sortzen dituzte ondoko formako baldintzak:

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0\,, \qquad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0\,,$$

eta hauei *mugalde baldintza homogeneoak* (eta bananduak) deritzegu.

M.B. homogeneoak: adibidea

$$Ly = -y''\,, \qquad y(0) = 0\,, \quad y'(\pi) = 0\,.$$

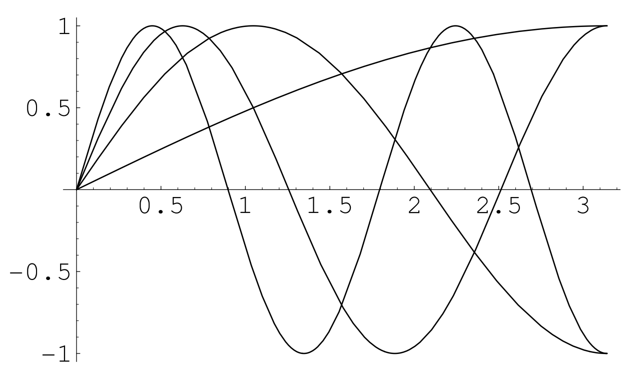
Ekuazioari ($y'' + \lambda y = 0$) dagokionez, bi kasu: 1) $\lambda = 0$ kasuan, soluzio orokorra $ax + b$ dugu (soluzio orokorra soluzio familia da); aldi berean soluzioa izateko eta mugalde baldintzak betetzeko: tribiala, $y = 0$.

2) $\lambda \neq 0$ kasuan, soluzio orokorra $a \sin \sqrt{\lambda}x + b \cos \sqrt{\lambda}x$ dugu; 0 puntuko m.b.-k $b = 0$ ondorioa dakar; π puntuan, *ekuazio sekularra* $\cos \sqrt{\lambda}\pi = 0$, soluzioaK $\lambda_k = (2k+1)^2/4$ for $k = 0, 1, 2, \ldots$

Funtzio propioak:

$$y_k = \sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right)\,.$$

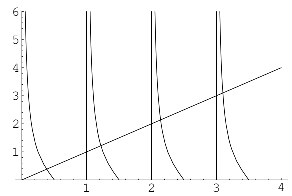
Adibidea



M.B. homogeneoak: 2. adibidea

$$Ly = -y'' - 2y' - y\,, \qquad y(0) + y'(0) = 0\,, \quad y'(\pi) = 0$$

0 ez da balio propioa. $\lambda \neq 0$ kasuan soluzio orokorra $e^{-x}\left(a\sin\sqrt{\lambda}x + b\cos\sqrt{\lambda}x\right)$ da. 0 puntuan m.b. dela eta, $a = 0$. π-n m.b., ekuazio sekularra $\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi = \cos\sqrt{\lambda}\pi$. Soluzio grafikoak



2.5 Mugalde baldintza periodikoak

Mugalde baldintza (pseudo)periodikoak

Bi alboak lotuta A matrize baten bidez:

$$\begin{pmatrix} y(b) \\ y'(b) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \end{pmatrix}$$

Wronskiarra determinantea da, beraz,

$$W[\bar{f}, g](b) = |A| W[\bar{f}, g](a)$$

eta mugalde gaiak nuluak dira baldin

$$\rho(b)a_0(b)|A| = \rho(a)a_0(a)\,.$$

M.B. periodikoak, adibideak

$$Ly = -y''\,, \qquad y(0) = y(l)\,, \quad y'(0) = y'(l)\,. \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Funtzio propioak: $y_0(x) = 1$, $y_k^e(x) = \cos\left(\frac{2\pi kx}{l}\right)$, $y_k^o(x) = \sin\left(\frac{2\pi kx}{l}\right)$, balio propioak $\lambda_0 = 0$, $\lambda_k = 4\pi^2k^2/l^2$, endekapen bikoitza $k = 1, 2, \ldots$

$$Ly = -y''\,, \qquad \begin{pmatrix} y(l) \\ y'(l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}$$

M.B. periodikoak, adibideak

$$Ly = y'' + 2y' + y\,, \qquad y(0) = e^l y(l)\,, \quad y'(0) = e^l y'(l)\,.$$

$$A = \begin{pmatrix} e^{-l} & 0 \\ 0 & e^{-l} \end{pmatrix}, \qquad \rho(x) = e^{2x}\,.$$

Funtzio propioak: $y_0(x) = e^{-x}$, $y_k^e(x) = e^{-x}\cos\left(\frac{2\pi kx}{l}\right)$, $y_k^o(x) = e^{-x}\sin\left(\frac{2\pi kx}{l}\right)$, balio propioak $\lambda_k = -4\pi^2k^2/l^2$, endekapen bikoitza $k = 1, 2, \ldots$

M.B. periodikoak, endekapena

Bitez $y_1(x;\lambda)$ eta $y_2(x;\lambda)$ funtzio linealki independenteak $a_0y''+a_1y'+a_2y = \lambda y$ ekuazioaren soluzioak. Soluzio orokorra eta bere deribatua honela idatz ditzakegu

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x;\lambda) & y_2(x;\lambda) \\ y_1'(x;\lambda) & y_2'(x;\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Mugalde baldintza periodikoak direla eta,

$$\left[A\begin{pmatrix} y_1(a;\lambda) & y_2(a;\lambda) \\ y_1'(a;\lambda) & y_2'(a;\lambda) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1(b;\lambda) & y_2(b;\lambda) \\ y_1'(b;\lambda) & y_2'(b;\lambda) \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0\,.$$

M.B. periodikoak, endekapena

Tribiala ez den soluzioa existetzeko baldintza:

$$\left|A\begin{pmatrix} y_1(a;\lambda) & y_2(a;\lambda) \\ y_1'(a;\lambda) & y_2'(a;\lambda) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1(b;\lambda) & y_2(b;\lambda) \\ y_1'(b;\lambda) & y_2'(b;\lambda) \end{pmatrix}\right| = 0\,.$$

Matrizea nulua bada balio propio batentzat, α eta β sistema linealaren soluzio espazioaren dimentsioa bi da, eta endekapen bikoitza agertzen da.

2.6 Mugalde baldintza singularrak

Mugalde baldintza singularrak

Mutur batean $\rho a_0 = 0$ bada, badirudi inolako baldintzarik beharrezkoa ez dela.

Ez da egia: wronskiarrak eztanda egingo balu, posible izango litzateke $\rho a_0 W$ funtzioaren limitea nulua ez izatea!

M.B. singularra: adibidea

$$Ly = -y'' - \frac{1}{x}y'\,, \qquad y(0)? \quad y(1) = 0\,.$$

$\rho(x) = x$, $a_0(x) = -1$, so $\rho(0)a_0(0) = 0$. Balio propioen ekuazioa: Bessel, zerogarrena, $y'' + y'/x + \lambda y = 0$. Berretura seriearen bidezko soluzioa, $y(x) = \alpha J_0\left(\sqrt{\lambda}x\right) + \beta Y_0\left(\sqrt{\lambda}x\right)$.

$x \to 0$ limitean, $Y_0 \sim \ln x$, $Y_0'(x) \sim 1/x$.

$\rho a_0 W \to$ konstantea da (edo dibergentea) orokorrean. Nulua Y_0 osagairik ez badago $\Rightarrow 0$ puntuan mugalde baldintza: funtzio erregularrak.

Mugalde baldintza singularrak: adibidea

1 puntuan m.b.: ekuazio sekularra $J_0\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0$. Funtzio propioak: $y_n(x) = J_0(\sqrt{\lambda_n}x)$.

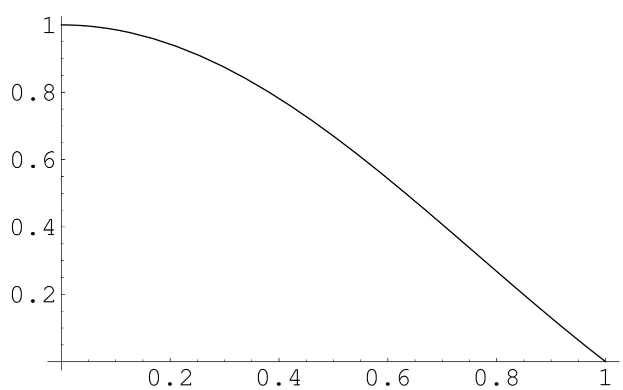
Garapenak:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{J_1^2(\sqrt{\lambda_n})} \left(\int_0^1 \mathrm{d}\xi\, f(\xi) J_0(\sqrt{\lambda_n}\xi) \right) J_0(\sqrt{\lambda_n}x)\,.$$

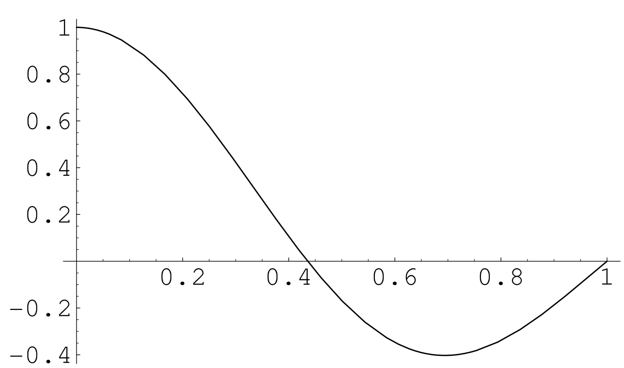
[Horretarako:

$$\langle y_n, y_m \rangle_\rho = \int_0^1 \mathrm{d}x\, x\, J_0(\sqrt{\lambda_n}x) J_0(\sqrt{\lambda_m}x) = \delta_{nm} \frac{1}{2} J_1^2(\sqrt{\lambda_n})\,.]$$

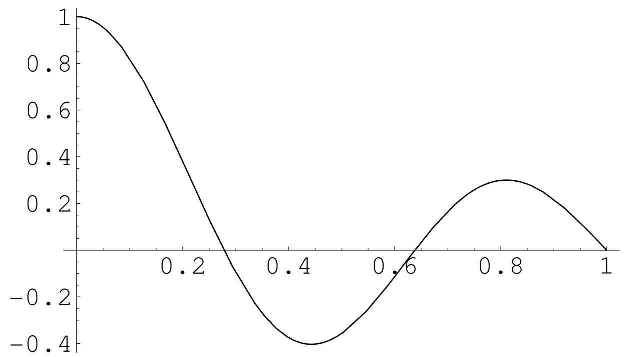
Mugalde baldintza singularrak: adibidea



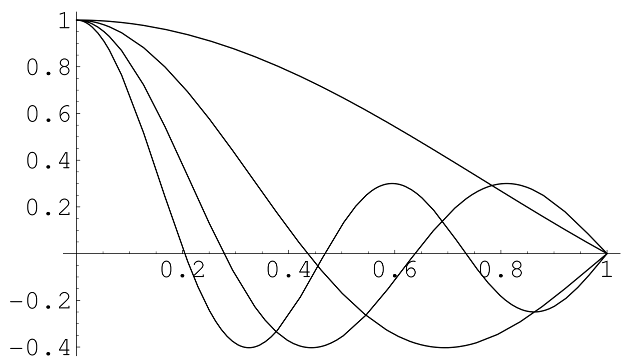
Mugalde baldintza singularrak: adibidea



Mugalde baldintza singularrak: adibidea



Mugalde baldintza singularrak: adibidea



3 Sturm-Liouville-ren teoria

3.1 Banaketa eta alderaketaren teoremak

Banaketaren teorema

Bitez y_1 eta y_2 funtzioak ekuazio diferentzial baten soluzio independenteak. Demagun x_1 eta x_2 ondoz ondoko y_1-ren erroak direla ($y_1(x_1) = y_1(x_2)$).

y_2 funtzioak erro bat du x_1 eta x_2 puntuen artean.

Frogapena: (reductio ad absurdum) Demagun $y_2 \neq 0\,\forall x \in (x_1, x_2)$; ondorioz y_1/y_2 jarraitua da, eta nulua (x_1, x_2) tartearen muturretan. Hau honela izanda $(y_1/y_2)'$ funtzioak nulua izan behar da tartearen puntu batean (gutxienez bat). Baina

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \frac{1}{y_2^2} W[y_2, y_1]$$

ez da inon nulua izango, kontraesana.

Sturm-en oinarrizko teorema

Bitez u eta v hurrenez hurren ekuazioen soluzioak, $(pu')' = q_1 u$ eta $(pv')' = q_2 v$ non $q_1 \geq q_2$, $q_1 \neq q_2$, $p > 0$ diren. Hau honela, x_1 eta x_2 ondoz ondoko u-ren erroak badira, v funtzioak erro bat du (x_1, x_2) tartean.

Adibidez:

$$y'' + m^2 y = 0$$

ekuazioaren soluzioak

$$y'' + n^2 y = 0$$

ekuazioarenak baino azkarrago oszilatzen dira $m > n$ bada.

4 Fourier-en analisia

Fourier-en eragilea

$$Ly = -y'' , \qquad y(\tau) = y(\tau + T) , \quad y'(\tau) = y'(\tau + T) .$$

Balio propioak: $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, \cdots$, endekapen bikoitza, eta $\lambda_0 = 0$, endekapenik gabe.

Funtzio propioak: balio propio endekatuentzat aukera batzuk:

$$1) \left\{ \cos \frac{2n\pi(t-\tau)}{T} \right\} \cup \left\{ \sin \frac{2n\pi(t-\tau)}{T} \right\} ;$$

$$2) \left\{ \cos \frac{2n\pi t}{T} \right\} \cup \left\{ \sin \frac{2n\pi t}{T} \right\} ;$$

Fourier-en garapenak

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} \mathrm{d}s\, f(s) \cos \frac{2\pi s}{T} ,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} \mathrm{d}s\, f(s) \sin \frac{2\pi s}{T} ,$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2\pi t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi t}{T} \right] .$$

Batez besteko konbergentzia, Gibbs-en fenomenoa.

Garapen periodikoak

Garapena $t \in (\tau, \tau + T)$ tartean definitu dugu. Luzapen periodikoa lerro erreal osora.

Alderantziz: T periodoa duen funtzio periodikoak aurreko garapen mota onartzen du, integrala T luzerako *edozein* tartetan eginda.

Parseval-en teorema

T luzerako edozein tartetan, T periodoa duen edozein funtziorentzat:

$$\frac{1}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} \mathrm{d}s\, |f(s)|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) \ .$$

Gaiz gai deribazioa eta integrazioa

f funtzioa "zintzoa"bada, bere Fourier-en garapena gaiz gai integratu eta deribatu dezakegu.

Atala II

Problema inhomogeneoak eta Green-en funtzioak

5 Problema inhomogeneoak eta Fredholm-en hautabidea

Problema inhomogeneoak

$$Ly = f\,, \qquad \text{Mugalde baldintzak}$$

Adibidea:

$$y'' = x\,, \qquad y(0) = y(\pi) = 0\,.$$

Soluzioa: ekuazioaren soluzio orokorra: $x^3/6 + \alpha x + \beta$; mugalde baldintza 0 puntuan, $\beta = 0$; mugalde baldintza π puntuan, $\pi^3/6 + \alpha\pi = 0$, i.e. $\alpha = -\pi^2/6$.

$$y(x) = \frac{x}{6}\left(x^2 - \pi^2\right)\,.$$

Soluzio bakarra.

Bigarren adibidea: soluzio barik

$$y'' + y = x\,, \qquad y(-\pi) = y(\pi) = 0\,.$$

Ekuazioaren soluzio orokorra: $y(x) = x + \alpha \sin x + \beta \cos x$.

Mugalde baldintzak:

$$-\pi - \beta = 0\,, \qquad \pi - \beta = 0\,.$$

Ez dago soluziorik.

Hirugarren adibidea: infinitu soluzio

$$y'' + y = x^2\,, \qquad y(-\pi) = y(\pi) = 0\,.$$

Ekuazioaren soluzio orokorra: $y(x) = x^2 - 2 + \alpha \sin x + \beta \cos x$.

