DERIBATU PARTZIALETAKO EKUAZIOAK

Sailkapena eta karakteristiken metodoa

1.- Sailkapena

Fisikako ekuaziorik garrantzitsuenetarikoen artean, bigarren ordenako ekuazio kuasilinealak aurkitzen ditugu:

$$A_{ij}\left(\{x_k\}, u, \{\partial_k u\}\right) \partial_i \partial_j u = F\left(\{x_k\}, u, \{\partial_k u\}\right) ,$$

non $\partial_k = \partial/\partial x_k$ den ($k = 1, 2 \ldots n$): linealak orden altueneko deribatuetan.

Sailkapena: A koefiziente matrizearen balio propioen arabera (oharra: A matrizea simetrikoa da),$\{\lambda_n\}$ multzoaren arabera:

1.- Hiperbolikoa: $\lambda_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots n-1$, eta $\lambda_n < 0$. Adibidez: uhin-ekuazioa:

$$c^2 \nabla^2 u - \partial_t^2 u = 0\,,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

2.- Parabolikoa: $\lambda_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots n-1$, eta $\lambda_n = 0$. Adibidez: bero-eroalpen ekuazioa:

$$c^2 \nabla^2 u - \partial_t u = 0\,,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

3.- Eliptikoa: $\lambda_k > 0$, $\forall k$. Adibidez: Laplace-ren ekuazioa:

$$\nabla^2 u = 0\,,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

4.- Bestelakoak: bestela...

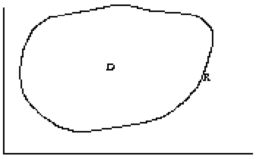
1. oharra: $-A$ matrizeari dagokion ekuazioa hiperbolikoa, eliptikoa edo parabolikoa bada, esaten dugu A matrizeari dagokion ekuazioa modu berean sailkatzen dela (adibidez: $-\nabla^2 u = 0$ ekuazioa parabolikoa da)

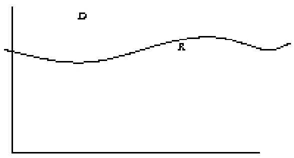
2. oharra: ekuazio baten sailkapena ezberdina izan daiteke x_i aldagai independenteek eta u menpeko aldagaiak osatutako espazioko eremu ezberdinetan. Adibidez: Tricomi-ren ekuazioa $x u_{xx} + u_{yy} = 0$ (jario supersonikoa eta azpisonikoa adierazten du, $x = 0$ lerroan soinu langa izanik). Edo $u u_{xx} = u_{tt}$: $u = 0$ gainazalean ekuazio mota aldatzen da.

2.- Mugalde baldintzak

Mugalde baldintza egokiak motaz mota aldatzen dira:

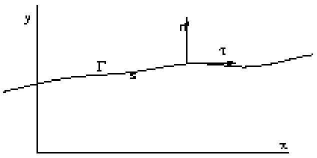
1.- hiperbolikoak: hastapen baldintzak. [Cauchy-ren datuak, muga irekia];
2.- parabolikoak: hastapen + mugalde baldintzak [Dirichlet-en edo Neumann-en datuak, muga irekia];
3.- eliptikoak: mugalde baldintzapeko problemak [Dirichlet-en edo Neumann-en datuak, muga itxia].





- Dirichlet: $u|_R$.
- Neumann: $n^i \partial_i u|_R$ (oharra: denborarekiko deribatua ager daiteke).
- Robin $\alpha u|_R + \beta n^i \partial_i u|_R$.
- Cauchy $u|_R$ eta $n^i \partial_i u|_R$.

Zergaitik? **Cauchy**-ren datuak aztertuko ditugu.



Γ kurba forma parametrikoan idazten dugu: $x = X(s)$, $y = Y(s)$, non s kurbaren parametroa den. Ondorioz, bektore tangentea eta bektore normala hauexek dira:

$$\hat{\tau} = \left(\frac{dX}{ds}, \frac{dY}{ds} \right) ; \qquad \hat{n} = \left(-\frac{dY}{ds}, \frac{dX}{ds} \right) ;$$

s parametroa ondo aukeratuz gero, unitarioak dira biak; hau da,

$$\left(\frac{dX}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dY}{ds} \right)^2 = 1 \,.$$