Mugalde baldintzak:

$$\pi^2 - 2 - \beta = 0\,, \qquad \pi^2 - 2 - \beta = 0\,.$$

Problemaren soluzioak:

$$y(x) = x^2 - 2 + \alpha \sin x + (\pi^2 - 2)\cos x\,.$$

Fredholm-en hautabidea

Biz L SL eragile simetrikoa (MBk barne), eta $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ bere oinarri propioa, λ_n balio propioekin. Garatu oinarri honetan $Ly = f$ problema inhomogeneoan agertzen diren funtzio guztiak, eta kalkulatu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n \Rightarrow c_n = \frac{f_n}{\lambda_n}$$

0 balio propioa ez bada. Beraz, soluzioa existitzen da eta bakarra da.

0 balio propioa bada, dagokion funtzio propioa y_0

- f funtzioaren osagaia azpiespazio propio horretan ($\langle y_0, f\rangle_\rho$) ezberdin 0 bada, ez dago soluziorik.
- f funtzioaren osagaia nulua bada, ∞ soluzio.

6 Green-en funtzioa

Green-en funtzioa

$Ly = f$ problemaren soluzioaren bila gabiltz (L SL eragile simetrikoa, ρ haztapenarekin) ondoko forman:

$$y(x) = \int_a^b \mathrm{d}\xi\, G(x,\xi) f(\xi)\,.$$

Hau gertatuko litzateke baldin eta

$$L_x G(x,\xi) = \delta(x-\xi)$$

bada (ordezkapen zuzena).

Green-en funtzioak: kalkulua I

Erabil ditzagun L-ren funtzio propioak

$$y(x) \to \sum \alpha_n y_n(x)\,, \quad f(\xi) \to \sum f_n y_(\xi)\,.$$

Formalki, jakin badakigu (L SL eragile simetrikoa, ρ haztapenarekin)

$$y(x) = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} \langle y_n, f\rangle_\rho y_n(x) = \int_a^b \mathrm{d}\xi \sum_n \frac{1}{\lambda_n} y_n(x) \overline{y_n(\xi)} \rho(\xi) f(\xi)\,.$$

Beraz,

$$G(x,\xi) = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} y_n(x) \rho(\xi) \overline{y_n(\xi)}\,.$$

Green-en funtzioak: kalkulua II

Zuzenean $LG = \delta(x-\xi)$ adierazpenatik. L bigarren ordenakoa.

$\delta \Rightarrow$ Jauzia: $x = \xi$ puntuan (tartean dago) jauzia lehenengo deribatuan.

Bitez y_1 eta y_2 soluzioak, linealki independenteak; *ekuazioarenak* (tarte osoan!).

Idatz ditzagun ondoko bi gainezarmenak, $y_>(x,\xi)$ eta $y_<(x,\xi)$, non ξ parametroa den:

$$y_<(x,\xi) = A(\xi)y_1(x) + B(\xi)y_2(x)\,,\;\; y_>(x,\xi) = C(\xi)y_1(x) + D(\xi)y_2(x)\,,$$

eta A, B, C eta D koefizienteak (funtzioak, ξ-ren funtzioak) finkatu ondokoarekin:

1. $G(x,\xi) = \theta(\xi - x)y_<(x,\xi) + \theta(x-\xi)y_>(x,\xi)$ jarraitua $\forall x$ tartean.
2. G funtzioak mugalde baldintzak betetzen ditu;
3. $LG = \delta(x-\xi)$.

Green-en funtzioak: kalkulua II

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} \mathrm{d}x\, L_x G(x,\xi) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} \mathrm{d}x\, \delta(x-\xi) = 1\,.$$

Beste aldetik,

$$\begin{aligned}
\int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} \mathrm{d}x\, L_x G(x,\xi) &= \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} \mathrm{d}x\, \left[a_0\partial_x^2 G + a_1\partial_x G + a_2 G\right] \\
&= \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} \mathrm{d}x\, \{\partial_x\left[a_0(x)\partial_x G(x,\xi)\right. \\
&\quad\; \left. + \left(a_1(x) - a_0'(x)\right)G(x,\xi)\right] \\
&\quad\;\; + \left(a_2(x) - a_1'(x) + a_0''(x)\right)G(x,\xi)\}\,.
\end{aligned}$$

Green-en funtzioak: kalkulua II

Ondorioz:

$$a_0(\xi)\left\{\left[\partial_x G(x,\xi)\right]_{x=\xi^+} - \left[\partial_x G(x,\xi)\right]_{x=\xi^-}\right\} = 1$$

or

$$a_0(\xi)\left[\partial_x y_>(x,\xi) - \partial_x y_<(x,\xi)\right]_{x=\xi} = 1\,.$$

Dena dela, A, B, C eta D koefizienteek lau ekuazio lineal aljebraiko bete behar dituzte.

Green-en funtzioak: kalkulua II

$$\begin{aligned} y_1'(\xi)A + y_2'(\xi)B - y_1'(\xi)C - y_2'(\xi)D &= \frac{-1}{a_0(\xi)} \\ y_1(\xi)A + y_2(\xi)B - y_1(\xi)C - y_2(\xi)D &= 0 \end{aligned}$$

eta mugalde baldintzak.

Lau ekuazio lineal hauek osatutatko sistema inhomogeneoak soluzio bakarra izateko, dagokion determinantea ezberdin zero izan behar da. Hain zuzen ere, hori da 0 balio propioa *ez* izateko baldintza!.

Adibidea: Green-en funtzioaren kalkulua

$$Ly = y'' , \qquad y(0) = y(\pi) = 0 .$$

$y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x$

$$\begin{aligned} 0 \cdot A + 1 \cdot B - 0 \cdot C - 1 \cdot D &= -1 \\ 1 \cdot A + \xi \cdot B - 1 \cdot C - \xi \cdot D &= 0 \\ 1 \cdot A + 0 \cdot B \qquad\qquad &= 0 \\ 1 \cdot C + \pi \cdot D &= 0 \end{aligned}$$

Adibidea jarr.

Determinantea:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & \xi & -1 & -\xi \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \pi \end{vmatrix} = -\pi$$

. Soluzio bakarra: $A = 0$, $B = (\xi - \pi)/\pi$, $C = -\xi$, $D = \xi/\pi$

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{(\xi - \pi)x}{\pi} & 0 \le x \le \xi \\ \frac{(x - \pi)\xi}{\pi} & \xi \le x \le \pi \end{cases}$$

Adibidea jarr.

Beste adierazpen bat:

$$G(x, \xi) = \theta(\xi - x)\frac{(\xi - \pi)x}{\pi} + \theta(x - \xi)\frac{(x - \pi)\xi}{\pi} .$$

(Erabilgarria egiaztatzeko, $\theta'(\xi - x) = -\delta(x - \xi)$ erabiliz.)

$y'' = x$, $y(0) = y(\pi) = 0$ baldintzekin:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \int_0^\pi \mathrm{d}\xi\, G(x,\xi)\xi \\
&= \int_0^x \mathrm{d}\xi\, \frac{(x-\pi)\xi}{\pi}\xi + \int_x^\pi \mathrm{d}\xi\, \frac{(\xi-\pi)x}{\pi}\xi \\
&= \frac{1}{6}x\left(x^2-\pi^2\right)
\end{aligned}
$$

Adibidea, orokortuz

$$
y'' + \lambda^2 y = x\,, \qquad y(0) = y(\pi) = 0\,. \qquad (\lambda \neq 0)
$$

$$
y_1(x) = \sin\lambda x\,, \qquad y_2(x) = \cos\lambda x\,.
$$

Mugalde baldintzak:

$$
B = 0\,, \qquad C\sin\lambda\pi + D\cos\lambda\pi = 0\,.
$$

Jarraitasuna eta jauzia

$$
\begin{aligned}
A\sin\lambda\xi - C\sin\lambda\xi - D\cos\lambda\xi &= 0\,. \\
\lambda\left[C\cos\lambda\xi - D\sin\lambda\xi - A\cos\lambda\xi\right] &= 1\,.
\end{aligned}
$$

Determinant $\lambda\sin\lambda\pi$: unique solution if $\lambda \neq 1, 2\ldots$

Adibidea, orokortuz

$$
\begin{aligned}
G(x,\xi) &= \frac{-1}{\lambda\sin\lambda\pi}\left[\theta(\xi-x)\sin\lambda x\sin\lambda(\pi-\xi)+\right. \\
&\qquad \left.\theta(x-\xi)\sin\lambda\xi\sin\lambda(\pi-x)\right]\,.
\end{aligned}
$$

$$
\int_0^\pi \mathrm{d}\xi\, G(x,\xi)\xi = \frac{x}{\lambda^2} - \frac{\pi\sin\lambda x}{\lambda^2\sin\lambda\pi}\,.
$$

Green-en funtzio orokortuak and funtzio propioak

Biz G_λ $L-\lambda$ alderantzizkoa. Hau da

- G_λ funtzioak λ aldagaiarekiko menpekotasuna du, eta horri dagokionez, λ_n singularitateak (poloak) L eragilearen balio propioak dira.
- $\lim_{\lambda\to\lambda_n}(\lambda_n-\lambda)G_\lambda = A(\xi)y_n(x)$, non y_n funtzio propioa den
- $\rho(\xi) \sim A(\xi)/\overline{y_n(\xi)}$

Adibidea

$$Ly = -y'' \, , \; y(0) = y(\pi) = 0 \, ; \qquad (L-\lambda)G(x,\xi;\lambda) = \delta(x-\xi)$$

Ekuazio diferentzialaren soluzio partikularra: $-\sin\left[\sqrt{\lambda}(x-\xi)\right]\theta(x-\xi)/\sqrt{\lambda}$.

$$G(x,\xi;\lambda) = -\frac{\sin\left[\sqrt{\lambda}(x-\xi)\right]}{\sqrt{\lambda}}\theta(x-\xi) + \frac{\sin\left[\sqrt{\lambda}x\right]\sin\left[\sqrt{\lambda}(\pi-\xi)\right]}{\sqrt{\lambda}\sin\left[\sqrt{\lambda}\pi\right]} \, .$$

Adibidea jarr.

Singularitateak: Itxurazko singularitatea $\lambda = 0$

$$\lim_{\lambda\to 0} G(x,\xi;\lambda) = -(x-\xi)\theta(x-\xi) + \frac{x(\pi-\xi)}{\pi} \, .$$

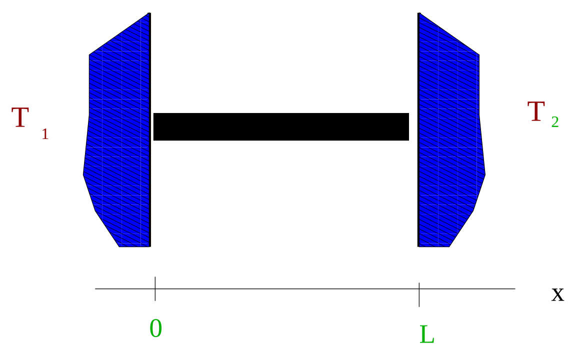
Benetakoak: $\lambda \to \lambda_n = n^2$ zenbaki naturala

$$\lim_{\lambda->\lambda_n} (\lambda_n - \lambda)G(x,\xi;\lambda) = \frac{2}{\pi}\sin(nx)\sin(n\xi) \, .$$

Atala III
Deribatu Partzialetako Ekuazioak eta Aldagaien banantzea

7 Sarrera

Adibidea: bero eroalpena



Adibidea: bero eroalpena

Zeharkako dimentsioak $\ll L$, dimentsio bateko hurbilketa: $u(x,t)$ tenperatura eremua.

Bero eroalpen ekuazioa:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \, .$$

Hastapen baldintza: $u(x,0) = f(x)$.

Mugalde baldintzak: bi muturretan baino termikoa, tenperatura konstanteak:

$$u(0,t) = T_1 \, , \qquad u(L,t) = T_2 \, .$$

Problema: lortu $u(x,t)$, $\forall x \in [0,L]$ eta $t \geq 0$: bero eroalpen ekuazioaren soluzia, hastapen baldintzaren eta mugalde baldintzen pean.

Adibidea: bero eroalpena

Ideia: gainezarmena. Ez zuzenean: mugalde baldintza desegokiak. Aldagai dependentearen aldaketa:

$$\omega(x,t) = u(x,t) - T_1 - (T_2 - T_1)\frac{x}{L}$$

edo

$$w(x,t) = u(x,t) - T_1 - (T_2 - T_1)\frac{x^2}{L^2} \, ,$$

edo

$$v(x,t) = u(x,t) - g(x)$$

non $g(0) = T_1$ eta $g(L) = T_2$ diren.

Adibidea: bero eroalpena

Azken aukerarekin, hastapen baldintzapeko problema honela aldatzen da:

$$\begin{aligned} v_t &= \alpha^2 v_{xx} + \alpha^2 g''(x)\,, \\ v(x,0) &= f(x) - g(x)\,, \\ v(0,t) &= 0\,, \\ v(L,t) &= 0\,, \end{aligned}$$

mugalde baldintza homogeneoekin.

Adibidea: bero eroalpena - Banantze problema

Beste problema bat, ezberdina baina aurrekoari lotua, erabiliko dugu bere soluzioa eraikitzeko: *aldagai bananduen problema*. Hastapen baldintzaren ordez, beste baldintza bat sartuko dugu: *banantzea*. Honezaz gain, gai inhomogeneoa ahaztuko dugu. Hori bai, *mugalde baldintzak* mantentzen ditugu.

$$\begin{aligned} z_t &= \alpha^2 z_{xx}\,, \\ z(x,t) &= X(x)T(t)\,, \\ z(0,t) &= 0\,, \\ z(L,t) &= 0\,. \end{aligned}$$

Problema: Tribiala ez den soluziorik existitzen al da? Soluzioak: 1) ekuazio homogeneoaren soluzioak; 2) mugalde baldintzak betetzen dituzte; 3) modu normalak dira (denborarekiko eboluzioa berbera dugu puntu guztietan!)

Adibidea: bero eroalpena - Banantze eta mugalde baldintzak

Ordezkatu banantze baldintza bai ekuazioan baita mugalde baldintzetan ere:

$$X(x)\dot{T}(t) = \alpha^2 X''(x)T(t)\,, \qquad X(0)T(t) = 0 = X(L)T(t)\,.$$

Soluzioa tribiala ez izateko, $T(t)$ funtzioak ezin du identikoki nulua izan. Beraz,

$$X(0) = X(L) = 0\,.$$

Adibidea: bero eroalpena - Banantzea eta ekuazio homogeneoa

Arrazoi bera dela eta, t^* unean $T(t^*) = 0$ izango balitz, $\dot{T}(t^*)$ nulua izan behar da. Beraz, nahiz eta, agian, $\dot{T}(t)/T(t)$ puntu guztietan definituta ez egotea, t^* puntu berezietan limitea existituko da. Eta konstante da:

$$\alpha^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = -\lambda^2\alpha^2\,.$$

[Ez dago inolako funtsezko arrazoirik *banantze konstantearen izena* $-\lambda^2$ beti izateko; adibide honetan emaitza ezaguna delako badakigu izen hori erabilgarria izango dela]

Adibidea: bero eroalpena - Sturm-Liouville

$$X'' + \lambda^2 X = 0\,, \qquad X(0) = X(L) = 0\,.$$

Dakigunez, tribiala ez den soluzioa ez da beti existituko. Kasu honetan, soilik $\lambda \in \{\lambda_n = n\pi/L\}$ multzoan egonez gero tribialak ez diren soluzioak egongo dira, $X_n(x) = \sin n\pi x/L$ funtzioen proportzionalak hain zuzen ere. *Hau Sturm - Liouville-ren oinarri propioa da*; ondorioz: ideia: garatu *hasierako probleman, mugalde baldintza egokiekin*, x aldagaiaren funtzio *guztiak* oinarri honetan. I.e.,

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin\frac{n\pi x}{L}\,,\; g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin\frac{n\pi x}{L}\,,$$

eta f era berean.

Adibidea: bero eroalpena - Oinarri propioan garatzea

Trukatu dugu bi aldagaien funtzio ezezagun bat, $v(x,t)$, aldagai bakarreko $c_n(t)$ funtzio multzoarekin. f_n eta g_n zuzenean kalkulagarriak dira:

$$f_n = \frac{2}{L}\int_0^L \mathrm{d}x\, f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}$$

eta g_n modu antzekoan.

Sartu garapenak ekuazioan eta hastapen baldintzetan, eta erabili ortogonalitatea:

$$\begin{aligned} \dot{c}_n &= -\alpha^2\frac{n^2\pi^2}{L^2}c_n - \alpha^2\frac{n^2\pi^2}{L^2}g_n\,, \\ c_n(0) &= f_n - g_n\,. \end{aligned}$$

Adibidea: bero eroalpena - AB soluzioa

$$c_n(t) = (f_n - 2g_n)\, e^{-\alpha^2 n^2\pi^2 t/L^2} + g_n\,.$$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin\frac{n\pi x}{L}\,.$$

$$u(x, t = v(x,t) + g(x)\,.$$

Adibidea: bero eroalpena - g jakin bat

Hartu $g(x) = T_1 + (T_2 - T_1)x/L$. Ondorioz

$$g_n = \frac{2}{n\pi}\left[T_1 - (-1)^n T_2\right]\,.$$

Adibidea: bero eroalpena - fisikarion ikuspuntua

Ahaztu hasierako probleman hastapen baldintza. Soluzio egonkorrik al dago? Hau da, ondokoaren soluzioa:

$$\xi''(x) = 0\,, \quad \xi(0) = T_1\,,\, \xi(L) = T_2\,.$$

Bai: $\xi(x) = T_1 + (T_2 - T_1)x/L$. Beraz $u(x,t) - \xi(x) \to 0$ doa $t \to \infty$ doanean, hau da,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \sin\frac{n\pi x}{L}\,,$$

eta, hastapen baldintza betetzeko, $\beta_n = f_n - \xi_n$. Azkenean:

$$u(x,t) = \xi(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[f_n - \frac{2}{n\pi}\left(T_1 - (-1)^n T_2\right)\right] e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \sin\frac{n\pi x}{L}\,.$$

2. Adibidea: bero eroalpena eraztunean

L luzerako eraztun bero-eroalea, hastapen tenperatura distribuzioa $f(x)$ (periodikoa, L periododuna). Problema:

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx}\,, \\ u(x,0) &= f(x)\,, \\ v(0,t) &= v(L,t)\,, \\ v_x(0,t) &= v_x(L,t)\,, \end{aligned}$$

garatu Fourier-en seriea:

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n \cos\frac{2\pi n x}{L} + \beta_n \sin\frac{2\pi n x}{L}\right]\,.$$

$$u(x,t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n(t) \cos\frac{2\pi n x}{L} + b_n(t) \sin\frac{2\pi n x}{L}\right]\,.$$

2. Adibidea: bero eroalpena eraztunean

Ordezkatu ekuazioan eta hastapen baldintzan:

$$\dot{a}_0 = 0\,, \quad \dot{a}_n = -\frac{4n^2\pi^2\alpha^2}{L^2} a_n\,, \quad \dot{b}_n = -\frac{4n^2\pi^2\alpha^2}{L^2} b_n\,.$$

$$a_n(0) = \alpha_n\,, \qquad b_n(0) = \beta_n\,,$$

beraz, soluzioa ondokoa da:

$$u(x,t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n \cos\frac{2\pi n x}{L} + \beta_n \sin\frac{2\pi n x}{L}\right] e^{-4n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2}\,.$$

8 Metodoaren deskribapena

Metodoaren deskribapen orokorra

- Menpeko aldagaia aldatu gainezarmenak onartzen dituzten mugalde baldintzak lortzeko.
- Lortu aldagai baten (edo batzuen!) menpeko funtzioak garatzeko oinarri propio egokia.
- Garatu funtzio horiek (guztiak!) oinarri propioan.
- Hasierako problemaren baliokidea den (aldagai independente gutxiagoko) deribatu partzialetako ekuazio multzoa edo ekuazio diferentzial arrunten multzoa
- Berriz egin ekuazio arrunten multzoa lortu arte. Ebatzi, ordezkatu.

Deskribapen xehatuagoa

1. Saiatu mugalde baldintza ”ezkutatuak”ikusten.
2. Zeintzuk dira mugalde baldintzak (baldintzen artean)?
3. Mugalde baldintzak ”homogeneizatu”/ periodiko bihurtu / apaindu.
4. Lortutako problema berri honetatik, idatzi *beste* problema bat, non hastapen baldintzen ordez *banantze baldintza* agertzen den.
5. Problema bananduaren soluzio ez-tribialak lortu.
6. Horrela SL problema sorta bat sortzen da: kalkulatu oinarri propioa
7. Alboratu orain problema banandua, eta erabili oinarri propioa mugalde baldintza egokiak dituen probleman.

Caveat

1. Aldagaien banantzea koordenatu sistema berezietan soilik dabil ondo. Metodoa erabiltzeko agian aldagai aldaketa beharrezkoa izango da.
2. Lotutako SL eragilea zein den jakitea komenigarria izan daiteke, baina ez da beharrezkoa. Erabakigarria da, beste aldetik, oinarri ortogonal egokia lortzea; egokia DPErekiko eta mugalde baldintzekiko. Banantze prozesua eta SL eragilearen identifikazioa erabilgarria izan daiteke oinarri ortogonal egokia lortzeko, erabilgarria soilik.
3. Per se, problema banandua ez da erabilgarria. Izatez, hasierako problema inhomogeneoa bada, ez da batere erabilgarria: soluzio bananduak onak dira ekuazio homogeneoentzat soluzioa eraikitzeko. Gai inhomogeneoari dagokionez oinarri propioan garatu behar dugu.

9 Mugalde baldintza ”ezkutatuak”

Mugalde baldintza ”ezkutatuak”: adibidea - Laplacearra, koordenatu polarretan

$$\nabla^2 u(x,y) = 0\,, x^2+y^2 \le R^2$$

$$u(x,y)|_{x^2+y^2=R^2} = f\left(\text{actan}(y/x)\right)\,.$$

Hobeto polarretan: $u(x,y) = v(r,\theta)$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial v}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0\,, r \in [0,R)\,, \theta \in [0,2\pi)\,,$$

$$v(R,\theta) = f(\theta)\,.$$

Adibidea, jarr.

Lehenengo baldintza ezkutatuta: periodikotasuna. Fourier-en garapena:

$$v(r,\theta) = \frac{1}{2}A_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n(r)\cos(n\theta) + B_n(r)\sin(n\theta)\right]\,,$$

$$f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\theta) + b_n\sin(n\theta)\right]\,.$$

Beraz,

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}A_n}{\mathrm{d}r}\right] - \frac{n^2}{r^2}A_n = 0\,,\quad A_n(R) = a_n\,,$$

eta B_n era berean.

Adibidea, jarr.

Euler-en ekuazioa; $n \neq 0$ kasuan, ekuazioaren soluzio orokorra:

$$A_n(r) \to \alpha r^n + \beta r^{-n}\,,\qquad A_0(r) \to \alpha + \beta \ln r\,.$$

2. baldintza ezkutatua: $r = 0$ puntuan erregularra izatea.

Maths Mugalde baldintza singularra: $\rho(r) = r$, $\rho a_0 \sim r^2$.

Phys Ez dago arrazoi fisikorik zentruan singularitatea izatea.

Adibidea: soluzioa

$$v(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\frac{r^n}{R^n}\cos(n\theta) + b_n\frac{r^n}{R^n}\sin(n\theta)\right] ,$$

era esplizituagoan:

$$\begin{aligned} v(r,\theta) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\sigma\, f(\sigma)\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\theta-\sigma)\right] - \frac{1}{2}\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\sigma\, f(\sigma)\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\sigma)} . \end{aligned}$$

Adibidea, era sistematikoan

Problema banandua:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial z}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2} &= 0 , \\ z(r,\theta) &= \rho(r)\Theta(\theta) \end{aligned}$$

Badirudi beste baldintzarik ez dagoela...badago: periodikotasuna $\Theta(\theta)$ funtzioan (koordenatu sistemaren ondorioa!).

Ekuazio bananduak

$$\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -\frac{r}{\rho(r)}\left[r\rho'(r)\right]' = -\lambda^2 .$$

SL problema:

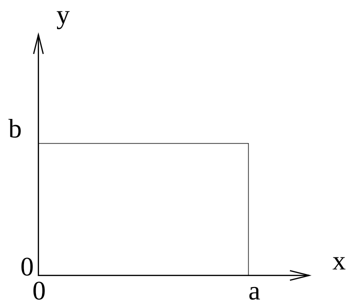
$$\Theta'' + \lambda^2\Theta = 0 , \qquad \Theta(0) = \Theta(2\pi) , \, \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) .$$

10 Beste kuestio batzuk

Banantzeen kateaketa

$$\partial_t u = \nabla^2 u \, , u(x,y,t) \, , \, 0 \le x \le a \, , 0 \le y \le b \, ; \, u(x,y,0) = g(x,y) \, ;$$

$$u(0,y,t) = u(a,y,t) = u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0 .$$



Kateaketa II

Problema banandu berria:

$$\partial_t z = \nabla^2 z\,, \quad z(x,y,t) = A(x,y)T(t)\,;$$

$$z(0,y,t) = z(a,y,t) = z(x,0,t) = z(x,b,t) = 0\,.$$

Beraz,

$$\frac{\dot{T}}{T} = \frac{1}{A}\nabla^2 A = -\lambda^2\,,$$
$$A(0,y) = A(a,y) = A(x,0) = A(x,b) = 0\,.$$

Kateaketa III

Problema berria: Nolakoa izan behar da λ ondoko problemak tribiala ez den soluziorik izateko?

$$\nabla^2 A + \lambda^2 A = 0\,, \qquad (\text{Helmholtz}' \text{ equation})$$

$$A(0,y) = A(a,y) = A(x,0) = A(x,b) = 0\,.$$

Berriro banantzea: problema hau eta banantzea, $A(x,y) = X(x)Y(y)$

Kateaketa IV

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2 + \frac{Y''}{Y} = -\mu^2$$
$$X(0) = X(a) = Y(0) = Y(b) = 0$$

1. SL problema : μ nolakoa izan behar da ondokoaren soluzio ez-tribialik existitzeko:

$$X'' + \mu^2 X = 0\,, X(0) = 0 = X(a)$$

Balio multzoa, $\mu_n = n\pi/a$, eta $X_n(x) = \sin n\pi x/a$.

Kateaketa V

SL2: eta Y? Nolakoa izan behar da λ ondoko problema *multzoak* tribiala ez den soluziorik izateko?

$$Y'' + (\mu_n^2 - \lambda^2)Y = 0\,,Y(0) = 0 = Y(b)$$

Indize multzo bikoitza: $\lambda_{nm}^2 = (m^2/b^2 + n^2/a^2)\pi^2$, eta $Y_m(y) = \sin m\pi y/b$.

Kateaketa VI

Beraz,

$$A_{nm}(x,y) = \sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\,;$$

$$\lambda_{nm}^2 = \frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}$$

Hauxek dira Dirichlet mugalde baldintzapeko laukizuzenean Laplace-arraren funtzio eta balio propioak.

Kateaketa, amaiera

Hasierako problemara, berriro: garatu u eta g:

$$g_{nm} = \frac{2}{ab}\int_0^a \mathrm{d}\xi \int_0^b \mathrm{d}\eta\, g(\xi,\eta)\sin\frac{n\pi\xi}{a}\sin\frac{m\pi\eta}{b}\,,$$

$$g(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} g_{nm}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\,.$$

$$u(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{nm}(t)\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\,.$$

Kateaketa, amaiera

Ordezkatu ekuazioan eta hastapen balioaren baldintzan:

$$\dot{u}_{nm} = -\lambda_{nm}^2 u_{nm}\,; \qquad u_{nm}(0) = g_{nm}\,.$$

Ondorioz:

$$u(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} g_{nm}e^{-\lambda_{nm}^2 t}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\,.$$

11 AB garrantzitsuen katalogoa

11.1 Koordenatu polarrak

Bero eroalpen ekuazioa koordenatu polarretan

$$\gamma^2 \nabla^2 u = u_t \,, \qquad u(r,\theta,0) = g(r,\theta)\,, \quad u(a,\theta,t) = 0\,.$$

Baldintza ezkutatua: θ aldagaiarekiko periodikotasuna:

$$g(r,\theta) = \frac{\alpha_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n(r)\cos n\theta + \beta_n(r)\sin n\theta\right] \;;$$

$$u(r,\theta,t) = \frac{A_0(r,t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n(r,t)\cos n\theta + B_n(r,t)\sin n\theta\right] \;;$$

Bero eroalpen ekuazioa koordenatu polarretan

$$\gamma^2 \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_n}{\partial r}\right) - \frac{n^2}{r^2}A_n\right] = \frac{\partial A_n}{\partial t}\,,$$

$$A_n(r,0) = \alpha_n(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, g(r,\theta)\cos\theta\,;$$

$$A_n(a,t) = 0\,.$$

eta $B_n(r,t)$ funtzioekin era berean.

Orain berriro aldagaien banantzea

Bero eroalpen ekuazioa koordenatu polarretan

Banantze problemen *multzo* berri bat:

$$\gamma^2 \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial z_n}{\partial r}\right) - \frac{n^2}{r^2}z_n\right] = \frac{\partial z_n}{\partial t}\,,$$

$$z_n(r,t) \to R(r)T(t)\,; z_n(a,t) = 0\,.$$

Eta hemendik …

Bero eroalpen ekuazioa koordenatu polarretan

$$\frac{\gamma^2}{rR}(rR')' - \frac{\gamma^2 n^2}{r^2} = \frac{\dot{T}}{T} = -\lambda^2\gamma^2$$

Hau dela eta

$$\frac{1}{r}(rR')' + \left(\lambda^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)R = 0\,,\; R(a) = 0\,.$$

Mugalde baldintza baten faltan? Ez: erregulartasunaren hipotesi ezkutatua. *Ekuazioaren* soluzio orokorra:

$$R \to c_1 J_n(\lambda r) + c_2 Y_n(\lambda r)\,.$$

c_2 nulua, erregularra izateko.

Bessel-en funtzioen garapenak

Balio propioen ekuazioa:

$$J_n(\lambda a) = 0\,.$$

Balio propioen ekuazioaren soluzioa: biz $\xi_k^{(n)}$ zenbakia J_n funtzioaren k-garren erroa. Soluzio ez tribial existitzen da baldin eta $\lambda \in \{\xi_k^{(n)}/a\}_{k=1}^{\infty}$ badago, funtzio propioak $J_n(\xi_k^{(n)} r/a)$. $f(r)$ funtzioaren garapenak: haztapena r dugu;

$$f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{a^2 J_{n+1}^2\left(\xi_k^{(n)}\right)} \int_0^a \mathrm{d}s\, s f(s) J_n\left(\frac{\xi_k^{(n)} s}{a}\right) \right] J_n\left(\frac{\xi_k^{(n)} r}{a}\right)\,.$$

11.2 Bessel-en funtzioei buruzko interludioa

Bessel-en funtzioei buruzko interludioa

$$x J_\nu^2(x) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(x^2-\nu^2\right) J_\nu^2(x) + x^2\left(J_\nu'(x)\right)^2\right]\,,$$

Bessel-en ekuazioa erabiliz;

$$x J_\nu'(x) = \nu J_\nu(x) - x J_{\nu+1}(x)\,,$$

funtzio sortzailea erabiliz, edo J_ν funtzioaren berretura seriea:

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}\,.$$

Bessel-en funtzioak: gehigarriak

$$\begin{aligned}
\int_0^a \mathrm{d}r\, r J_n^2\left(\frac{\xi_k^{(n)} r}{a}\right) &= \frac{a^2}{\left(\xi_k^{(n)}\right)^2}\int_0^{\xi_k^{(n)}} \mathrm{d}s\, s J_n^2(s) \\
&= \frac{a^2}{2}\left[J_n'\left(\xi_k^{(n)}\right)\right]^2 \\
&= \frac{a^2}{2} J_{n+1}^2\left(\xi_k^{(n)}\right)
\end{aligned}$$

11.3 Berriro polarrak

Bero eroalpen ekuazioa koordenatu polarretan

$$A_n(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}(t) J_n\left(\frac{\xi_k^{(n)} r}{a}\right)\,,$$

$$\dot{a}_{nk} = -\gamma^2 \left(\frac{\xi_k^{(n)}}{a} \right)^2 a_{nk} \,;$$

$$a_{nk}(0) = \frac{2}{a^2 J_{n+1}^2 \left(\xi_k^{(n)} \right)} \int_0^a \mathrm{d}s \, s\alpha_n(s) J_n \left(\frac{\xi_k^{(n)} s}{a} \right)$$

12 Harmoniko esferikoak

Harmoniko esferikoak

Askotan, lehen banantze prozesua egin ondoren, $\nabla^2 u + \lambda^2 u = 0$ aztertu behar dugu. Hain zuzen ere, galdera hau da: nolakoa izan behar da λ ekuazio horrek tribiala ez den soluziorik izateko, mugalde baldintzen pean?