Orain,

$$A(x,y,u,u_x,u_y)u_{xx} + 2B(x,y,u,u_x,u_y)u_{xy} + C(x,y,u,u_x,u_y)u_{yy} = F(x,y,u,u_x,u_y)$$

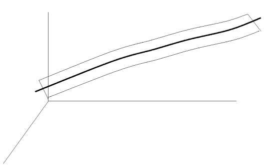
ekuazioa aztertu nahi dugu,

$$u|_\Gamma = u(X(s),Y(s)) = f(s) \qquad \text{eta} \quad \hat{n} \cdot \nabla u|_\Gamma = -\frac{dY}{ds} u_x(X(s),Y(s)) + \frac{dX}{ds} u_y(X(s),Y(s)) = g(s)$$

baldintzen pean (datuak f eta g funtzioak dira).

Datu hauekin $u(x,y)$ funtzioa lortu nahi dugu, gutxienez Γ kurbaren inguruan. Horretarako, u-ren Taylor-en garapena erabiliko dugu. Baina hori lortzeko, funtzioaren deribatu guztiak zehaztu behar ditugu kurbaren gainean.

Kontutan hartu behar dugu ekuazioaren soluzioak (x,y,u) espazioko gainazala zehazten duela. Cauchy-ren datuak emanez gero, lerro baten gainean ematen ditugu, eta soluzio gainazala lerro horretatik pasatu behar da. Hau da, soluzio gainazalaren banda ukitzailea, hastapen lerroa zentratuta, zehaztu behar dugu hasteko: horretarako u_x eta u_y zehaztu behar ditugu lerroan zehar.



Lehenengo baldintza s guztietan betetzen da, beraz,

$$f'(s) = \frac{d}{ds}\left(u(X(s),Y(s))\right) = u_x(X(s),Y(s))\frac{dX}{ds} + u_y(X(s),Y(s))\frac{dY}{ds}$$

ondorioztatzen dugu. Azken adierazpen hau eta g funtzioari dagokiona erabiliz, ondokoa lortzen dugu:

$$\begin{aligned} u_x(X(s),Y(s)) &= h_1(s) = -g(s)\frac{dY}{ds} + f'(s)\frac{dX}{ds}\,, \\ u_y(X(s),Y(s)) &= h_2(s) = g(s)\frac{dX}{ds} + f'(s)\frac{dY}{ds}\,. \end{aligned}$$

(Egiazta ezazu aurreko emaitza)

Hau da, datuen bidez u funtzioaren lehenengo deribatu partzialen balioak zehaztu ditugu datu-kurban zehar. Horretarako ez dugu ekuazioa erabili. Hurrengo pausuan ere ez dugu oraindik erabiliko:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}u_x|_\Gamma &= u_{xx}(X(s),Y(s))\frac{dX}{ds} + u_{yx}(X(s),Y(s))\frac{dY}{ds} = h_1'(s)\,. \\ \frac{d}{ds}u_y|_\Gamma &= u_{xy}(X(s),Y(s))\frac{dX}{ds} + u_{yy}(X(s),Y(s))\frac{dY}{ds} = h_2'(s)\,. \end{aligned}$$

h_1 eta h_2 funtzioak ezagutzen ditugu, datuen bidez lortu ditugu eta. Honela ez ditugu bigarren ordenako deribatuak kurbaren gainean zehaztu: bi ekuazio (h_1' eta h_2') eta hiru ezezagun (u_{xx}, $u_{xy} = u_{yx}$ eta u_{yy}) baitaukagu. Orain bai, ekuazio diferentziala bera erabiliko dugu, kurbaren gainean honako hau betetzen dela esateko:

$$\begin{aligned} A(s)u_{xx}(X(s),Y(s)) + &2B(s)u_{xy}(X(s),Y(s)) + C(s)u_{yy}(X(s),Y(s)) = F(s)\,, \text{ non} \\ A(s) &= A(X(s),Y(s),f(s),h_1(s),h_2(s))\,, \\ B(s) &= B(X(s),Y(s),f(s),h_1(s),h_2(s))\,, \\ C(s) &= C(X(s),Y(s),f(s),h_1(s),h_2(s))\,, \text{ eta} \\ F(s) &= F(X(s),Y(s),f(s),h_1(s),h_2(s)) \text{ diren}\,. \end{aligned}$$