Aurrean dugun probleman simetria esferikoa agertzen bada, baldintza batzuk ezkutatuak dira.

Harmoniko esferikoak

Koordenatu esferikoak: $r \geq 0$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Lehenengo MB ezkutatua: φ-rekiko periodikotasuna. Fourier-en garapena

$$\begin{aligned} u(r, \theta, \varphi) &= \frac{a_0(r, \theta)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(r, \theta) \cos n\varphi + \\ &\quad b_n(r, \theta) \sin n\varphi \,] \,. \end{aligned}$$

edo

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(r, \theta) e^{in\varphi} \,.$$

Koordenatu esferikoak: Laplacearra

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^2 \partial_r u \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \partial_\theta \left(\sin\theta \partial_\theta u \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \partial_\varphi^2 u \,.$$

So

$$\begin{aligned} \nabla^2 u + \lambda^2 u = 0 \quad \Rightarrow \quad & \frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^2 \partial_r c_n \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \partial_\theta \left(\sin\theta \partial_\theta c_n \right) \\ & + \left(\lambda^2 - \frac{n^2}{r^2 \sin^2\theta} \right) c_n = 0 \,. \end{aligned}$$

Banantzea, berriro

Saiatu arestian ikusitako ekuazioan $c_n \to R(r)\Theta(\theta)$ forman. Hots,

$$-\frac{\left(r^2 R'\right)'}{R} = \frac{(\sin\theta\,\Theta')'}{\Theta\sin\theta} + \lambda^2 - \frac{n^2}{\sin^2\theta} = -\gamma + \lambda^2\,,$$

eta ondorioz

$$\frac{(\sin\theta\,\Theta')'}{\sin\theta} - \frac{n^2}{\sin^2\theta}\Theta + \gamma\Theta = 0\,.$$

Mugalde baldintzak?

Aldagai aldaketa: $t = \cos\theta$, $P(t) = \Theta(\theta)$.

Hasi $n = 0$ kasuan.

12.1 Legendre-ren polinomioak

Legendre-ren polinomioak

$$\left[\left(1-t^2\right)P'\right]' + \gamma P = 0\,.$$

1 punturen inguruko berretura seriea:

$$P(t) \to \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (1-t)^{\mu+k}$$

Indizea μ: 0, bikoitza. Soluzio bat: logaritmikoa. Baztertu, ez da erregularra $t \to 1$!!

Errekurrentzi erlazioa:

$$\alpha_{k+1} = \frac{k(k+1)-\gamma}{2(k+1)^2}\alpha_k\,.$$

Legendre-ren polinomioak

Konbergentzia: $|1-t| < 2$ tartean konbergentea

$k+1 > \gamma$ kasuan,

$$\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} > \frac{1}{2}\frac{k-1}{k+1}\,.$$

Beraz, $t = -1$ puntuan dibergente! Baldin eta...

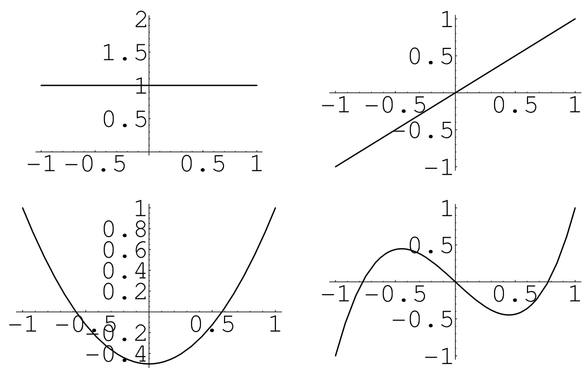
Baldin eta $\gamma = l(l+1)$ bada, non l osoa den, konbergentea da: seriea mozten da eta polinomio bat dugu.

Hau da:

$$P_l(t) = \sum_{k=0}^{l} \frac{(l+k)!}{(l-k)!\,(k!)^2\,2^k}(-1)^k(1-t)^k\,.$$

[Normalizazioaren hitzarmena: $P_l(1) = 1$]

Legendre-ren polinomioak



Rodrigues-en formula

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} \left(x^2 - 1\right)^l .$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^l l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} \left(x^2 - 1\right)^l &= \frac{1}{2^l l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} (x-1)^l (x-1+2)^l \\
&= \frac{1}{2^l l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} (x-1)^l \sum_{k=0}^{l} \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix} (x-1)^k 2^{(l-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{l} \frac{(l+k)!}{(l-k)! \, (k!)^2 \, 2^k} (-1)^k (1-x)^k .
\end{aligned}$$

Haztapena: 1.

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}t \, P_l(t) P_k(t) = \frac{2}{2l+1} \delta_{lk} .$$

[froga: SL eragilea; bestela: zatikako integrazioa, Rodrigues-en formularekin]

12.2 Legendre-ren funtzio asoziatuak

Legendre-ren funtzio asoziatuak

$[n \neq 0]$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[(1-t^2) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P(t) \right] + \left(\gamma - \frac{n^2}{1-t^2} \right) P(t) = 0 .$$

Erabili

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} \left[f(t) g(t) \right] = \sum_{n=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} f^{(n)}(t) g^{(k-n)}(t)$$

ondokoan:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(1-t^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\right]+\gamma f(t)=0\,.$$

$$(1-t^2)f^{(m+2)}(t)-2(m+1)tf^{(m+1)}(t)+(\gamma-m(m+1))f^{(m)}(t)=0\,.$$

Legendre-ren funtzio asoziatuak

Aldagai dependentea aldatu, $f^{(m)}(t)=g(t)/(1-t^2)^{m/2}$. Demagun f Legendre-ren ekuazioaren soluzioa dela, $n=0$ kasuan. Hau honela izanda, g ondokoaren soluzioa da,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(1-t^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(t)\right]+\gamma g(t)-\frac{m^2}{1-t^2}g(t)=0\,.$$

Legendre-ren ekuazioaren soluzio orokorrak singularitate logaritmikoa du $t=1$ puntuan. Deribazioaz, berretura singularra sortzen du horrek. Ondorioz, $t=1$ puntuan g erregularra izateko f-n singularitate logaritmikoaren koefizienteak nulua izan behar du.

Legendre-ren funtzio asoziatuak

γ parametroa $l(l+1)$ formakoa ez bada, non l naturala den, $t=-1$ puntuan ere singularitatea agertzen da, eta g funtzioak jaraunsten du. Beraz, muturretan erregularra eta aldi berean tribiala ez den soluziorik izateko, γ parametroak $l(l+1)$ formakoa izan behar du, non l naturala den.

Eta $f\to P_l(t)$ bada, m gehienez l izango da (bestela l ordenako polinomioa l aldiz baino gehiago deribatuz 0 lortzen dugu)

Legendre-ren funtzio asoziatuak

$$\begin{aligned}P_l^m(t) &= (-1)^m(1-t^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}P_l(t)\\ &= \frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-t^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^{m+l}}{\mathrm{d}t^{m+l}}(t^2-1)^l\,,\end{aligned}$$

non $l=m,m+1,\ldots$ Adibidez, $l=0$ aukerak $m=0$ ondorio dakar, $P_0^0(t)=1$; $l=1$ kasuan bi aukera ditugu, $m=0$ edo $m=1$:

$$P_1^0(t)=t\,,\qquad P_1^1(t)=-\sqrt{1-t^2}\,.$$

Legendre-ren funtzio asoziatuak

Oharra: literaturan gehien bat bi hitzarmen daude faserako. Hemen erabilitakoak Condon-Shortley-ren fasea kontuan hartzen du (Erabilgarria da gero mekanika kuantikoak goranzko eta beheranzko eragileak bateragarritasunez erabiltzeko). Besteak ez du Legendre-ren funtzio asoziatuetan sartzen bai, ordea, harmoniko esferikoetan.

Abramowitz-Stegun liburuan adibidez azken kasu honetan ondoko notazioa erabiltzen dute: $P_{lm}(x) = (-1)^m P^l_m(x)$.

m negatiboentzat funtzio asoziatua definitua izatea komenigarria da, ondoko moduan:

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$$

non $m \geq 0$. Harmoniko esferikoetan agertuko da.

Legendre-ren funtzio asoziatuak

Ortogonalak: m *jakin batentzat*, l ezberdinek funtzio ortogonalak zehazten dituzte:

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}t \, P_l^m(t) P_k^m(t) = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{lk} \, .$$

Frogapena: zatikako integrazioa, m deribatuak P_k^m funtziotik integrakizunaren beste zatietara pasatuz. Honela integrakizun berrian $P_k(t)$ bider l mailako polinomioa agertuko da. l k baino txikiago bada, berriro zatikako integrazioz integrala nulua dela ikusten dugu. Nulua ez izateko halabeharrezkoa da k eta l berdinak izatea.

12.3 Harmoniko esferikoak

Harmoniko esferikoak

Banantze problemara itzuliz, koordenatu esferikoetan Laplacearraren osagai angeluarraren balio eta funtzio propioen problema ondokoa dugu:

$$r^2 \nabla^2 Y_l^m(\theta, \varphi) = -l(l+1) Y_l^m(\theta, \varphi)$$

non

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \, .$$

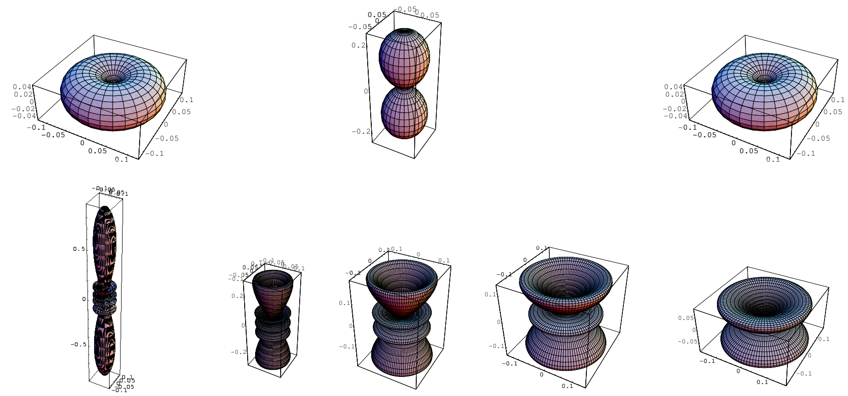
Harmoniko esferikoak: adibideak

$$Y_0^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \, ;$$

$$Y_1^{-1}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin\theta e^{-i\varphi} \, , \quad Y_1^0(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \, ,$$

$$Y_1^1(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin\theta e^{i\varphi} \, .$$

Harmoniko esferikoak: adibideak



Harmoniko esferikoak: propietateak

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \, \sin\theta \, Y_{l'}^{m'}(\theta,\varphi)^* Y_l^m(\theta,\varphi) \delta_{ll'} \delta_{mm'} \, .$$

$$g(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} c_{lm} Y_l^m(\theta,\varphi) \, ,$$

non

$$c_{lm} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \, \sin\theta \, Y_l^m(\theta,\varphi)^* g(\theta,\varphi) \, .$$

Fisikako erabilera bat: CMBR

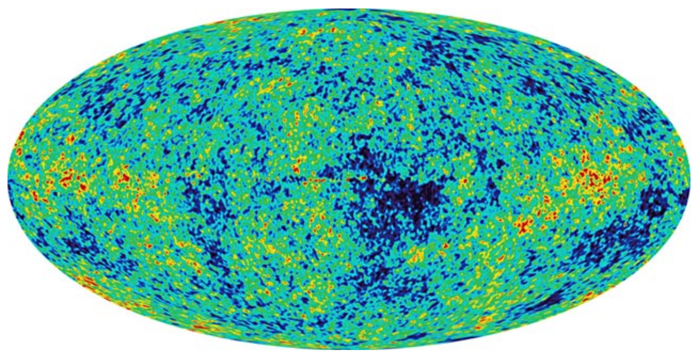
$$\Delta T(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} c_{lm} Y_l^m(\theta,\varphi) \, ,$$

m-rekiko menpekotasunik gabe:

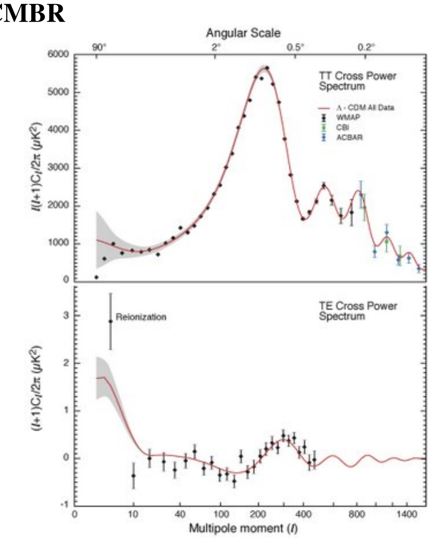
$$C_l = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} |c_{lm}|^2$$

eta $l(l+1)C_l$ marrazten dugu, l-ren funtzio gisa

CMBR



CMBR



CMBR

TT: temperature angular power spectrum
TE: temperature-polarization cross-power spectrum

Harmoniko esferikoak: eragileak

Biz

$$
\begin{aligned}
\hat{L}_z &= -i\frac{\partial}{\partial\varphi} = -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\,, \\
\hat{L}_x &= i\left[\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos\varphi\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] \\
&= -i\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\,, \\
\hat{L}_y &= -i\left[\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\varphi\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] \\
&= -i\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\,,
\end{aligned}
$$

Harmoniko esferikoak: goranzko eta beheranzko eragileak

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k\,.$$

$$\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y \qquad \hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y$$

$$
\begin{aligned}
\left[\hat{L}_+, \hat{L}_-\right] &= 2\hat{L}_z \\
\left[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm\right] &= \pm\hat{L}_\pm
\end{aligned}
$$

$$\hat{L}_i = -i\epsilon_{ijk}x_j\frac{\partial}{\partial x_k}$$

Harmoniko esferikoak: Casimir

$$\left[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_i\right] = 0\,.$$

Adierazpen diferentziala:

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\,.$$

Harmoniko esferikoak: aldibereko diagonalizazioa

$$\hat{\mathbf{L}}^2 Y_l^m(\theta,\varphi) = l(l+1)Y_l^m(\theta,\varphi)\,.$$

$$\hat{L}_z Y_l^m(\theta,\varphi) = mY_l^m(\theta,\varphi)\,.$$

Irudi baliokidea

$$\hat{\mathbf{L}}^2(x+iy)^l = l(l+1)(x+iy)^l\,, \qquad \hat{L}_z(x+iy)^l = l(x+iy)^l\,.$$
$$\hat{L}_+(x+iy)^l = 0\,, \qquad \hat{L}_-(x+iy)^l = -2lz(x+iy)^{l-1}\,,$$
$$\hat{L}_z\hat{L}_-^k(x+iy)^l = \hat{L}_-^k\left(\hat{L}_z - k\right)(x+iy)^l = (l-k)\hat{L}_-^k(x+iy)^l\,;$$
$$\hat{\mathbf{L}}^2 L_-^k(x+iy)^l = l(l+1)\hat{L}_-^k(x+iy)^l$$
$$\hat{L}_-^{2l+1}(x+iy)^l = 0\,.$$

Irudi baliokidea

$$(x+iy)^l = r^l\sin^l\theta e^{il\varphi} \propto Y_l^l(\theta,\varphi)\,.$$
$$\hat{L}_\pm Y_l^m(\theta,\varphi) = [l(l+1) - m(m\pm 1)]^{1/2}\, Y_l^{m\pm 1}(\theta,\varphi)\,.$$

Atala IV

Fourier-en transformatua

13 Zergaitia

Fourier-en analisitik Fourier-en Transformatura

Demagun f_l funtzio familia, periodikoak, $f_l(x+2l) = f_l(x)$, eta $f_l(x) \to f(x)$ limitean, $l \to \infty$:

$$f_l(x) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \mathrm{d}\xi\, f_l(\xi) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi(\xi - x)}{l}\right)\right].$$

Demagun

$$\int_{-l}^{l} \mathrm{d}\xi\, |f_l(\xi)| < +\infty\,.$$

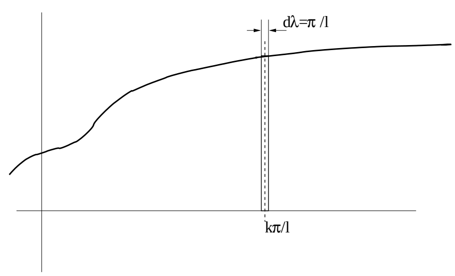
Fourier-en analisitik Fourier-en transformatura

Hots:

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \mathrm{d}\xi\, f_l(\xi) = 0\,.$$

Kontutan hartu

$$\int_0^{\infty} \mathrm{d}\lambda\, g(\lambda) \approx \sum_{k=0} \frac{\pi}{l} g\left(\frac{k\pi}{l}\right)\,.$$



Fourier-en analisitik Fourier-en transformatura

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{l\to\infty} \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} \mathrm{d}\xi\, f_l(\xi) \cos\frac{k\pi(x-\xi)}{l} = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi\, f(\xi) \cos\left[\lambda(x-\xi)\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi\, f(\xi) \cos\left[\lambda(x-\xi)\right] \end{aligned}$$

Honezaz gain

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi\, f(\xi) \sin\left[\lambda(x-\xi)\right]$$

Fourier-en analisitik Fourier-en transformatura

Beraz

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi\, f(\xi)\cos\left[\lambda(x-\xi)\right] \\ &\quad + \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi\, f(\xi)\sin\left[\lambda(x-\xi)\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi\, f(\xi) e^{i\lambda(\xi-x)} \end{aligned}$$

Fourier-en analisitik Fourier-en transformatura

Azkenez, defini dezagun

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi\, f(\xi) e^{ik\xi}\,.$$

Ondokoa frogatu dugu:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, \hat{f}(k) e^{-ikx}\,.$$

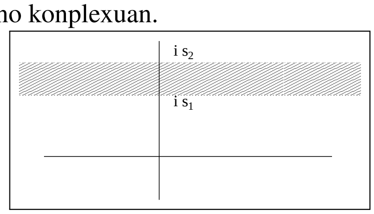
14 Fourier-en transformatua plano konplexuan

Definizioa

Demagun $f(x)$ aldagai *errealeko* funtzio konplexua,

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x) e^{izx}\,.$$

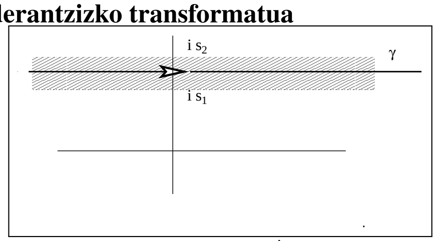
Definizio eremua: inplizitua, integralaren konbergentzia eremua. *Banda* horizontala plano konplexuan.



$\exists s_1, s_2 \;/\; \forall s \in (s_1, s_2)$
eta$x \in \Re\, \exists \hat{f}(x+is)$.

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi f(\xi) e^{i(x+is)\xi}\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi |f(\xi)| e^{-s\xi}$$

Alderantzizko transformatua

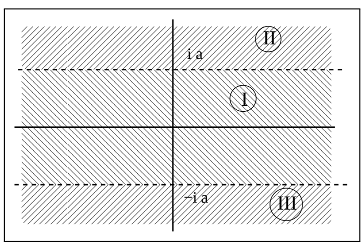


$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\gamma \mathrm{d}z\, e^{-izx} \hat{f}(z)\,.$$

N.B.: plano konplexuko $\hat{f}$ funtzioa emanda, zein bandatan definitu dugun zehaztu behar dugu bere alderantzizko transformatua lortzeko.

Adibidea

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}\,.$$



$$\begin{aligned} f_{\mathrm{I}}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a}e^{-a|x|} \\ f_{\mathrm{II}}(x) &= -\frac{\sqrt{2\pi}}{a}\theta(x)\sinh ax \\ f_{\mathrm{III}}(x) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{a}\theta(-x)\sinh ax \end{aligned}$$

15 Erabilerak

15.1 EDAk

EDAk

$$\mathcal{F}[f'](\zeta) = -i\zeta\mathcal{F}[f](\zeta)\,.$$

Adibidea:

$$f' + \alpha f = g\,.$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\gamma \mathrm{d}\zeta\, \frac{i\hat{g}(\zeta)}{\zeta + i\alpha} e^{-i\zeta x}$$

non γ (I) $-i\alpha$-ren gainean edo (II) $-i\alpha$-ren azpian dagoen.

$$f_{\mathrm{I}}(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}\xi\, e^{-\alpha(x-\xi)} g(\xi)\,.$$

$$f_{\mathrm{II}}(x) = -\int_{x}^{\infty} \mathrm{d}\xi\, e^{-\alpha(x-\xi)} g(\xi)\,.$$

15.2 DPEk

DPEk

$$u_t = \alpha^2 \nabla^2 u \, , u(\mathbf{x},0) = f(\mathbf{x}) \, , \int_{\mathbf{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{x} \, |f(\mathbf{x})| \leq \infty \, .$$

Fourier-en transformatua bi alboetan, eta hastapen baldintza:

$$\int_{\mathbf{R}^3} \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{x}}{(2\pi)^{3/2}} \, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} u(\mathbf{x},t) = \hat{u}(\mathbf{k},t) \Rightarrow \hat{u}_t + \alpha^2 k^2 \hat{u} = 0 \, , \hat{u}(\mathbf{k},0) = \hat{f}(\mathbf{k})$$

$$\hat{u}(\mathbf{k},t) = \hat{f}(\mathbf{k}) e^{-\alpha^2 k^2 t} \Rightarrow u(\mathbf{x},t) = \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{u}(\mathbf{k},t) \, .$$

Hedatzailea

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{-\alpha^2 k^2 t} \\
&= \int_{\mathbf{R}^6} \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k} \, \mathrm{d}^3\mathbf{r}}{(2\pi)} \, e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{r})} f(\mathbf{r}) e^{-\alpha^2 k^2 t} \\
&= \int_{\mathbf{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{r} \left[\int_{\mathbf{R}^3} \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{r})} e^{-\alpha^2 k^2 t} \right] f(\mathbf{r}) \\
&= \int_{\mathbf{R}^3} \mathrm{d}^3\mathbf{r} \, G(\mathbf{x}-\mathbf{r},t) f(\mathbf{r})
\end{aligned}$$

non

$$G(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(4\pi\alpha^2 t)^{3/2}} e^{-x^2/4\alpha^2 t} \, .$$

Alderantzizko espazioko hedatzailea eta hastapen datua

Honetaz konturatu (alderantzizko espazioa, Fourier-en espazioa, momentuaren espazioa, momentuaren irudia):

$$\hat{G}(\mathbf{k},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\alpha^2 k^2 t} \, .$$

Hastapen balioa:

$$\lim_{t\to 0^+} G(\mathbf{x},t) = \delta^{(3)}(\mathbf{x}) \, .$$

Uhin ekuazioaren Green-en funtzioa

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t)\,.$$

Fourier-en transformatua idatzi,

$$\hat{u}(k,\omega) = \int_{\mathbf{R}^2} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{2\pi} e^{-i(kx-\omega t)} u(x,t)\,.$$

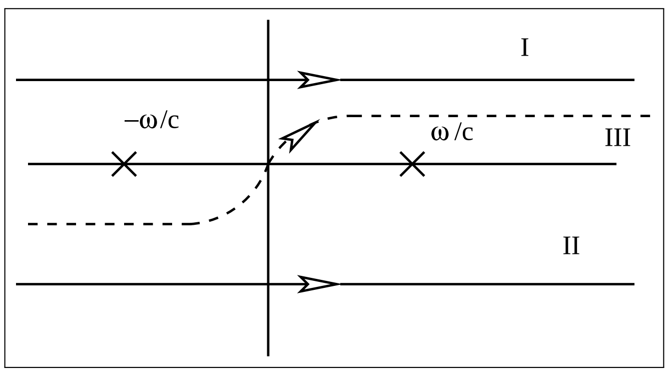
Ondorioz

$$\hat{u}(k,\omega) = \frac{\hat{f}(k,\omega)}{k^2c^2-\omega^2} = 2\pi\hat{G}(k,\omega)\hat{f}(k,\omega)\,.$$

$\hat{G}$-ren alderantzizko Fourier-en transformatua egiteko, *prozedura* zehaztu behar dugu, batzuen artean.

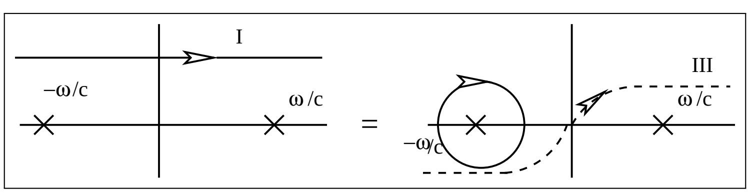
Prozedurak

ω integralaren ibilbidea erreal mantendu nahiez gero, k aldagaiari dagokionez aukera batzuk ditugu:



Prozedurak

Izatez, III. ibilbidea ez dago Fourier-en transformaturik lotuta. Hala ere, Green-en funtzioaren poloen hondarrak ekuazio *homogeneoaren* soluzioa da



$$
\begin{aligned}
G_{\mathrm{I}}(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi\omega c}\theta(-x)e^{-i\omega t}\sin\frac{\omega x}{c} \\
G_{\mathrm{II}}(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega}{4\pi\omega c}\left\{-i\cos\frac{\omega x}{c} + [\theta(-x)-\theta(x)]\sin\frac{\omega x}{c}\right\} \\
G_{\mathrm{III}}(x,t) &= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi\omega c}\theta(x)e^{-i\omega t}\sin\frac{\omega x}{c}
\end{aligned}
$$

Kasu guztietan $(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2)G(x,t) = \delta(x)\delta(t)$ dugu. Adierazpen esplizituak ez dira oso adierazgarri...

$$
\begin{aligned}
G_{\mathrm{I}}(x,t) &= \frac{1}{2c}\theta(-x)\left[\theta\left(t+\frac{x}{c}\right)-\theta\left(t-\frac{x}{c}\right)\right] \\
G_{\mathrm{II}}(x,t) &= \frac{1}{4c}\left[\theta\left(\frac{x}{c}-t\right)-\theta\left(\frac{x}{c}+t\right)\right]+ \\
&\quad \frac{1}{4c}[\theta(-x)-\theta(x)]\left[\theta\left(t+\frac{x}{c}\right)-\theta\left(t-\frac{x}{c}\right)\right] \\
G_{\mathrm{III}}(x,t) &= -\frac{1}{2c}\theta(x)\left[\theta\left(t+\frac{x}{c}\right)-\theta\left(t-\frac{x}{c}\right)\right]
\end{aligned}
$$

16 Laplace-ren Transformatua

Laplace-ren transformatua

$$
\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} \mathrm{d}t\, e^{-st} f(t)\,.
$$

Izatez, Fourier-en transformatu bat baino ez da; demagun $\mathcal{F}[f](\zeta) = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{d}x\, e^{izx} f(x)/\sqrt{2\pi}$; ondorioz

$$
\mathcal{L}[f](s) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[P_+(f)](is),
$$

non $P_+(f)(x) = \theta(x)f(x)$ den.

Uhin ekuazioaren hedatzailea

$$
u_{tt} = c^2\nabla^2 u\,, \qquad u(\mathbf{r},0) = f(\mathbf{r})\,, \quad u_t(\mathbf{r},0) = 0\,.
$$

$$
\hat{U}(\mathbf{k},s) = \int_0^{\infty} \mathrm{d}t \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{(2\pi)^{d/2}} e^{-st} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} u(\mathbf{r},t)\,.
$$

Hau da,

$$
\hat{U}(\mathbf{k},s) = \frac{s}{s^2+c^2k^2}\hat{f}(\mathbf{k})\,.
$$

$$
\hat{u}(\mathbf{k},t) = \cos(ckt)\hat{f}(\mathbf{k})
$$

$$u(\mathbf{r},t) = \int_{\mathbf{R}^d} \mathrm{d}\mathbf{x}\, G_d(\mathbf{r}-\mathbf{x},t) f(\mathbf{x})\,.$$

non

$$G_d(\mathbf{r},t) = \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \theta(t)\cos(ckt) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,.$$

$$G_1(r,t) = \frac{1}{2}\left[\delta(r+ct) + \delta(r-ct)\right]\,;$$

$$G_2(r,t) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} k\cos(ckt) J_0(kr)\,;$$

$$G_3(r,t) = \frac{1}{2\pi^2 r}\int_0^\infty \mathrm{d}k\, k\cos(ckt)\sin(kr)\,;\ldots$$

Atala V

Karakteristiken metodoa

17 Lehen ordenako ekuazioak

17.1 Problemaren agerpena

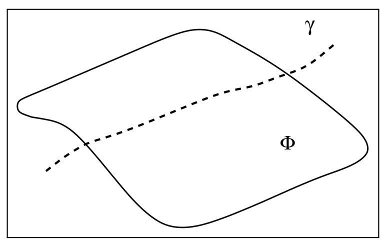
Problema

$$F(x, y, z, z_x, z_y) = 0$$

eta *datua* (baldintza)

$$\gamma := (x(t), y(t), z(t)) \, .$$

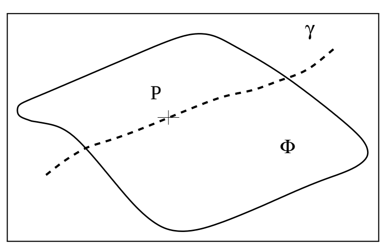
Soluzioa: *ekuazioaren* soluzioak $\phi(x, y, z)$ gainazalak dira; problemaren soluzioak: ekuazioaren soluzioak diren gainazalak eta γ gainazalean murgilduta.



17.2 Soluzioaren datuaren inguruko garapena

Datuaren inguruko garapena

Datua eta soluzioa erregularrak izanez gero, gainazalak onartu behar du puntu baten inguruko Taylor-en garapena, garapen hori *datuak eta ekuazioak guztiz zehaztua*.



Garapena

Hau da,

$$z(x, y) = z(P) + z_x(P)(x - x_0) + z_y(P)(y - y_0) + \dots$$

($P = (x_0, y_0)$), eta $z_x(P)$, $z_y(P)$ γ-k eta F-k zehaztuak.

P puntua γ datuaren gainean $\Rightarrow \dot{z} = z_x(P)\dot{x} + z_y(P)\dot{y}$.