Hiru ekuazio hauek linealak dira, ezezagunak $u_{xx}(X(s),Y(s))$, $u_{xy}(X(s),Y(s)) = u_{yx}(X(s),Y(s))$ eta $u_{yy}(X(s),Y(s))$ izanik, eta gain inhomogeneoa ez da nulua. Beraz, soluzioa izateko, determinantea ezin da nulua izan:

$$\begin{vmatrix} \frac{dX}{ds} & \frac{dY}{ds} & 0 \\ 0 & \frac{dX}{ds} & \frac{dY}{ds} \\ A(s) & 2B(s) & C(s) \end{vmatrix} = A(s)\left(\frac{dY}{ds}\right)^2 - 2B(s)\frac{dY}{ds}\frac{dX}{ds} + C(s)\left(\frac{dX}{ds}\right)^2 \neq 0\,.$$

3.- Karakteristikak

Lerro karakteristiken ekuazioa:

$$A(s)\left(\frac{dY}{ds}\right)^2 - 2B(s)\frac{dY}{ds}\frac{dX}{ds} + C(s)\left(\frac{dX}{ds}\right)^2 = 0\,.$$

Ekuazio honen soluzioak kurbak dira, **lerro karakteristikak** hain zuzen ere.

[Oharra: ekuazio hau zehazteko, A, B, eta C funtzioak definitu behar ditugu, eta ekuazioa lineala ez bada, f eta g funtzioak ere bai. Beste modu batean esanda, aztertu nahi dugun ekuazio diferentziala lineala ez bada, karakteristikak alda daitezke hasierako balioak aldatuz. Kasu hori ez dugu berriro kontsideratuko.]

Lerro karakteristiken ekuazioaren diskriminantea:

$$\Delta = B^2 - AC\,.$$

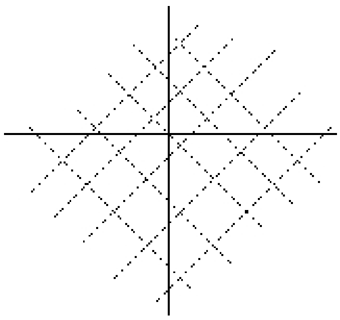
- $\Delta > 0$ bada, bi soluzio erreal izango ditu ekuazioak (kasu hiperbolikoa);
- $\Delta = 0$ bada, soluzio erreal bakar bat existituko da (kasu parabolikoa);
- $\Delta < 0$ bada, ekuazioak ez du soluzio errealik (kasu eliptikoa).

Kasu hiperbolikoan, Cauchy-ren datuak emateko erabili dugun lerroa inon karakteristiken tangentea ez bada, soluzio lokala existituko da. Baina Cauchy lerroa eta karakteristika bat puntu batean tangenteak izango balira, arazoak sortuko lirateke.

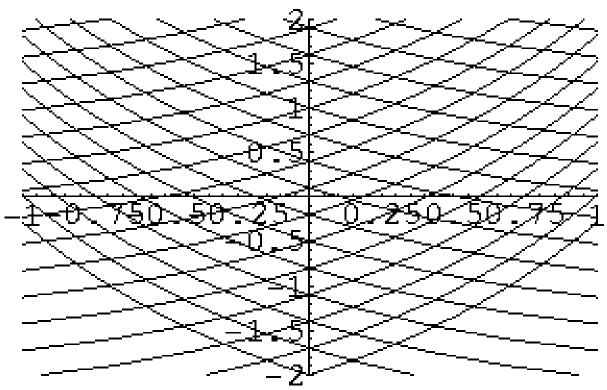
4.- Adibideak

Uhin ekuazioa

$$c^2 u_{xx} - u_{tt} = 0\,,$$
$$A = c^2\,;\quad B = 0\,;\quad C = -1\,;\Delta = B^2 - AC = c^2 > 0\,;$$
$$\text{karakteristiken ekuazioa} : c^2\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 0\,;$$
$$\text{karakteristikak} : x - ct = \xi\,,\quad x + ct = \eta\,.$$
$$\text{ekuazioa, aldagai berrietan} : u_{\xi\eta} = 0\,,$$
$$\text{soluzio orokorra} : u(x,t) = f_+(x - ct) + f_-(x + ct)\,.$$