Butxadurarik ez badago ekuazioa erabiliz , $p = z_x(P)$ eta $q = z_y(P)$ bi ezezagunentzat bi ekuazio lortzen ditugu:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \dot{x}p + \dot{y}q\,,\\ 0 &= F(x(t), y(t), z(t), p, q)\,.\end{aligned}$$

Butxadura

Aurreko sistemak soluzio bakarra ez badu, bi aukera dago: edo bai p baita q ere askeak dira, edo q p-ren bidez zehaztua da (edo alderantziz). Demagun p guztientzat soluzioa dagoela, hau da

$$\forall p \qquad F\left(x(t), y(t), z(t), p, \frac{\dot{z} - p\dot{x}}{\dot{y}}\right) = 0$$

Ondorioz

$$\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\dot{x}}{\dot{y}}\frac{\partial F}{\partial q} \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial p}\mathrm{d}y - \frac{\partial F}{\partial q}\mathrm{d}x = 0\,.$$

Butxadura

Eraiki dogun moduan dela eta ($p \to z_x$, $q \to z_y$, $F = 0$), ondokoa ere betetzen da:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}p &= z_{xx}\mathrm{d}x + z_{xy}\mathrm{d}y\,;\\ 0 &= F_x + F_z p + z_{xx}F_p + z_{xy}F_q\,,\\ 0 &= F_y + F_z q + z_{xy}F_p + z_{yy}F_q\,,\end{aligned}$$

Beraz ($\mathrm{d}y = [F_q/F_p]\,\mathrm{d}x$ erabiliz)

$$\mathrm{d}p = \frac{z_{xx}F_p + z_{xy}F_q}{F_p}\mathrm{d}x = -\frac{F_x + F_z p}{F_p}\mathrm{d}x\,.$$

$$\mathrm{d}q = -\frac{F_y + F_z q}{F_p}\mathrm{d}x\,.$$

17.3 Karakteristiken ekuazioa

Karakteristiken ekuazioa

Lau ekuazio diferentzial arrunten sistema:

$$\frac{\mathrm{d}z}{pF_p + qF_q} = \frac{\mathrm{d}x}{F_p} = \frac{\mathrm{d}y}{F_q} = \frac{-\mathrm{d}p}{F_x + pF_z} = \frac{-\mathrm{d}q}{F_y + qF_z}\,.$$

Soluzio orokorra: 5 dimentsioetan, *kurba familia*, lau parametroekin. Kurba hauek: *Kurba karakteristikoak, karakteristikak.*

γ 3 dimentsiotako kurba (x_0, y_0, z_0) puntuan kurba karakteristiko batera jaso ahal badugu, problemak ez du soluzio bakarra (gerta liteke soluziorik ez izatea edo soluzio kopurua infinitoa izatea).

Soluzioa karakteristiken multzoa

Demagun γ zintzoa (zintzoa: $p\dot{x} + q\dot{y} = \dot{z}$ eta $F(x,y,z,p,q) = 0$ ekuazioek soluzio bakarra onartzen dute, , $p = z_x(P)$ eta $q = z_y(P)$). γ kurbaren edozein parametrotan $(x(t), y(t), z(t), p(t), q(t))$ 5dim bektorea karakteristiken ekuazio sistemarentzat hastapen datua dogu. Demagun t parametrori dagokion puntutik pasatzen den karakteristika σ parametroaren bidez adierazten dugula. Hau honela izanda, lehen ordenako deribatu partzialetako ekuazioaren soluzia, γ barnean izanda, $(x(t,\sigma), y(t,\sigma), z(t,\sigma), p(t,\sigma), q(t,\sigma))$ bost dimentsiotako gainazala dugu.

t bakoitzarentzat , $(x(t,\sigma), y(t,\sigma), z(t,\sigma), p(t,\sigma), q(t,\sigma))$ bektorea

$$\frac{z'}{pF_p + qF_q} = \frac{x'}{F_p} = \frac{y'}{F_q} = \frac{-p'}{F_x + pF_z} = \frac{-q'}{F_y + qF_z}\,,$$

ekuazioen soluzioa da, non $'$ ikurra σ-rekiko deribatua den, eta hastapen balioa $(x(t,0), y(t,0), z(t,0), p(t,0), q(t,0)) = (x(t), y(t), z(t), p(t), q(t))$.

Adibidea

$$z = z_x z_y\,; \qquad F(x,y,z,p,q) = pq - z\,;$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{2pq} = \frac{\mathrm{d}x}{q} = \frac{\mathrm{d}y}{p} = \frac{-\mathrm{d}p}{-p} = \frac{-\mathrm{d}q}{-q} = \mathrm{d}\sigma\,;$$

Solution:

$$\begin{aligned} x &= c_1 + c_4 e^{\sigma} \quad , \qquad & y &= c_2 + c_3 e^{\sigma}\,, \\ z &= c_5 + c_3 c_4 e^{2\sigma} \quad , & & \\ p &= c_3 e^{\sigma} \quad , \qquad & q &= c_4 e^{\sigma}\,. \end{aligned}$$

Adibidea jarr.

γ_1 datua $x = 1$, $z = y$ bada,

$$(x(t,0), y(t,0), z(t,0), p(t,0), q(t,0)) = (1, t, t, t, 1)$$

eta

$$(x(t,\sigma), y(t,\sigma), z(t,\sigma)) = \left(e^{\sigma}, te^{\sigma}, te^{2\sigma}\right)\,,$$

edo

$$z_1(x,y) = xy\,.$$

Datu bateraezina

Biz γ_2 datua $x = y$, $z = x^2$. Honela

$$(x(t,0), y(t,0), z(t,0), p(t,0), q(t,0)) = (t, t, t^2, t, t)$$

eta soluzioa gainazal endakatua da: bakarrik $x = y$, $z = x^2$ lerroa.

Hastapen datua kurba karakterisktiko batera jaso dugu.

17.4 Ekuazio kuasilinealak (ia linealak)

Ekuazio kuasilinealak (ia linealak)

$$A(x,y,z)z_x + B(x,y,z)z_y = C(x,y,z)\,.$$

Karakteristiken ekuazio sistema honako hau dugu:

$$\left(\frac{\mathrm{d}z}{pA+qB}=\right)\left[\frac{\mathrm{d}z}{C}=\frac{\mathrm{d}x}{A}=\frac{\mathrm{d}y}{B}\right]=\frac{-\mathrm{d}p}{F_x+pF_z}=\frac{-\mathrm{d}q}{F_y+qF_z}\,;$$

x, y, z aldagaientzat *bananduak dira* p, q-rentzat: 5d-tako kurba karakteristikoek proiekzio simple dute 3 dimentsioetan. Cauchy-ren hastapen datuaren analisia zuzenean 3d-n egiten dugu.

Adibidea

$$yzz_x + z_y = 0\,, \qquad \gamma := \left\{x=0, z=y^3\right\}\,.$$

Ekuazioak

$$\frac{\mathrm{d}x}{yz}=\frac{\mathrm{d}y}{1}=\frac{\mathrm{d}z}{0}=\mathrm{d}\sigma\,,$$

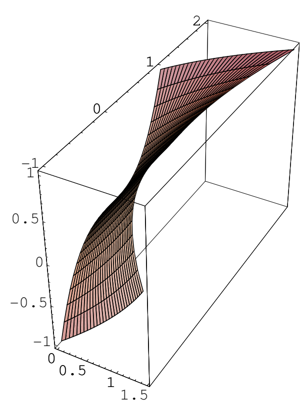
Soluzioak

$$x(\sigma)=c_1+c_2c_3\sigma+\frac{1}{2}c_3\sigma^2\,,\quad y(\sigma)=\sigma+c_2\,,\quad z(\sigma)=c_3\,,$$

non c_1, c_2, c_3 σ-rekiko independeak diren. Hastapen datua $(0,t,t^3)$, hastapen baldintzapeko DPE-ren soluzioa:

$$x(t,\sigma)=\frac{1}{2}t^3\sigma^2+t^4\sigma\,,\quad y(t,\sigma)=\sigma+t\,,\quad z(t,\sigma)=t^3\,.$$

Adibidea jarr.



Adibidea jarr.

$$\frac{\mathrm{d}x}{yz} = \frac{\mathrm{d}y}{1} = \frac{\mathrm{d}z}{0}\,.$$

Soluzio orokorraren sistema: $z = \zeta$ and $x - \zeta y^2/2 = \xi$.

(ξ, ζ) bikoteak 3d-takp kurba zehazten du (*kurba karakteristikoa*).

DPE-ren soluzio orokorra: karakteristiken familiak, $g(\xi, \zeta) = 0$ or $\xi = f(\zeta)$.

$$x = \frac{1}{2}y^2 z + f(z)\,.$$

[Egiaztatu: deribatu x eta y aldagaiekiko , $1 = y^2 z_x/2 + f'(z)z_x$, $0 = zy + y^2 z_y/2 + f'(z)z_y$. Askatu $f'(z)$, ordezkatu: DPE] HBP (hastapen baldintzapeko problema): $\gamma = \{x = 0, z = y^3\}$, soluzio orokorrean ordezkatu, ondorioz $f(y^3) = -y^5/2$, HBP-ren soluzioa $2x - zy^2 + z^{5/3} = 0$ da.

17.5 Lehen ordenako DPE linealak

Lehen ordenako DPE linealak eta adibidea

$$A(x, y)z_x + B(x, y)z_y = C(x, y, z)\,.$$

Karakteristikak

$$\frac{\mathrm{d}z}{C(x, y, z)} = \left[\frac{\mathrm{d}x}{A(x, y)} = \frac{\mathrm{d}y}{B(x, y)}\right]\,,$$

x eta y-rentzako ekuazioak bananduak dira; soluzioak: l3d-tako kurbak, karakteristika izena berriro eskuratuz..

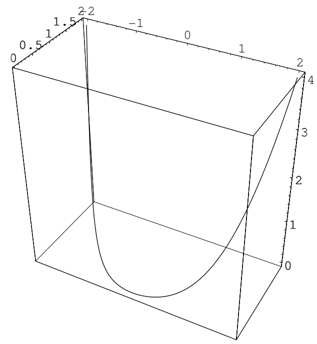
Adibidea: $z_x + z_y = 1$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y = \mathrm{d}z$, so $\xi = x - y$, $z = \eta + x$, karakteristiken familia, $\eta = f/\xi)$, soluzioa.: $z(x, y) = x + f(x - y)$.

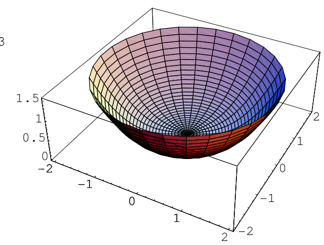
Beste adibide bat, HBP

$$xz_y = yz_x\,,$$

beraz $z = \eta$ eta $x^2 + y^2 = r^2$; soluzio orokorra $z = f(r)$.

- HBP1: $\gamma_1 = \{x^2 + y^2 = 4, z = 1\}$; sartu soluzio orokorrean, $f(2) = 1$, f zehaztugabekoa, hastapen datua karakteriska delako!
- HBP2: $\gamma_2 = \{x^2 - 2y = 0, z = y^2\}$; berridatzi γ $r^2 = 2y + y^2$ eta $y^2 = f(\sqrt{2y + y^2})$, beraz $f(r) = 2 + r^2 - 2\sqrt{1 + r^2}$.





17.6 Bi aldagai independente baino gehiago

Bi aldagai independente baino gehiago

$$F(\{x_i\}_{i=1}^n, z, \{\partial^i z\}_{i=1}^n) = 0\,.$$

Kuasilinealeetan,

$$\sum_{j=1}^n A_j\left(\{x_i\}_{i=1}^n, z\right)\partial^j z = C\left(\{x_i\}_{i=1}^n, z\right)\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{A_1} = \frac{\mathrm{d}x_2}{A_2} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x_n}{A_n} = \frac{\mathrm{d}z}{C}\,.$$

Bi baino gehiago, adibidea

Adibidea: $u_x + u_y + u_z = 3u$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y = \mathrm{d}z = \mathrm{d}u/3u$, eta soluzioa $u(x,y,z) = g(x-y, x-z)\exp(3x)$.

HBP: $\{x = y+y^2,\ u = (y^4-y+z)e^{3y}\}$ lerrotik. Beraz $g(\xi,\zeta) = (\xi^2+\xi-\zeta)e^{-3\xi}$ eta $u(x,y,z) = e^{3y}(x^2-2xy+y^2-y+z)$.

Karakteristikeekin: $x(t) = t+c_1$, $y(t) = t+c_2$, $z(t) = t+c_3$, $u(t) = c_4e^{3t}$; HBP: $x(0,\sigma,\tau) = \sigma+\sigma^2$, $y(0,\sigma,\tau) = \sigma$, $z(0,\sigma,\tau) = \tau$, $u(0,\sigma,\tau) = (\sigma^4-\sigma+\tau)e^{3\sigma}$.

Azkenez: $x(t,\sigma,\tau) = t+\sigma+\sigma^2$, $y(t,\sigma,\tau) = t+\sigma$, $z(t,\sigma,\tau) = t+\tau$, $u(t,\sigma,\tau) = (\sigma^4-\sigma+\tau)e^{3\sigma+3t}$.

18 Bigarren ordenako ekuazioak

18.1 Cauchy-ren problemak

Problemaren agerpena

$$F(x,y,u,p,q,r,s,t) = 0\,,$$

$p = u_x$, $q = u_y$, $r = u_{xx}$, $s = u_{xy}$, $t = u_{yy}$: Ekuazioa. Soluzioa: gainazala.

HBP: $(x(\tau), y(\tau), z(\tau)$?

Honen bidez $\dot{z} = p\dot{x} + q\dot{y}$ zehazten dugu, ez da aski. *Datu gehiago* behar dugu: $p(\tau)$ edo $q(\tau)$ (edo euren gainezarmena). Horrela, p eta q, biak, hastapen lerroak zehaztuak dira.

r, s, t, sistema:

$$F = 0\,, \qquad \dot{p} = r\dot{x} + s\dot{y}\,, \qquad \dot{q} = s\dot{x} + t\dot{y}\,.$$

Butxadura

[Lehen ordenakoetan bezala:] Ez dago soluziorik baldin eta

$$F_r\dot{y}^2 - F_s\dot{y}\dot{x} + F_t\dot{x}^2 = 0$$

bada. Posible izango litzateke 8d-tan aztertzea, zaila.

Kasu berezia:

$$A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} = D(x,y,u)\,.$$

Honela:

$$A\mathrm{d}y^2 - 2B\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + C\mathrm{d}x^2 = 0$$

planoan karakteristikak.

18.2 Bigarren ordenako DPE-een sailkapena

Sailkapena

$F_r\dot{y}^2 - F_s\dot{y}\dot{x} + F_t\dot{x}^2 = 0$ koadratikoa $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ funtzioan. Bi soluzio erreal izateko, diskriminatzailea positiboa izan behar da. Bat bakarrik izateko, nulua; soluzio errealik ez izateko, negatiboa. Kasu berezian hau dugu diskriminatzailea:

$$\Delta = B^2 - AC\,.$$

- $\Delta > 0$, bi soluzio, *hiperbolikoa*
- $\Delta = 0$, soluzio erreal bat, *parabolikoa*
- $\Delta < 0$, ez dago soluzio errealik, *eliptikoa*

18.3 Karakteristikek informazioa garraiatzen dute

Lehen ordenako ekuazioak

Demagun $A(x,y)z_x + B(x,y)z_y = C(x,y,z)$ lehen ordenako ekuazio mota. Karakteristiken ekuazioa $y' = B/A$; soluzioa (kongruentzia izanda) $\phi(x,y) = \xi$, beraz $A\phi_x + B\phi_y = 0$. $\xi = \phi(x,y)$, $\zeta = y$ aldagai aldaketaren bidez, ekuazioa $z_\zeta = \gamma(\xi,\zeta,z)$ bihurtzen da, ekuazio diferentzial arrunta!

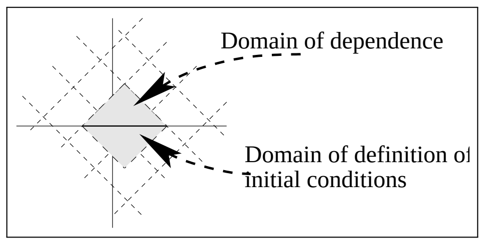
Karakteristika baten edozein puntutan z-ren balioa beste puntu jakin batekoak zehazten du (HBP ekuazio diferentzial arruntarentzat); informazioa karakteristikan zehar dario.

Adibidea: $\rho_x + \rho_y = \rho^2$, karakteristikak $\xi = x - y$, $\rho_\zeta = \rho^2$, soluzioa $\rho = 1/(f(\xi) - \zeta)$.

Bigarren ordena

(x, y) puntutik bi karakteristika pasatuz gero, koordenatu sistema berria. Aldagai aldaketa egin, eta ikusten dugu soluzioa guztiz zehaztua dela menpeko aldagaiaren eta bere deribatuaren balioen bidez (p edo q, eta independenteki $\dot{z} = p\dot{x} + q\dot{y}$): Cauchy-ren problema ondo planteatuta dago hiperbolikoetan.

Uhin ekuazioa



18.4 Ondo planteatutako problemak

Ondo planteatutako problemak

- *Hiperbolikoa*: Cauchy-ren problema, muga irekia: Γ, $u|_\Gamma$ *eta* $\mathbf{n}_\Gamma \cdot (\nabla u)|_\Gamma$.
- *Parabolikoa*: Muga irekia, Dirichlet, Neumann, nahasia. ($u|_\Gamma$, $\mathbf{n}_\Gamma \cdot (\nabla u)|_\Gamma$, $\alpha u|_\Gamma + \beta \mathbf{n}_\Gamma \cdot (\nabla u)|_\Gamma$).
- *Eliptikoa*: Muga itxia, Dirichlet, Neumann, Nahasia.

Atala VI

Hurbilketa metodoak

19 Sarrera

Sarrera

Soluzio zehatzak lortzea ez dugu beti lortuko... eta askotan, nahiz eta lortu, ez dira erabilgarriak informazioa eskuratzeko.

Soluzio *hurbilduak* behar ditugu.

- Perturbazio metodoak
- Aldakuntzaren metodoak (”Variational methods”)
- Garapen asintotikoak
- Zenbakizko metodoak

20 Perturbazio metodoak

Zailtasunak:

- Konbergentzi eremua zehaztea;
- Konbergentziarik ez egotea (perturbazio singularrak)

21 Perturbazio arrunten teoria

Adibidea: perturbazio arrunta

$$y' + \epsilon y^2 = 0\,; \qquad y(0) = a\,.$$

Saiatu soluzioa ϵ-en berretura serie forman lortzen:

$$y \to y(x;\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n y_n(x)\,.$$

Errepikapen adierazpena:

$$y'_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} y_k y_{n-k} = 0\,, \quad n \geq 0\,.$$

Hastapen baldintza, printzipioz, ez da ϵ-en funtzioa, beraz ez dugu garatu behar eta

$$y_0(0) = a\,; \qquad y_n(0) = 0\,, \quad n > 0\,.$$

Adibidea, jarr.

Kasu honetan, errepikapenaren soluzioa erraza da: $y_n(x) = (-1)^n a^{n+1} x^n$, eta

$$y(x;\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \epsilon^n a^{n+1} x^n \,.$$

beraz $|x| < 1/|\epsilon a|$ eremuan bere limitea $y(x) = a/(1+\epsilon a x)$ da.

Adibidea DPErekin

$$\nabla^2 u + \frac{\epsilon}{R^2} u^2 = 0\,, \quad u(R,\theta) = \cos\theta\,, \quad r \in [0,R]\,,\ \theta \in [0,2\pi)\,.$$

Garatu $u(r,\theta;\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n u_n(r,\theta)$. Zerogarren ordenean

$$\nabla^2 u_0 = 0\,, \quad u_0(R,\theta) = \cos\theta\,,$$

eta $u_0(r,\theta) = (r/R)\cos\theta$ (inplizituki: $r = 0$).

Adibidea, jarr.

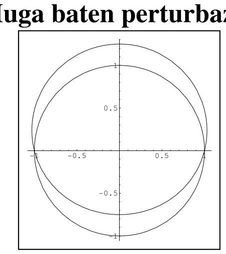
Lehen ordena:

$$\nabla^2 u_1 = -\frac{u_0^2}{R^2} = -\frac{r^2}{R^4}\cos^2\theta = -\frac{r^2}{2R^4}\left(1+\cos 2\theta\right)\,, \qquad u_1(R,\theta) = 0\,.$$

$$u_1(r,\theta) = \frac{1}{32}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right] + \frac{1}{24}\left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right]\cos 2\theta\,.$$

Eta abar. Lehen ordena bera oso ona baita $\epsilon = 1$ kasuan ere! (errorea % 5akoa da!)

Muga baten perturbazioa



$$\nabla^2 u = 0\,, \quad u(1+\frac{1}{4}\sin\theta,\theta) = \cos\theta\,, \quad r \in [0, 1+\frac{1}{4}\sin\theta], \theta \in [0,2\pi)\,.$$

Muga baten perturbazioa

Erabili

$$\nabla^2 u = 0\,, \quad u(1+\epsilon\sin\theta,\theta) = \cos\theta\,, \quad r\in[0,1+\epsilon\sin\theta], \theta\in[0,2\pi)\,.$$

Eta mugalde baldintza:

$$u(1,\theta) + u_r(1,\theta)(\epsilon\sin\theta) + u_{rr}(1,\theta)\frac{(\epsilon\sin\theta)^2}{2!} + O(\epsilon^3) = \cos\theta\,.$$

Garatu $u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\epsilon^n u_n(r,\theta)$. Honela *zirkuluan* ondoko problema sorta lortzen dugu

Muga baten perturbazioa, jarr.

$$\nabla^2 u_0 = 0\,, \quad u_0(1,\theta) = \cos\theta\,;$$

$$\nabla^2 u_n = 0\,, \quad u_n(1,\theta) = -\sum_{k=1}^{n}\left(\partial_r^k u_{n-k}\right)(1,\theta)\frac{\sin^k\theta}{k!}\,.$$

Lehenengo gaiak:

$$u_0(r,\theta) = r\cos\theta\,; \qquad u_1(r,\theta) = -\frac{r^2}{2}\sin 2\theta\,.$$

$$u_2(r,\theta) = \frac{1}{2}r\cos\theta - \frac{1}{2}r^3\cos(3\theta)\,.$$

22 Perturbazio singularrak

Perturbazio singularrak

$$\epsilon y' + y^2 = 0\,, \qquad y(0) = a\,.$$

Garapen "inozoa" ekuazioan saiatuz gero, hau da $y \to \sum_{n=0}^{\infty}\epsilon^n y_n(x)$ ordezkapena, bakarrik $y=0$ soluzio tribiala berreskuratzen dugu; beraz problemak ez du soluziorik.

Zergatia: $\epsilon\to 0$ limitean, ekuazioak bere izaera lortzen du; jada ez da lehen ordenako ekuazio diferentziala. Perturbazio singularra!

Soluzio zehatza: $y(x) = a/(1+ax/\epsilon) = a\epsilon/(\epsilon+ax)$. ϵ-en berretura serie moduko garapena ondokoa dugu:

$$\frac{\epsilon}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\epsilon^n}{a^n x^n}\,,$$

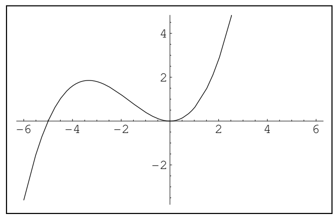
eta $x=0$ puntuan dibergentea da (izatez *garapen asintotikoa* da).

22.1 Gai sekularrak

Gai sekularrak

$$\ddot{x} + x + \epsilon x^2 = 0\,, \qquad x(0) = a\,, \qquad \dot{x}(0) = 0\,.$$

Potentzial baten eraginaren pean higitzen den partikula (irudia, $\epsilon = 0.3$)



Gai sekularrak

Energia finitoa bada, higidura periodikoa da.

Garapen "inozoa": $x \to \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n x_n(t)$; ondorioa

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0 \qquad x_0(0) = a\,, \quad \dot{x}_0(0) = 0\,;$$

$$\ddot{x}_n + x_n = -\sum_{k=0}^{n-1} x_k x_{n-1-k} \qquad x_n(0) = 0\,, \quad \dot{x}_n(0) = 0$$

Zerogarren ordenean $x_0(t) = a\cos t$.

Gai sekularrak

Lehen ordena:

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -a^2\cos^2 t = -\frac{a^2}{2}\left(1 + \cos(2t)\right)\,, \quad x_1(0) = 0\,,\ \dot{x}_1(0) = 0\,.$$

Soluzioa:

$$x_1(t) = \frac{a^2}{6}\left(-3 + 2\cos t + \cos 2t\right)\,.$$

Gai sekularrak

Bigarren ordena:

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -2x_0x_1 = -\frac{a^3}{6}\left(2 - 5\cos t + 2\cos 2t + \cos 3t\right)\,,$$

$$x_2(0) = 0\,,\ \dot{x}_2(0) = 0\,.$$

Soluzioa:

$$x_2(t) = \frac{5a^3}{12} t\sin t - \frac{a^3}{144}\left[48 - 29\cos t - 16\cos 2t - 3\cos 3t\right]\,.$$

Lehen gaia *sekularra* da. Perturbazioa ez da uniformea: bigarren ordena zerogarren ordena baino handiagoa da $t > 1/\epsilon^2$ bada.

Konbergentzia uniformea

$\sum_{k=0}^{n} \epsilon^k x_k(t)$ serieak $x(t)$ funtziora *uniformeki* jotzen du I tartean baldin eta $\forall\delta > 0\ \exists N(\delta) \setminus \forall t \in I$ eta $\forall n > N(\delta)$ zenbaki naturalak ondokoa betetzen bada:

$$\left| x(t) - \sum_{k=0}^{n} \epsilon^k x_k(t) \right| < \delta -$$

[konbergentzia izateko, ez uniforme, $N(\delta)$ izan beharrean aski dugu $N(\delta, t)$ izatea]

22.2 Lindstedt-en metodoa

Lindstedt-en metodo

Aplikagarritasuna: Ekuazio diferentzial arrunten soluzio periodikoak perturbazio garapenean gai sekularrak agertuz gero.

Oinarrizko ideia: Soluzio periodikoa dela jakin badakigu. Hala ere, periodoaren balioa perturbazio parametroaren funtzioa da (adibidez $\ddot{x} = -V'(x, \epsilon)$ ekuazioak $E = \dot{x}^2/2 + V(x, \epsilon)$ energia du, kontserbakorra da. Periodoa, beraz, hau da:

$$T(E, \epsilon) = 2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\,[E - V(x, \epsilon)]}}\ ).$$

Ondorioz: *garatu maiztasun angeluarra perturbazio parametroan ere*, eta hau erabili gai sekularrak sortzen dituzten gaiak ebazteko.

Lindstedt-en metodoa

$x(t)$-rentzat ekuazioa:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \epsilon f(x, \dot{x})\,.$$

1) Aldagaiak aldatu (aldagai berrietan maiztasuna 1 izateko!); aldagai aldaketa bera ϵ-en menpekoa da!

$$\tau = \Omega(\epsilon) t\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \Omega(\epsilon) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,.$$

Ondokoan, $'$-rekin τ-rekiko deribatua adieraziko dugu. (Kontuan hartu izatez periodoa hastapen energiaren menpekoa dela)

2) Perturbazio garapenak

$$x \to \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n x_n(\tau)\,, \qquad \Omega(\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \omega_n\,.$$

Lindstedt-en metodoa

Zerogarren ordena:

$$\omega_0^2 x_0'' + \omega^2 x_0 = 0\,.$$

Hartu $\omega_0 = \omega$, honela $x_0(\tau) = a \cos\tau$.

Lehen ordena:

$$\omega^2(x_1'' + x_1) = -2\omega\omega_1 x_0'' + f(x_0, \omega x_0') = 2\omega\omega_1 a\cos(\tau) + f(x_0, \omega x_0')\,.$$

$\cos\tau$ gaiak gai sekular bat, $\tau\sin\tau$ formakoa, sortzen du. f ere antzeko gai sekular baten jatorria bada, ω_1 ondo aukeratzeak biak ezabatuko ditu.

Lindtsedt-en metodoa: adibidea

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \epsilon x^3\,, \quad x(0) = a\,, \quad \dot{x}(0) = 0\,.$$

Zerogarren ordena: $x_0(\tau) = r\cos\tau$.

Lehen ordena:

$$x_1'' + x_1 = \frac{2\omega_1}{\omega} r\cos\tau + \frac{r^3}{4\omega^2}\left(3\cos\tau + \cos 3\tau\right)\,.$$

Gai sekularrik ez egoteko:

$$\omega_1 = -\frac{3}{8}\frac{r^2}{\omega}\,.$$

Lindtsedt-en metodoa: adibidea

Honela

$$x_1(\tau) = \frac{r^3}{32\omega^2}\left(\cos\tau - \cos 3\tau\right)$$

non $x_1(0) = 0 = x_1'(0)$ hartu ditugun. Eta

$$\begin{aligned} x(t) \quad = \quad & a\cos\left[\omega\left(1 - \frac{3\epsilon a^2}{8\omega^2}\right)t\right] + \\ & \frac{\epsilon a^3}{32\omega^2}\left\{\cos\left[\omega\left(1 - \frac{3\epsilon a^2}{8\omega^2}\right)t\right] - \cos\left[3\omega\left(1 - \frac{3\epsilon a^2}{8\omega^2}\right)t\right]\right\} + \\ & O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

Lindstedt-en metodoaren mugak, luzapena

Metodoa soluzio periodikoetan soilik erabil daiteke (adibidez, aurreko adibidean, $V(x) = \omega^2 x^2/2 - \epsilon x^4/4$, hastapen posizioa $|x| < \omega/\sqrt{\epsilon}$ eta abiadura nulua badira soluzio guztiak periodikoak dira; ez, ordea, hastapen energia $\omega^4/4\epsilon$ baino handiagoa bada edo hastapen posizioa $(-\omega/\sqrt{\epsilon}, \omega/\sqrt{\epsilon})$ tartetik kanpo badago; era berean, $V(x) = x^2/2 + \epsilon x^3/3$ potentzialarekin, non pausagunetik $x(0) < -1/\epsilon$ edo $x(0) > 1/2\epsilon$ tartetik hasten diren higidurak periodikoak ez diren).

Metodoaren luzapen eta orokortzea eskala anitzen metodoa da. Fisikoki, azpiko ideia da garapen matematikoan agertzen diren denbora eskalak esanguratsuak direla.

23 Eragileen perturbazio garapenak

Matrizeen perturbazioak

Demagun ondoko problema:

$$(L_0 + \epsilon L_1)\,\mathbf{v} = \mathbf{w}\,,$$

non $\mathbf{v}$ zehaztu nahi dugun $\mathbf{w}$-ren menpean. I.e $(L_0 + \epsilon L_1)^{-1}$ kalkulatu nahi dugu.

Formalki, ordezkatu

$$(L_0 + \epsilon L_1)^{-1} \to \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n l_n$$

$(L_0 + \epsilon L_1)^{-1}(L_0 + \epsilon L_1) = 1$ adierazpenean, hau lortzeko:

$$l_{k+1} = -l_k L_1 L_0^{-1}\,, \qquad l_0 = L_0^{-1} \Longrightarrow l_k = (-1)^k (L_0^{-1} L_1)^k L_0^{-1}\,.$$

Adibidea

Biz

$$L_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Honela, $L_0^{-1} = L_0$ eta

$$L_0^{-1} L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Adibidea jarr.