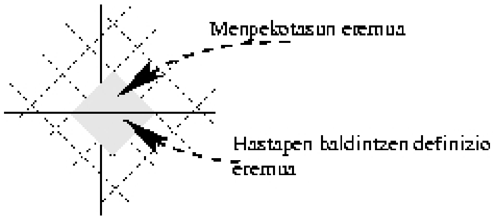


$$x^2 u_{xx} - u_{tt} = 0\,,$$
$$A = x^2\,;\quad B = 0\,;\quad C = -1\,;\Delta = B^2 - AC = x^2 > 0\ (x = 0 \text{ lerroan izan ezik})\,;$$
$$\text{karakteristiken ekuazioa} : x^2\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 0\,;$$
$$\text{karakteristikak} : \ln x - t = \xi\,,\quad \ln x + t = \eta\,.$$
$$\text{ekuazioa, aldagai berrietan} : u_{\xi\eta} = \frac{1}{4}\left(u_\xi + u_\eta\right)\,.$$



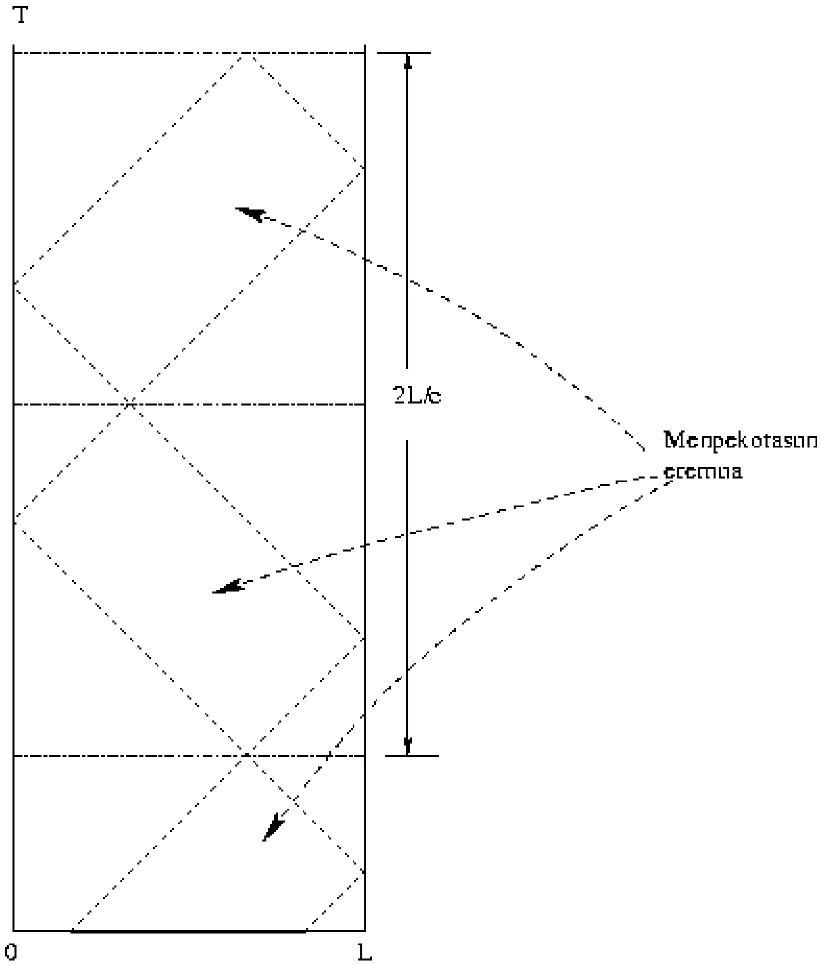
5.- Ekuazio hiperbolikoak: karakteristikak

Informazioa edo singularitateak karakteristiketan zehar abiatzen dira.



Menpekotasunaren eremua:

Tentsiopeko soka: mugalde baldintzak, $u(0,t) = u(l,t) = 0$; hemendik, islapen osoa:



6.- Lehenengo ordenako ekuazioak

Adibidez:

$$u_x + u_y = 0\,.$$

Karakteristikak ondoko sistema endakatua izateko baldintzetik datozkigu:

$$\begin{aligned} u_x + u_y &= 0\,, \\ du = u_x dx + u_y dy &= 0\,. \end{aligned}$$

Kasu honetan:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ dx & dy \end{vmatrix} = dy - dx = 0\,.$$

Ondorioz (kasu honetan), $du = 0$ karakteristiken gainean, eta u ez da aldatzen karakteristiketan. Karakteristiken ekuazioa: $\xi = x - t$. Soluzioa: $u(x,t) = f(x-t)$.