Bigarren ordenaraino, beraz,

$$(L_0 + \epsilon L_1)^{-1} = L_0 + \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \epsilon^2 \begin{pmatrix} 0 & 10 & 2 \\ 10 & 10 & 16 \\ 2 & 16 & 10 \end{pmatrix} + O(\epsilon^3)$$

Balio eta bektore propioen garapenak

$$(L_0 + \epsilon L_1)\Phi_n = \Lambda_n \Phi_n$$

Garatu balio eta bektore propioak ϵ-en berretura serie moduan (endakapenik gabeko kasuan):

$$\Phi_n = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \varphi_n^{(k)}\,, \qquad \Lambda_n = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \lambda_n^{(k)}\,.$$

Balio eta bektore propioen garapenak

Ekuazio sorta:

$$\begin{aligned} L_0\varphi_n^{(0)} &= \lambda_n^{(0)}\varphi_n^{(0)}\,; \\ L_0\varphi_n^{(k+1)} &= -L_1\varphi_n^{(k)} + \sum_{l=0}^{k+1}\lambda_n^{(l)}\varphi_n^{(k-l+1)}\,. \end{aligned}$$

Demagun endakapenik ez dagoela, eta biderkatu $\varphi_m^{(0)}$ eskalarrarekin, hau lortzeko:

$$\langle\varphi_m^{(0)},\varphi_n^{(1)}\rangle = \frac{1}{\lambda_n^{(0)}-\lambda_m^{(0)}}\langle\varphi_m^{(0)},L_1\varphi_n^{(0)}\rangle\,.$$

$$\lambda_n^{(1)} = \langle\varphi_n^{(0)},L_1\varphi_n^{(0)}\rangle\,.$$

Adibidea

$$L_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\,, \quad L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

$$\varphi_1^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,,\ \lambda_1^{(0)} = 1\,; \qquad \varphi_2^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,,\ \lambda_1^{(0)} = 2\,;$$

Beraz

$$\lambda_1^{(1)} = \lambda_2^{(1)} = 0\,;\ \varphi_1^{(1)} = 0\,, \quad \varphi_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

Izatez hau da soluzio zehatza!

23.1 Sturm-Liouville: balio eta funtzio propioak

Ekuazio diferentzialaren adibidea (Sturm-Liouville)

$$L_0 y = -y''\,,\ L_1 y = -y' \quad y(0) = y(\pi) = 0\,.$$

$$\lambda_n^{(0)} = n^2\,, \quad y_n^{(0)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\,.$$

$$\lambda_n^{(1)} = \langle y_n^{(0)},L_1 y_n^{(0)}\rangle = 0\,.$$

$$\begin{aligned} \langle y_m^{(0)},y_n^{(1)}\rangle &= \frac{1}{\lambda_n^{(0)}-\lambda_m^{(0)}}\langle y_m^{(0)},L_1 y_n^{(0)}\rangle = \\ &= \frac{2nm}{\pi\left(n^2-m^2\right)^2}\left[1-(-1)^{m+n}\right] \end{aligned}$$

Adibidea, jarr.

Soluzio zehatza: $\lambda_n = n^2+\epsilon^2/4$, $y_n(x)\propto e^{-\epsilon x/2}\sin nx$.

24 WKBJ

WKBJ

$$\psi''(x) + \omega^2(x)\psi(x) = 0\,,$$

non ω funtzio “geldoa”den. Zerekin alderatu behar dugu, “geldo”izenondoan erabiltzeko? Dimentsio analisia dela eta, kontsidera dezagun

$$\left|\frac{\omega'}{\omega^2}\right| \ll 1\,.$$

ω konstante izango balitz, $\psi \sim \exp(\pm i\omega x)$. Honek esan nahi du ω-ren aldaketei dagokie luzera eskala, hau da $|\omega'/\omega|^{-1}$, ψ-ren aldaketei dagokiena baino askoz luzeagoa dela ($|\omega|^{-1}$).

WKBJ

Hau sistematikoki erabiltzeko, zer egingo dugu? ALdagai aldaketa: $x = \tau/\epsilon$, $\dot\omega/\omega^2 \sim O(1)$ izateko, beraz $\epsilon \ll 1$; eta $\psi(x) \to \exp(iS(\tau)/\epsilon)$. Honela, S-rentzat:

$$i\epsilon\ddot{S} - \dot{S}^2 + \omega^2 = 0\,.$$

Garatu S ϵ-en berreturetan. Beraz

$$\dot{S}_0^2 = \omega^2\,; \qquad \dot{S}_{n+1} = \frac{1}{2\dot{S}_0}\left[i\ddot{S}_n - \sum_{k=0}^{n-1}\dot{S}_{k+1}\dot{S}_{n-k}\right]\,.$$

WKBJ

$$S_0(x) = \pm\epsilon\int^x \mathrm{d}\xi\,\omega(\xi)\,; \quad S_1(x) = \frac{i}{2}\ln\omega(x)\,,$$

non fase konstante batzuk idatziak ez diren.

Ondorioz:

$$\psi_\pm(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\omega(x)}}e^{\pm i\int^x \mathrm{d}\xi\,\omega(\xi)}\,.$$

Adibidea

$$y'' + (1+\epsilon x)y = 0\,.$$

$x > -1/\epsilon$ denean, $\omega^2 = 1 + \epsilon x > 0$. Geldoa?

$$\frac{\omega'}{\omega^2} = \frac{\epsilon}{2\,(1+\epsilon x)^{3/2}}\,.$$

Bai ϵ txikia bada eta $x \gg -1/\epsilon$ betetzen bada.

Soluzio hurbildua:

$$y(x) \sim \frac{1}{(1+\epsilon x)^{1/4}} \left\{ a \sin\left[\frac{2\,(1+\epsilon x)^{3/2}}{3\epsilon}\right] + b\cos\left[\frac{2\,(1+\epsilon x)^{3/2}}{3\epsilon}\right]\right\} .$$

WKBJ, ω irudikaria

ω irudikarietan aplikagarria da WKBJ metodoa, “geldoa”izanez gero.

WKBJ-ren aplikazioa Sturm-Liouville-ren problemetan

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)\,, \qquad \psi(0) = \psi(L) = 0\,.$$

Edozein $V(x)$ potentzialetarako (singularra ez bada) energia altuko ψ funtzioa oso azkar oszilatzen da, eta WKBJ aplikagarria da:

$$\psi \sim \frac{1}{[E - V(\xi)]^(1/4)} \sin \int_0^x \mathrm{d}\xi\,\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\,[E - V(\xi)]}\,,$$

$x = 0$ puntuko mugalde baldintza inposatu ostean.

Aplikazioa: SL

$x = L$ puntuko mugalde baldintza betetzeko, beraz, ondokoa gauzatu behar da:

$$\int_0^L \mathrm{d}\xi\,\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\,[E_n - V(\xi)]} = (n+1)\pi\,,$$

eta honela E_n-rentzat ekuazio bat lortzen dugu; baliagarria da n handientzat (hor WKBJ hurbilketa ona delako). n handia, aldi berean, limitea klasikoa da: WKBJ hurbilketa *semiklasikoa* da.

Adibideak

1. Adibidea: $V(x) = 0$.

$$E_n = \frac{(n+1)^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\,.$$

Izatez, bat dator emaitza zehatzarekin

2. Adibidea: E_n oso handia bada, garatu erroa ondokoa lortzeko:

$$E_n = \frac{(n+1)^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} + \frac{1}{L}\int_0^L \mathrm{d}\xi\,V(\xi) + \cdots$$

Adibideak

Adibidea: $V(x) = -m\omega^2(x - l/2)^2/2$. Defini dezagun $e_\omega = mL^2\omega^2$.

$$(n+1)\pi = \frac{\sqrt{e_\omega E}}{\hbar\omega}\left[\sqrt{1+\frac{e_\omega}{16E}} + 4\sqrt{\frac{E}{e_\omega}}\text{arcsinh}\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{e_\omega}{E}}\right)\right].$$

Ekuazio transzendentea. Soluzio hurbildua:

$$E_n = \frac{(n+1)^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} - \frac{m\omega^2L^2}{24} + O\left((n+1)^{-1}\right).$$

Garrantzitsua: aldi berean ψ_n hurbildua lortzen dugu, eta honela denetarik.

24.1 Itsastea

WKBJ-ren muga

ω geldoa ez bada ez dabil. Batez ere biraketa puntu baten inguruan.

Horren inguruan, askotan, $\omega^2(x) \sim a(x - x_0) + \cdots$

Betetzen bada, Airy-ren ekuazioa agertzen da

$$y'' + a(x - x_0)y = 0\,,$$

bere soluzioa ondokoa izanda:

$$y(x) = \alpha\text{Ai}\left(a^{1/3}(x_0 - x)\right) + \beta\text{Bi}\left(a^{1/3}(x_0 - x)\right)$$

(Airy-ren funtzioak).

Itsastea

Demagun orain biraketa puntu bakarra dagoela $x_0 = 0$ puntuan. Hau dela eta, $\text{sign}\left(\omega^2(x)\right) = -\text{sign}(x)$. $x \to \infty$ limitean, beraz,

$$\alpha\text{Ai}\left(-a^{1/3}x\right) + \beta\text{Bi}\left(-a^{1/3}x\right) \sim$$
$$\frac{1}{2\pi^{1/2}(-a)^{1/12}x^{1/4}}\left(\alpha e^{-2(-a)^{1/2}x^{3/2}} + 2\beta e^{2(-a)^{1/2}x^{3/2}}\right),$$

eta hau alderatu behar dugu ondokoarekin:

Itsastea

$$\psi(x) \sim \frac{1}{\sqrt{|\omega(x)|}}\left(Ae^{-\int_0^x \mathrm{d}\xi\,|\omega(\xi)|} + Be^{\int_0^x \mathrm{d}\xi\,|\omega(\xi)|}\right).$$

Era berean, beste alboan

$$\text{Ai}(-z) \sim \frac{1}{\pi^{1/2}z^{1/4}}\sin\left(\frac{2}{3}z^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

eta

$$\text{Bi}(-z) \sim \frac{1}{\pi^{1/2}z^{1/4}}\cos\left(\frac{2}{3}z^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$z \to +\infty$ limitean.

25 Garapen asintotikoak

25.1 Definition

Garapen asintotikoak

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(x)$$

x_0 puntuaren inguruko garapen asintotikoa da baldin eta

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\phi_{n+1}(x)}{\phi_n(x)} = 0$$

bada. (Izatez, konplexuetako sektore batean hartu behar dugu limitea hau zentzuzkoa izateko)

Garapen asintotikoak

Adibidea:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

$x = 0$ puntuaren inguruko garapen asintotikoa da. Ez da konbergentea!

25.2 Erabilgarritasuna

Erabilgarritasuna

Defini dezagun

$$f(x) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, \frac{e^{-t}}{1-xt}\,.$$

Ez dago definituta x positiboetan (integrakizuna singularra da $1/x$ puntuan, eta ez da integragarria), baina bai x negatiboentzat.

$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ garapena erabilgarria da $f(x)$ kalkulatzeko!

Adibidea

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathrm{d}t\, \frac{e^{-t}}{1-xt} &\sim \int_0^\infty \mathrm{d}t\, e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} (xt)^n \\
&\sim \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^\infty \mathrm{d}t\, e^{-t} t^n \right) x^n \\
&\sim \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n\,.
\end{aligned}$$

Adibidea

Defini dezagun

$$s_m(x) := \sum_{n=0}^{m} n! x^n \,.$$

$x = -0.1$ puntuan, $f(-0.1) = 0.915633$ eta $s_0 = 1$, $s_1 = 0.9, \ldots, s_1 0 = 0.9158192$

Hala ere, ez da konbergentea, eta hemendik aurrera gero eta txarragoa da hurbilketa.

25.3 Laplace-ren integralak

Laplace-ren integralak eta Watson-en lema

$$I(s) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, e^{-st} f(t)$$

motakoak. f funtzioaren Taylor-en garapena $f(t) = \sum_{n=0}^\infty a_n t^n$ da. Integrakizuna, s handientzat, oso konzentratuta dago $t = 0$ puntuaren inguruan. Ordezkatuko dugu, beraz, f-ren garapena eta (TRANPA!!!) integrala eta seriea trukatuko ditugu:

$$I(s) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^\infty \mathrm{d}t\, e^{-st} t^n \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{n!}{s^{n+1}} \,.$$

Garapen asintotikoa da!

Laplace-ren integralak eta Watson-en lema

Nahiz eta f funtzioak 0 puntuaren inguruan Taylor-en garapena onartu,

$$I(s) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, e^{-st} t^\alpha f(t)$$

integraletan ez dago $t^\alpha f(t)$ funtzioaren Taylor-en garapenik, 0 puntuaren inguruan, α zenbaki naturala ez bada. Beraz, aurreko kasuko garapena ez dirudi egokia...baina, hala ere, garatu f, eta aurreko tranparekin,

$$I(s) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^\infty \mathrm{d}t\, e^{-st} t^{n+\alpha} \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{s^{n+1+\alpha}} \,.$$

Hau da Watson-en lema.

Laplace-ren integralak eta Watson-en lema

Gehiago orokortuz, demagun

$$I(s) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, e^{sg(t)} t^\alpha f(t) \,,$$

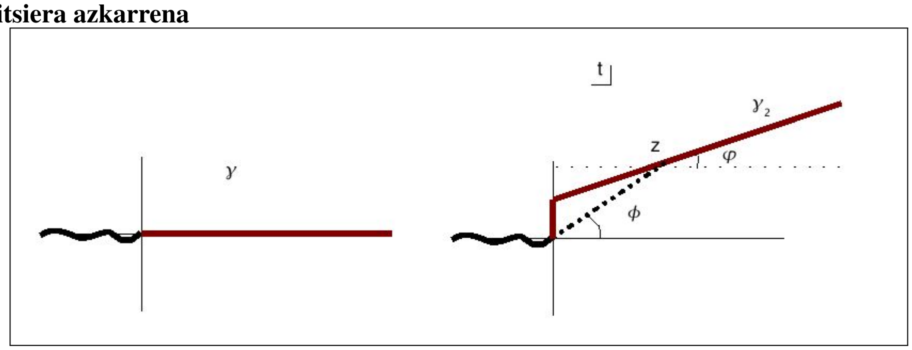
non g funtzioaren maximoa $t = 0$ puntuan dagoen, g monotonoa eta positiboa eta $g'(0) < 0$ diren. Defini dezagun $\tau = -g'(0)t$ eta $F(\tau) = f(-\tau/g'(0)) \exp\left[s\left(g(-\tau/g'(0)) - g(0) - \tau\right)\right]$. Integralean ordezkatuz,

$$I(s) = \frac{e^{sg(0)}}{|g'(0)|} \int_0^\infty \mathrm{d}\tau\, e^{-s\tau} F(\tau)\,,$$

eta aurreko kasuan gaude. Hau da,

$$I(s) \sim \frac{e^{sg(0)}}{|g'(0)|} \left[\frac{f(0)}{s} + \frac{1}{s^2}\left(\frac{2f'(0)}{|g'(0)|} + \frac{3g''(0)f(0)}{|g'(0)|^2}\right) + \cdots\right] .$$

Jaitsiera azkarrena



Adibidea: Euler-en Gamma funtzioa:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, e^{-t} t^z = \int_\gamma \mathrm{d}\tau\, e^{-\tau + z\ln\tau}\,,$$

non γ τ aldagai konplexuko planoan ondoko ibilbidea den (logaritmoaren adarra hartu dugu $\tau = \rho\exp(i\phi) \to \ln\tau = \ln\rho + i\phi$ moduan, non $\phi \in (-\pi, \pi)$).

Gamma funtzioa

Defini dezagun $\phi(\tau) = -\tau + z\ln\tau$. Bere deribatua nulua da $\tau = z$ puntuan. Beraz,

$$\phi(\tau) = \phi(z) + \frac{1}{2}\phi''(z)(t-z)^2 + O\left((t-z)^3\right) .$$

Orain ibilbidea deformatuko dugu, z puntutik pasa dadin, goian agertzen den moduan. Defini dezagun $\rho e^{i\varphi} = t - z$. ϕ funtzioaren garapenean gai kuadratikoa, beraz, $\phi''(z)(t-z)^2/2 = -\rho^2\exp(2i\varphi)/2z$, eta z puntutik ahalik eta modu azkarrenenan pasatzeko, φ angelua z zenbaki konplexuaren argumentua zati bi hartu behar dugu:

25.3.1 Stirling-en hurbilketa

Gamma funtzioa - Stirling-en hurbilketa

Honela,

$$\Gamma(z+1) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\rho\, e^{i\varphi} e^{-z+z\ln z} e^{-\rho^2/2|z|} \sim \sqrt{2\pi} z^{z+1/2} e^{-z} .$$