Orokorrean:

$$\begin{aligned} \text{Ekuazioa} &: A(x,y,u)u_x + B(x,y,u)u_y = C(x,y,u)\,; \\ \text{aldaketa} &: u_x dx + u_y dy = du\,; \\ \text{endakapen baldintza} &: \begin{vmatrix} A & B \\ dx & dy \end{vmatrix} = Ady - Bdx = 0\,; \\ \text{ondoriokoa} &: \frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{du}{C}\,. \end{aligned}$$

Adibidea:

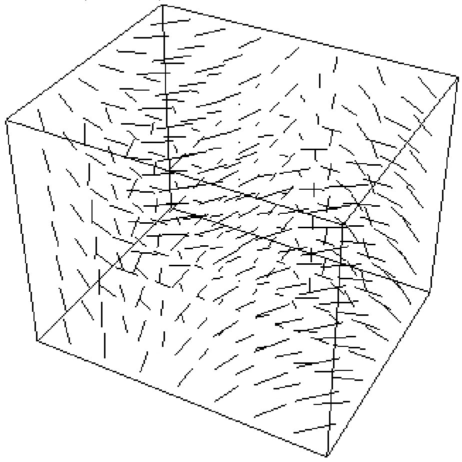
$$\begin{aligned} \text{Ekuazioa} &: u_x + u_y = 1\,; \\ \text{aldaketa} &: u_x dx + u_y dy = du\,; \\ \text{endakapen baldintza} &: \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ dx & dy \end{vmatrix} = dy - dx = 0\,; \\ \text{ondoriokoa} &: dx = dy = du\,, \\ \text{soluzioa} &: \Phi(x-y, u-x) = 0 \Leftrightarrow u(x,y) = x + f(x-y)\,. \end{aligned}$$

Problema:

$$\begin{aligned} \text{Ekuazioa} &: yu_x - xu_y = 0\,; \\ \text{baldintza} &: \text{soluzioa } x = 0\,, u = y^2 \text{ lerrotik pasatzen da}\,; \\ \text{aldaketa} &: u_x dx + u_y dy = du\,; \\ \text{endakapen baldintza} &: \begin{vmatrix} y & -x \\ dx & dy \end{vmatrix} = ydy + xdx = 0\,; \\ \text{ondoriokoa} &: \frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{du}{0}\,, \\ \text{ek. soluzioa} &: \Phi(x^2+y^2, u) = 0 \Leftrightarrow u(x,y) = f(x^2+y^2)\,; \\ \text{problemaren soluzioa} &: u(x,y) = x^2 + y^2\,. \end{aligned}$$

7.- Eremu bektorialak

$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ eremu bektorialaren eremu lerroak edo lerro bektorialak: puntu bakoitzean paraleloak.



$\mathbf{F} = A\hat{\mathbf{i}} + B\hat{\mathbf{j}} + C\hat{\mathbf{j}}$ bektore eremuaren eremu lerroak $Az_x + Bz_y = C$ ekuazioaren lerro karakteristikoak dira.

Gainazal bektoriala: lerro bektorialek osatutako gainazala. Definizio orokorra: normala eta $\mathbf{F}$ ortogonalak dira. Beraz, ek. diferentzialaren soluzioa.

Adibidez:

$$xz_x - yz_y = z\,,$$

eta soluzioaren gainazalean $y = 1$, $z = 3x$ lerroa dago. Karakteristikak:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}\,.$$

Soluzioak: $xy = c_1$, $zy = c_2$. Soluzio orokorra: $\Phi(xy, yz) = 0 \Leftrightarrow z(x, y) = \phi(xy)/y$. Dagokiona:

$$\left\{\begin{array}{l} y = 1 \\ z = 3x \end{array}\right. \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = s \\ y = 1 \\ z = 3s \end{array}\right. \quad \rightarrow \left\{\begin{array}{l} xy = c_1 \rightarrow c_1 = s \\ zy = c_2 \rightarrow c_2 = 3s \end{array}\right. \quad \rightarrow c_2 = 3c_1 \rightarrow yz = 3xy \rightarrow z(x, y) = 3x\,.$$

Bibliografia: Elsgoltz